



УДК 537.523

## К РАСЧЕТУ ТРАЕКТОРИЙ ПЛАЗМЕННЫХ СТРУЙ В ДВУХСТРУЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГЕ

Э.Б. Кулумбаев, Т.Б. Никуличева

Белгородский государственный университет,  
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308015, Россия,  
e-mail: [kulumbaev@bsu.edu.ru](mailto:kulumbaev@bsu.edu.ru), [nikulicheva@bsu.edu.ru](mailto:nikulicheva@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Модель взаимодействия токоведущих плазменных струй в двухструйной электрической дуге обобщена в связи с учетом изменения потока импульса струй. Это позволяет улучшить согласование расчетной конфигурации струй с опытными данными. Представлены результаты расчета траекторий трехмерных и плоскопараллельных плазменных струй в зависимости от расстояния и угла между соплами в двухструйном плазмотроне. Получено, что роль электромагнитного отталкивания по сравнению с газодинамическим соударением в самосогласованном формировании траектории струй возрастает с увеличением начального расстояния или угла между струями. Проведено сопоставление траекторий струй с результатами счета на основе самосогласованной магнитогазодинамической модели в плоскопараллельном приближении.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, МГД уравнения, электрическая дуга.

### Введение

При математическом моделировании электродуговых потоков широко используются магнитогазодинамические (МГД) модели [1], основанные на представлениях механики, термодинамики и электродинамики сплошной среды, которые формализованы в виде самосогласованной системы МГД уравнений. Для двухструйной электрической дуги [2] в [3–4] проведен численный анализ МГД уравнений в плоскопараллельном приближении равновесной плазмы. Как и в экспериментах [2], численно получено, что при фиксированном взаимном положении сопел, структура двухструйной электрической дуги сильно зависит от расхода газа и силы тока, величины которых определяют соотношение между эффектами газодинамического соударения и электромагнитного отталкивания струй. Однако не менее интересным остается построение более простых моделей, качественно описывающих взаимодействие токоведущих плазменных струй. Так, роль электромагнитного отталкивания в формировании траектории струй продемонстрирована еще в [2], где система двумерных МГД уравнений в частных производных на основе упрощающих модельных допущений сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющих рассчитать траектории двух токонеzáвисимых плазменных струй без учета перетекания тока между ними. Сопоставление в [2] расчетных и экспериментально измеренных траекторий показало их удовлетворительное согласование. С целью улучшить соответствие расчета и эксперимента в [5] дополнительно учитывается сила Архимеда, влияние которой заметно в ограниченном диапазоне значений



расхода газа и силы тока. Более детальный анализ развитого в [2] подхода к расчету траекторий струй в двухструйной электрической дуге показывает возможность отказа от сильного упрощающего допущения о постоянстве скорости (потока импульса) струй.

Поэтому цель данной работы: обобщить модель [2] взаимодействия токоведущих плазменных струй в двухструйной электрической дуге посредством учета изменения потока импульса струй и провести анализ влияния расстояния и угла между соплами в двухструйном плазматроне на траектории струй.

## 1. Модель

При математическом описании взаимодействия струй, как и в [2], нами полагается, что плотность тока  $\vec{j}$  в струе определяется как

$$\vec{j} = \frac{I}{S_0} \frac{\vec{v}}{v}, \quad (1)$$

где  $I$  – сила тока;  $\vec{v}$  – вектор скорости струи;  $S_0$  – нормальное к вектору скорости сечение струи.

В отличие от [2] поток импульса струи с плотностью  $\rho$

$$\vec{K} = \frac{\vec{v}}{v} \int_S \rho v^2 dS \approx \rho v^2 S_0 \frac{\vec{v}}{v} \quad (2)$$

считается не постоянным, а изменяющимся вдоль струи за счет действия направленной против скорости струи диссипативной силы с объемной плотностью:

$$\vec{f}_d = -\rho \gamma v^n \frac{\vec{v}}{v}, \quad (3)$$

где коэффициент пропорциональности  $\gamma$  и показатель степени  $n$  заданы. Природа диссипативной силы может быть обусловлена трением струи о неподвижную атмосферу, в которую вытекает струя.

Движение плазмы вдоль струй, поперечные размеры которых существенно меньше расстояния между ними, описывается на основе двумерных МГД уравнений [1], в которых пренебрегается градиентом давления, а электромагнитная  $\vec{j} \times \vec{B}$  и диссипативная  $\vec{f}_d$  силы учитываются в приближениях (1) и (3) соответственно. Для струи в плоскости  $(x, z)$  катодного и анодного сопел (рис. 1) уравнения движения тогда имеют вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{I v_z B}{S \rho v} - \gamma v^{n-1} v_x, \quad (4)$$

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = +\frac{I v_x B}{S \rho v} - \gamma v^{n-1} v_z, \quad (5)$$

где  $B$  – нормальная к плоскости  $(x, z)$  индукция магнитного поля, создаваемого второй струей;  $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$  – модуль скорости.

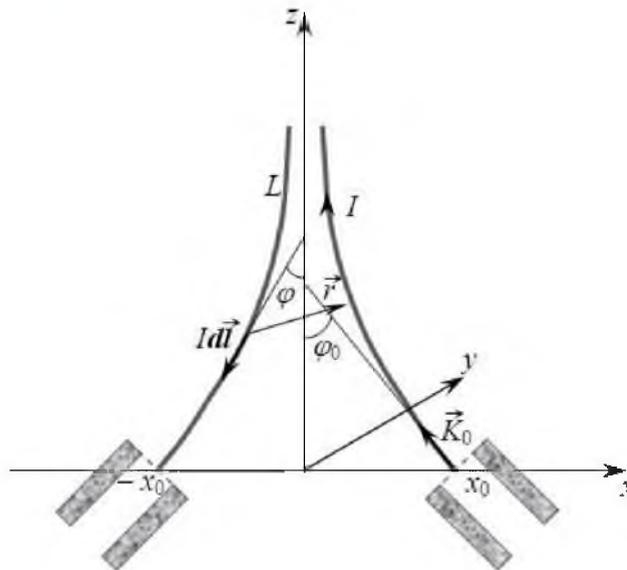


Рис. 1. Схема двухструйной электрической дуги.

В системе (4 – 5) последнее уравнение заменяется суммой уравнений, предварительно умноженных на  $v_x$  и  $v_z$  соответственно:

$$v_x \frac{\partial v^2}{\partial x} + v_z \frac{\partial v^2}{\partial z} = -2\gamma v^{n+1}. \quad (6)$$

После подстановки  $v_x = v \sin \varphi$ ,  $v_z = v \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между вектором скорости и положительным направлением вертикальной оси  $z$  (рис. 1), уравнения (4, 6) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{IB}{\rho v^2 S}, \\ \sin \varphi \frac{\partial v^2}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial v^2}{\partial z} &= -2\gamma v^n. \end{aligned}$$

Структура этих уравнений с учетом (2) определяет наиболее удобный выбор в зависимости (3) показателя степени равным  $n = 2$ . Это позволяет в качестве внешних параметров модели ограничиться только двумя интегральными характеристиками струй — силой тока  $I$  и потоком импульса  $\vec{K}$  струи в выходном сечении электродного сопла:

$$\begin{aligned} \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{IB}{K}, \\ \sin \varphi \frac{\partial K}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial K}{\partial z} &= -2\gamma K. \end{aligned}$$



С учетом геометрического соотношения  $dx/dz = \operatorname{tg} \varphi$  и имеющего здесь место операторного тождества  $\partial/\partial z = \operatorname{tg} \varphi \partial/\partial x$  последние уравнения преобразуются к виду:

$$\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{IB}{2K},$$

$$\sin \varphi \frac{\partial K}{\partial x} = -\gamma K.$$

Выбирая  $\varphi$  в качестве независимой переменной, окончательно получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения траектории одной струи в магнитном поле другой:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{2K}{IB} \sin \varphi, \quad (7)$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{2K}{IB} \cos \varphi, \quad (8)$$

$$\frac{dK}{d\varphi} = +\frac{2\gamma}{IB} K^2. \quad (9)$$

При  $\gamma = 0$  из (9) следует, что  $K = \operatorname{const}$ , а оставшиеся уравнения с неизменным вдоль струи потоком импульса совпадают с соответствующими уравнениями модели [2].

Индукция магнитного поля, создаваемого второй струей, определяется согласно закону Био–Савара:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (10)$$

где  $L$  — траектория струи, вдоль которой проводится интегрирование;  $Id\vec{l}$  — линейный элемент тока струи;  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки определения поля  $\vec{B}$  относительно элемента тока (рис. 1);  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

Система уравнений (7–10) дополняется начальными условиями, задающими вектор потока импульса струи в выходном сечении электродного сопла:

$$(11) \quad \varphi = \varphi_0; \quad x = x_0; \quad z = 0; \quad K = K_0,$$

где  $2\varphi_0$  — начальный угол между осями струй;  $2x_0$  — расстояние между центрами катодного и анодного сопел;  $K_0$  — модуль потока импульса в выходном сечении электродного сопла (рис. 1).

Система уравнений (7–10) с начальными условиями (11) решается численно. Поскольку траектория  $L$  второй струи в (10) является зеркально симметричной относительно  $x = 0$  искомой траектории первой струи, то используется итерационная процедура. На первой итерации задается магнитное поле бесконечного прямолинейного тока вдоль оси  $z$ , на последующих — поле (10), соответствующее рассчитанной траектории



струи. На каждой итерации система обыкновенных дифференциальных уравнений (7 – 9) решается методом Рунге–Кутты с заданной точностью. Верхний предел интегрирования в (10) выбирается соответствующим значением  $\varphi = 0$ , где струя считается обес- точенной. Итерации повторяются до установления траектории струи с относительной погрешностью  $10^{-3}$ .

## 2. Результаты расчета

Проводится расчет траекторий струй для фиксированных величин силы тока  $I = 105 \text{ A}$  и суммарного, в обеих струях, расхода газа  $G = 0.12 \text{ г/с}$ . Соответствующее им значение потока импульса  $K_0 = 4.7 \text{ мН}$  струй заимствуется из [2], где оно определяется по измеренному распределению температуры и скорости плазмы вблизи среза сопла плазмотрона. Начальные расстояние  $2x_0$  и угол  $2\varphi_0$  между струями варьируются. Ин- тегрирование по независимой переменной  $\varphi$  ведется от  $\varphi_0$  до 0.

Выбор значения свободного параметра  $\gamma = 50 \text{ м}^{-1}$  модели осуществляется a posteriori – путем подбора для согласования расчетной траектории струй с экспериментально измеренным в [2] полем температуры. Рассчитанные траектории струй с учетом из- менения потока импульса представлены на рис. 2. Для сравнения там же приведены траектории струй, рассчитанные в [2] при  $\gamma = 0$ .

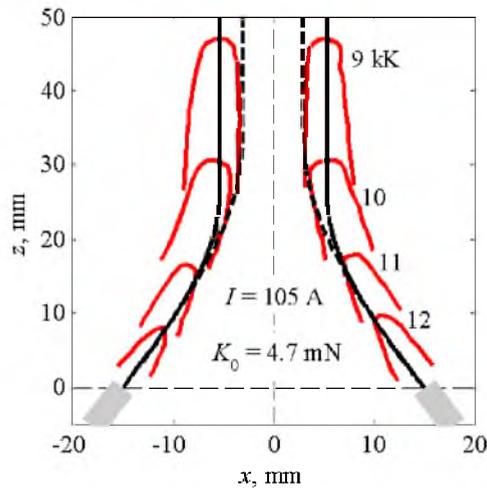


Рис. 2. Траектории плазменных струй с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктирные) изменения потока импульса и экспериментальное поле температуры в двухструйном плазмотроне [2].

**Влияние начального расстояния между струями.** Результаты расчета траекторий струй в зависимости от начального расстояния  $2x_0$  между ними приведены на рис. 3.

Видно, что в приближении  $K = K_0(\gamma = 0)$  траектория струи, ее безразмерная кри- визна  $kx_0$  и совпадающее с ней нормальное ускорение  $(K/K_0)kx_0$  вообще не зависят

от  $x_0$ . При учете уменьшения плотности потока импульса ( $\gamma \neq 0$ ) с ростом расстояния между соплами безразмерная длина струй уменьшается, кривизна  $kx_0$  увеличивается, а нормальное ускорение  $(K/K_0)kx_0$  наоборот уменьшается.

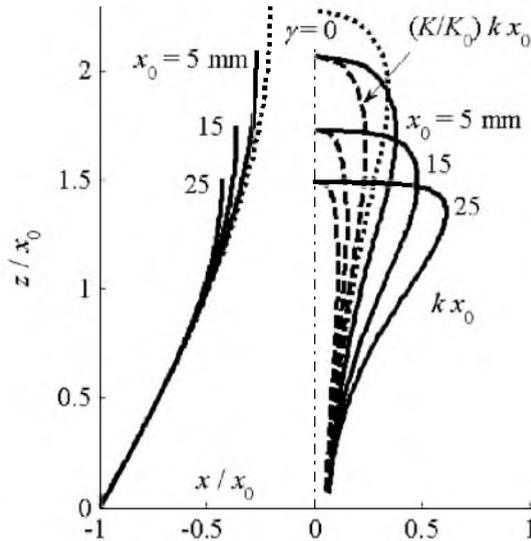


Рис. 3. Траектории плазменных струй (слева), безразмерная кривизна  $kx_0$  и нормальное ускорение  $(K/K_0)kx_0$  (сплошные и пунктирные линии справа соответственно) в зависимости от начального расстояния  $2x_0$  между струями при  $I = 105$  А,  $K_0 = 4.7$  мН,  $\varphi_0 = 30^\circ$ ,  $\gamma = 50$  м $^{-1}$  (точечные линии – расчет при  $\gamma = 0$ ).

Для объяснения этих нетривиальных результатов преобразуем уравнения системы (7 – 9) с учетом (10) к безразмерному виду:

$$\frac{d(x/x_0)}{d\varphi} = -\frac{2K_0}{\mu_0 I^2} \frac{K/K_0}{B/(\mu_0 I/x_0)} \sin \varphi,$$

$$\frac{d(z/x_0)}{d\varphi} = -\frac{2K_0}{\mu_0 I^2} \frac{K/K_0}{B/(\mu_0 I/x_0)} \cos \varphi,$$

$$\frac{d(K/K_0)}{d\varphi} = +\frac{2\gamma x_0 K_0}{\mu_0 I^2} \frac{K/K_0}{B/(\mu_0 I/x_0)}.$$

Видно, что в первых двух уравнениях критерий подобия  $2K_0/\mu_0 I^2$  не содержит  $x_0$ . Поэтому в приближении  $K = K_0$  ( $\gamma = 0$ ) при фиксированных значениях плотности потока импульса  $K_0$  и силы тока  $I$  траектория струи в системе координат, нормированных на  $x_0$ , оказывается независимой от  $x_0$ . Физически это обусловлено инвариантностью комплекса  $Bx_0$  относительно  $x_0$ , имеющей место из-за компенсации увеличения и уменьшения магнитного поля, связанных с ростом длин токовых струй и увеличением расстояния между ними соответственно (рост длины токовой струи с увеличением  $x_0$

на рис. 3 визуально завуалирован: размерные длины струй оказываются равными  $L = 13; 38$  и  $62$  мм при  $\gamma = 0$  и  $L = 11; 28$  и  $41$  мм при  $\gamma = 50 \text{ м}^{-1}$  для  $x_0 = 5; 15$  и  $25$  мм соответственно). Тогда при уменьшении потока импульса ( $\gamma \neq 0$ ), скорость которого пропорциональна  $x_0$ , роль электромагнитного отталкивания в самосогласованном формировании траектории струй возрастает при увеличении  $x_0$ .

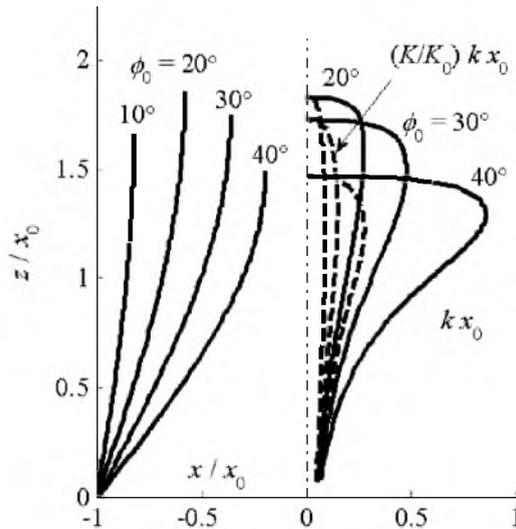


Рис. 4. Траектории плазменных струй (слева), безразмерная кривизна  $kx_0$  и нормальное ускорение  $(K/K_0)kx_0$  (сплошные и пунктирные линии справа соответственно) в зависимости от начального угла  $2\varphi_0$  между струями при  $I = 105 \text{ А}$ ,  $K_0 = 4.7 \text{ мН}$ ,  $x_0 = 15 \text{ мм}$ ,  $\gamma = 50 \text{ м}^{-1}$ .

**Влияние начального угла между струями.** Изменение траекторий струй в зависимости от начального угла  $2\varphi_0$  между ними показано на рис. 4.

Видно, что зависимость безразмерной, а, следовательно, при фиксированном  $x_0$  и размерной длины струи от  $\varphi_0$  слабо немонотонная с максимумом при  $\varphi_0 \approx 25^\circ$ . В то же время безразмерная кривизна  $kx_0$  и нормальное ускорение  $(K/K_0)kx_0$  монотонно возрастают с увеличением  $\varphi_0$ . Это обусловлено тем, что в рассматриваемой модели при любом  $\varphi_0$  из открытого интервала  $(0, 90^\circ)$ , даже сколь угодно близком к  $90^\circ$ , электромагнитная сила всегда обеспечит поворот траекторий сближающихся к оси  $x = 0$  струй. Однако в предельном случае встречных струй ( $\varphi_0 = 90^\circ$ ), образующих «прямую» дугу тока, кривизна равна нулю из-за отсутствия при такой ориентации электромагнитного взаимодействия струй. Здесь модель становится заведомо неприменимой, т.к. не учитывает влияния градиента газостатического давления, обеспечивающего торможение и отражение струй. Поэтому следует ожидать, что роль электромагнитного отталкивания в зависимости от начального угла между струями будет немонотонной.

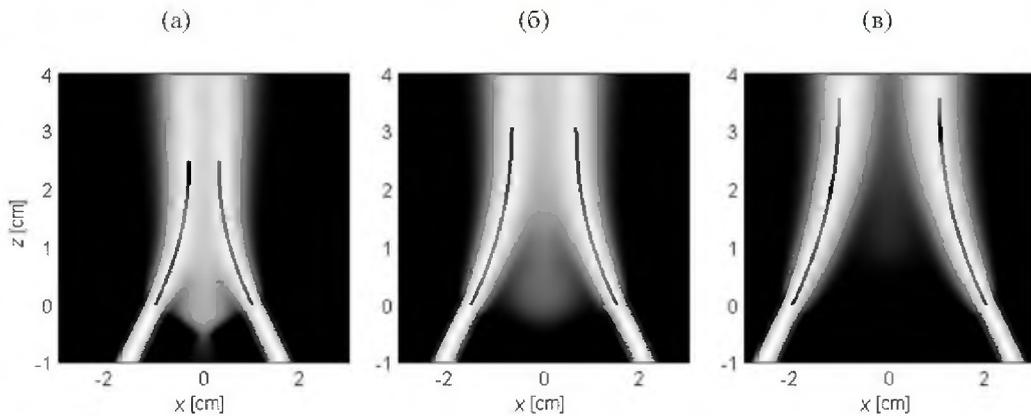


Рис. 5. Конфигурация и траектории плазменных плоскопараллельных струй в зависимости от начального расстояния  $2x_0 = 2$  (а); 3 (б); 4 (в) см между ними при  $I_l = 4$  А/мм,  $K_{0l} = 0.12$  Н/м,  $2\varphi_0 = 60^\circ$ ;  $\gamma = 0$ .

**Влияние пространственной размерности струй.** Траектории плоскопараллельных плазменных струй – линии сечений плоскостью  $(x, z)$  искривленных токовых поверхностей, определяются системой уравнений (7 – 9), в которой величины силы тока  $I$  и потока импульса  $K_0$  заменяются их погонными значениями  $I_l$  и  $K_{0l}$ , а индукция  $B$  магнитного поля, создаваемого плоскопараллельным поверхностным током, вычисляется по формуле Био–Савара (10), проинтегрированной вдоль оси  $y$  (рис. 1) по системе линейных токов  $I_l dy$  – токовых полосок шириной  $dy$ , составляющих искривленную токовую поверхность:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_l}{2\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}. \quad (12)$$

Видно, что комплекс  $Bx_0$  не инвариантен относительно  $x_0$ , т.к. интеграл в (12) безразмерен (размерность длины уже «сидит» в погонном токе  $I_l$ ). Поэтому траектория плоскопараллельной струи в системе нормированных на  $x_0$  координат зависит от  $x_0$ , в отличие от трехмерной струи. Поскольку увеличение магнитного поля за счет роста длин плоскопараллельных струй превалирует над уменьшением  $B$  из-за увеличения расстояния между струями, то роль электромагнитного отталкивания в самосогласованном формировании траектории плоскопараллельных струй возрастает даже при  $\gamma = 0$ . Изменение траекторий плоскопараллельных струй в зависимости от начального угла  $2\varphi_0$  между ними аналогично выше рассмотренному для трехмерных струй.

Приемлемость рассмотренного подхода для качественного анализа взаимодействия струй в двухструйной электрической дуге подтверждается сопоставлением рассчитанных траекторий струй с результатами счета [3 – 4] на основе самосогласованной двумерной МГД модели в плоскопараллельном приближении. Видно (рис. 5), что соответствие между результатами предложенной нами моделью и численным расчетом в



рамках МГД модели в зависимости конфигурации плазменных струй от начального расстояния между ними вполне удовлетворительное.

### 3. Выводы

1. Сформулирована модель взаимодействия токоведущих плазменных струй в двухструйной электрической дуге, учитывающая электромагнитное взаимодействие и изменение потока импульса струй вследствие трения с окружающей средой. Учет уменьшения потока импульса позволяет улучшить согласование расчетных траекторий струй с опытными данными.

2. Установлено возрастание роли электромагнитного отталкивания в самосогласованном формировании траектории трехмерных и плоскопараллельных струй при увеличении начального расстояния или угла между струями.

3. Показано соответствие рассчитанных траекторий струй с результатами счета на основе самосогласованной МГД модели в плоскопараллельном приближении.

### Литература

1. Энгельшт В.С., Гурович В.Ц., Десятков Г.А. и др. Теория столба электрической дуги / Низкотемпературная плазма. Т.1. / Новосибирск: Наука СО, 1990. – 376 с.
2. Жеенбаев Ж., Энгельшт В.С. Двухструйный плазмотрон / Фрунзе: Ин-т физики и математики АН Кирг. ССР, 1983. – 199 с.
3. Кулумбаев Э.Б., Никуличева Т.Б. Взаимодействие плазменных струй в двухструйной электрической дуге // ТВТ. – 2012. – 50; 4. – С.483-490.
4. Кулумбаев Э.Б., Никуличева Т.Б. Влияние расхода газа и силы тока на конфигурацию плазменных струй в двухструйной электрической дуге // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – №11(130). – Вып.27. – С.
5. Кулумбаев Э.Б. Взаимодействие плазменных токоведущих струй / Источники и ускорители плазмы. – Харьков: ХАИ, 1986. – 4 с.

### TRAJECTORIES CALCULATION OF PLASMA JET IN TWO-JET ELECTRIC ARC

E.B. Kulumbaev, T.B. Nikulicheva

Belgorod State University,  
Studencheskaya St., 14, Belgorod 308015, Russia,  
e-mail: [kulumbaev@bsu.edu.ru](mailto:kulumbaev@bsu.edu.ru), [nikulicheva@bsu.edu.ru](mailto:nikulicheva@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The interaction model of current plasma jets in two-jet electric arc is generalized in order to account of flux momentum change in jets. It improves the coordination of design configuration of jets with experimental data. It is performed some calculation results of trajectories in cases when plasma jets may be represent as three-dimensional or plane ones. They depend on the distance between nozzles in the two-jet plasmatron and on the angle between them. It is found that the role of electromagnetic repulsion in comparison with gas-dynamic collision at self-consistent formation of jets trajectory is increased when the initial distance or angle between jets grow. Comparison of jets trajectories with results of calculation based on the self-consistent magnetogasdynamic model at the plane-parallel approximation is done.

**Key words:** mathematical modelling, MHD equations, electric arc.