УДК 512.572

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ ЛЕЙБНИЦА

О.И. Череватенко

Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова,
пл. 100-летия рождения В.И. Ленина, 4, Ульяновск, 432700, Россия, e-mail: chai@pisem.net

Аннотация. В работе приведены эквивалентные условия нильпотентности многообразий алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики. Показано, что существует только два почти нильпотентных многообразия алгебр Лейбница.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, многообразие алгебр, нильпотентные алгебры.

Характеристика основного поля K предполагается равной нулю.

Алгебра Лейбница над полем $K-$ неассоциативная алгебра, которая определяется тождеством Лейбница

$$xyz \equiv xzy + x(yz)\,,$$

которое превращает правое умножение в дифференцирование этой алгебры. При этом заметим, что если в алгебре Лейбница выполняется тождество $x^2 \equiv 0$, то она является алгеброй Ли. Таким образом, любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница.

Заметим, что из тождества Лейбница следует тождество $x(yy) \equiv 0$.

Пусть V — многообразие алгебр Лейбница (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографии [1]). Обозначим через $K(X,V)$ относительно свободную алгебру данного многообразия, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих. В случае основного поля нулевой характеристики вся информация о многообразии V содержится в его полилинейных компонентах $P_n(V)$, $n = 1, 2, ...$, где $P_n(V)$ это линейное подпространство в пространстве $K(X,V)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$. Асимптотическое поведение последовательности $c_n(V) = \dim\ P_n(V)$, $n = 1, 2, ...$, определяет рост многообразия V.

Договоримся в элементах опускать скобки при их левонормированной расстановке, то есть $(((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\dots x_{i_n}) = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$.

Также будем использовать стандартное сокращение xy^k для обозначения левонормированного произведения $xy\dots y$, в котором y встречается k раз.

В работе [2] Е.И. Зельманов доказал, что любая энгелева алгебра Ли является нильпотентной. В работе [3] Ю.Ю. Фролова обобщила данный результат на случай алгебр Лейбница:

Теорема 1 ([3]). *Если характеристика основного поля равна нулю, то энгелева алгебра Лейбница является нильпотентной.*

Обозначим через A^2 метабелево многообразие алгебр Ли, которое определяется тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0 \, .$$

Приведем хорошо известные факты касательно многообразия A^2.

Предложение 1. *Для многообразия A^2 верны следующие утверждения.*

(i) Базис полилинейной компоненты $P_n(A^2)$ состоит из элементов вида

$$x_n x_i x_1 ... \widehat{x}_i ... x_{n-1} \, , \quad i = 1 \, , ..., n-1 \, ,$$

где знак $\widehat{\ }$ над элементом означает, что этот элемент опущен, причем для любого натурального $n \geq 2$ верно равенство $c_n(A^2) = n-1$.

(ii) Многообразие A^2 является почти нильпотентным.

(iii) Произвольное многообразие алгебр Ли V является нильпотентным тогда и только тогда, когда $A^2 \not\subseteq V$.

Обозначим через B многообразие алгебр Лейбница, которое определяется тождеством

$$x(yz) \equiv 0 \, .$$

Сформулируем также хорошо известные факты о многообразии B.

Предложение 2. *Для многообразия B верны следующие утверждения.*

(i) Базис полилинейной компоненты $P_n(B)$ состоит из элементов вида

$$x_i x_1 ... \widehat{x}_i ... x_n , \quad i = 1 \, , ..., n \, ,$$

причем для любого натурального n выполнено равенство $c_n(B) = n$.

(ii) Многообразие B является почти нильпотентным.

В работе [4] показано, что произвольное многообразие алгебр Лейбница V нильпотентно тогда и только тогда, когда многообразие V разрешимо и выполнено условие $B, A^2 \not\subseteq V$. В данной работе мы усилим это утверждение, а именно, откажемся от условия разрешимости.

Обозначим через Y_i оператор правого умножения на элемент y_i :
$xY_i = xy_i$, $x(Y_iY_j) = (xy_i)y_j$.

Лемма 1. *Пусть в многообразии алгебр Лейбница V для некоторого натурального n выполнено тождество*

$$xxf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0 \tag{40}$$

где f — многочлен от внутренних дифференцирований. Тогда для любого $m \geq 0$ в V будет выполнено тождество

$$xxz_1z_2...z_mf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0 \, . \tag{41}$$

□ Доказательство проведем методом математической индукции. Пусть $m = 1$. Из тождества (40) следует, что

$$xyf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) + yxf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0.$$

Заменим $x \to (xx)$, а $y \to z_1$, тогда получим:

$$xxz_1f(Y_1, Y_2, ..., Y_n) + z_1(xx)f(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0\,.$$

Второе слагаемое суммы является тождеством в любой алгебре Лейбница, поэтому база индукции проверена.

Предположим, что в V для некоторого k выполнено тождество

$$xxz_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0\,.$$

тогда следствием данного тождества будет

$$xyz_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) + yxz_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0\,.$$

Опять же заменим $x \to (xx)$, а $y \to z_0$, тогда получим:

$$xxz_0z_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) + z_0(xx)z_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0.$$

При этом второе слагаемое суммы является тождеством в алгебрах Лейбница. ■

Лемма 2. *Пусть V - некоторое многообразие алгебр Лейбница и пусть $B \not\subseteq V$. Тогда для некоторого числа n в V выполнено тождество $xxy^n \equiv 0$.*

□ Так как $B \not\subseteq V$, то, учитывая предложение 2, для некоторого n в V выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i x_1 ... \widehat{x_i} ... x_n + \sum ... A_i(B_jC_k) ... \equiv 0, \qquad (42)$$

где не все α_i равны нулю, при этом второе слагаемое является следствием определяющего многообразие B тождества $x(yz) \equiv 0$, и A_i, B_j, C_k- некоторые непустые слова свободной алгебры Лейбница.

Пусть $\alpha_i \neq 0$. Заменим

$$x_i \to (xx), \qquad x_1, x_2, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n \to y.$$

При такой подстановке, с учетом тождества $x(yy) \equiv 0$, которое выполняется в любой алгебре Лейбница, из тождества (42) будет следовать тождество $\alpha_i(xx)y^{n-1} \equiv 0$. Таким образом, получаем, что в многообразии V выполнено тождество $xxy^n \equiv 0$. ■

Теорема 2. *Пусть V - некоторое многообразие алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) многообразие V нильпотентно;

(ii) $B, A^2 \not\subseteq V$.

$\square$ Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из предложений 1 и 2.

Пусть выполнено условие (ii). Так как $B \not\subseteq V$, то в многообразии V для любого $m \geq 0$ выполнено тождество $xxz_1z_2...z_my^n \equiv 0$ (леммы 1 и 2).

Так как $A^2 \not\subseteq V$, то, учитывая предложение 1, для некоторого m в V выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_m x_i x_1 ... \widehat{x_i} ... x_{m-1} + \sum ...(A_iB_j)(C_kD_g)...+ \tag{43}$$

$$+\sum (...(E_sE_t)... + ...(E_tE_s)...) \equiv 0,$$

где не все α_i равны нулю, при этом второе слагаемое является следствием определяющего многообразие A^2 тождества $(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0$, а третье слагаемое является следствием тождества $x^2 \equiv 0$, и $A_i, B_j, C_k, D_g, E_s, E_t-$ некоторые непустые слова свободной алгебры Лейбница.

Следствием тождества (43) является тождество

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_m x_i x_1 ... \widehat{x_i} ... x_{m-1} y^n + \sum ...(A_iB_j)(C_kD_g)...y^n+ \tag{44}$$

$$+\sum (...(E_sE_t)... + ...(E_tE_s)...)\, y^n \equiv 0,$$

где число n берется из леммы 2. Пусть $\alpha_i \neq 0$. Заменим

$$x_i \to x, \qquad x_1, x_2, ..., \widehat{x_i}, ..., x_m \to z.$$

После такой подстановки, с учетом тождеств $x(yy) \equiv 0$ и $xxz_1z_2...z_my^n \equiv 0$, из тождества (44) будет следовать тождество $zxz^{m-2}y^n \equiv 0$. Таким образом, получаем, что в многообразии V выполнено тождество $xy^t \equiv 0$ для некоторого t. Поэтому, с учетом теоремы 1, из условия (ii) следует (i). Теорема доказана.

Приведенная выше теорема позволяет получить следующее

Следствие. *В случае нулевой характеристики основного поля существуют только два почти нильпотентных многообразия: B и A^2.*

Литература

1. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли /М.: Наука, 1985.
2. Зельманов Е.И. Об энгелевых алгебрах Ли // Сиб. матем. журнал. – 1988. – 29;5. – С.112-117.
3. Фролова Ю.Ю. О нильпотентности энгелевой алгебры Лейбница // Вестник Московского университетата. Серия 1, Математика. Механика. – 2011. – №3. – С.63-65.
4. Череватенко О.И. Некоторые эффекты роста тождеств линейных алгебр // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Ульяновск. УлГУ, 2008.

ON NILPOTENT LEIBNITZ ALGEBRAS

O.I. Cherevatenko

Ulyanovsk State I.N.Ulyanov Pedagogical University,
100th rozhdeniya V.I. Lenina pl., 4, Ulyanovsk, 432700, Russia, e-mail: chai@pisem.net

Abstract. Equivalent conditions of nilpotent property of Leibniz algebras manifolds over the field with zero characteristics are proposed. It is shown also that there are only two almost nilpotent manifolds of Leibniz's algebras.

Key words: Leibniz algebras, manifold of algebras, nilpotent algebras.