УДК 517.958, 517.986.7

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛАРДА С ВЯЗКОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ВСЕЙ ОСИ

Х.Г. Умаров

Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32, Грозный, 364907, Россия, e-mail: umarov50@mail.ru

Аннотация. Для одномерного уравнения в частных производных, моделирующего эволюцию распределения концентрации одной из двух компонент бинарной вязкой смеси, исследуется разрешимость задачи Коши посредством сведения ее к абстрактной задаче Коши в банаховом пространстве.

Ключевые слова: уравнение Кана–Хилларда с вязкостью, сильно непрерывные полугруппы операторов.

Введение. Уравнение Кана-Хилларда с вязкостью (см., например, [1] и приведенную там библиографию) возникает при моделировании динамики кристаллизации в многокомпонентных сплавах с учетом вязкости:

$$v_t = -(bv_{xx} + \mathcal{P}(v) - av_t)_{xx}, \quad x \in R^1, \quad t > 0,$$

где a, b — известные положительные параметры, $\mathcal{P}(\cdot)$ — заданная достаточно гладкая функция. В приложениях часто $\mathcal{P}(s) = s - s^3$, поэтому в качестве модельного рассмотрим нелинейное уравнение

$$v_t = \left(v^3 - v - bv_{xx} + av_t\right)_{xx}, \quad x \in R^1, \quad t > 0\,. \tag{1}$$

Уравнение (1) является псевдопараболическим уравнением соболевского типа не разрешенным относительно производной по временной переменной t.

Будем предполагать, что начальная функция φ задачи Коши, определяемая как

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R^1, \tag{2}$$

и искомое классическое решение $v = v(x,t)$, $(x,t) \in R^1 \times \overline{R}^1_+$, $\overline{R}^1_+ = [0,+\infty[$ уравнения (1) для всех значений временной переменной $t \in \overline{R}^1_+$, по пространственной переменной $x \in R^1$, принадлежат банахову пространству $C[-\infty,+\infty] \equiv C[R^1]$ непрерывных функций $\psi = \psi(x)$, для которых существуют пределы при $x \to \pm\infty$, и норма которого определяется по формуле $\|\psi(x)\|_{C[R^1]} = \sup_{x\in R^1} |\psi(x)|$.

В пространстве $C[R^1]$ дифференциальный оператор d^2/dx^2, с областью определения $\mathcal{D}\left(d^2/dx^2\right) = \{\psi(x) \in C[R^1]\colon \psi'(x), \ \ \psi''(x) \in C[R^1]\}$, порождает сжимающую сильно непрерывную полугруппу $U\left(t; d^2/dx^2\right)$, $t \geq 0$, класса C_0, представляющуюся сингулярным интегралом [2, с. 681-682], [3, с. 58]:

$$U\left(t; \frac{d^2}{dx^2}\right)\ \psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) \psi(\xi)\, d\xi\,, \quad t \geq 0\,. \tag{3}$$

Положительная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора d^2/dx^2 и для резольвенты $\left(\lambda I - d^2/dx^2\right)^{-1}$, где $\lambda > 0$, I — тождественный оператор, справедлива [2, с. 681] оценка

$$\lambda \left\| \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \right\| \leq 1 \tag{4}$$

и представление [2, с. 682, с. 664] степеней резольвенты $\left(\lambda I - d^2/dx^2\right)^{-k}$, $k = 1, 2, \cdots$ через полугруппу $U\left(t; d^2/dx^2\right)$:

$$\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} s^{k-1} \exp(-\lambda s)\, U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) ds\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{5}$$

Наша цель — найти временной промежуток существования классического решения $v = v(x,t)$ задачи Коши для уравнения (1) в пространстве $C\left[R^1\right]$ и оценить норму решения $v = v(x,t)$ на этом промежутке.

Задача Коши для уравнения Кана-Хилларда. Представим уравнение (1) в виде

$$\left(I - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v_t = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I\right) v + \frac{\partial^2}{\partial x^2} v^3\,, \tag{6}$$

и, воспользовавшись наличием в точке $\lambda = 1$ резольвенты дифференциального оператора ad^2/dx^2, $a > 0$ в банаховом пространстве $C\left[R^1\right]$, применим к обеим частям уравнения (6) линейный ограниченный оператор $\left(I - ad^2/dx^2\right)^{-1}$. Тогда получим эквивалентное (6) уравнение [4, с. 35], которое можно записать в виде абстрактного полулинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$V_t = \mathcal{A}V + F(V)\,, \quad t > 0\,, \tag{7}$$

где $V = V(t) : t > v(x,t)$ — искомая абстрактная функция, определенная для $t \geq 0$ и со значениями в банаховом пространстве $C\left[R^1\right]$; $\mathcal{A}$ — операторный коэффициент:

$$\mathcal{A} = -\left(I - a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2}{dx^2} + I\right);$$

$F(\cdot)$ — заданный нелинейный оператор, действующий в $C\left[R^1\right]$.

Линейный оператор $\mathcal{A}$ определен на функциях $\psi(x) \in C\left[R^1\right]$, для которых существуют производные $d^k\psi(x)/dx^k$, $k = \overline{1,4}$, принадлежащие пространству $C\left[R^1\right]$, и его можно продолжить до оператора

$$A + B\,, \quad A = \frac{b}{a}\frac{d^2}{dx^2}\,, \quad B = \frac{a+b}{a^2}\left[I - \left(I - a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right],$$

с областью определения $\mathcal{D}(A+B)=\mathcal{D}\left(d^2/dx^2\right)$.

Нелинейный оператор $F(\cdot)$ из правой части уравнения (7) представляется в виде

$$F(\psi)=\left(I-a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{F}(\psi)=-\frac{a}{a+b}B\mathcal{F}(\psi)\,,$$

где $\mathcal{F}$ — оператор суперпозиции, действующий в пространстве $C\left[R^1\right]$:

$$\mathcal{F}(\psi)=f(\psi(x))\,,\quad \psi(x)\in C\left[R^1\right],$$

здесь $f(s)=s^3$.

Отметим, что:

1) так как функции $f(s)$ и $f_s(s)$ непрерывны, то [5, с. 406] оператор суперпозиции $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируем и его производная в точке $\psi_0(x)\in C\left[R^1\right]$ определяется равенством $\mathcal{F}'(\psi_0)$=3 $\psi_0^2(x)$;

2) из непрерывной дифференцируемости нелинейного оператора $\mathcal{F}$ и ограниченности линейного оператора B следует [7, с. 200] непрерывная дифференцируемость нелинейного оператора F в пространстве $C\left[R^1\right]$ и формула $F'(\psi_0)=-aB\mathcal{F}'(\psi_0)/(a+b)$.

Таким образом, приходим к абстрактному полулинейному дифференциальному уравнению обобщающему уравнение (7) в банаховом пространстве $C\left[R^1\right]$:

$$V_t=(A+B)V+F(V)\,,\quad t>0\,. \tag{8}$$

Начальное условие (2) в $C\left[R^1\right]$ перепишется в виде

$$V|_{t=0}=\Phi\,, \tag{9}$$

где $\Phi=\varphi(x)$ — элемент пространства $C\left[R^1\right]$.

Оператор

$$A=\frac{b}{a}\frac{d^2}{dx^2}\,,\quad \mathcal{D}(A)=\mathcal{D}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right),$$

является производящим оператором сжимающей полугруппы $U(t;A)$ класса C_0, для которой справедливо представление

$$U(t;A)=U\left(t;\frac{b}{a}\frac{d^2}{dx^2}\right)=U\left(\frac{b}{a}t;\frac{d^2}{dx^2}\right). \tag{10}$$

Возмущающий оператор

$$B=\frac{a+b}{a^2}\,I-\frac{a+b}{a^2}\left(I-a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1},\quad \mathcal{D}(B)=C\left[R^1\right]\,,$$

линеен и ограничен на всём пространстве, поэтому является производящим оператором сильно непрерывной группы класса C_0:

$$U(t;B)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\,B^k\,,$$

для которой справедливы представление

$$U\left(t;B\right)= \exp\left(\frac{a+b}{a^2}\ t\right)U\left(-\frac{a+b}{a^2}\ t;\left(I-a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right)=$$

$$=\exp\left(\frac{a+b}{a^2}\ t\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(a+b)^k t^k}{k!a^{2k}}\left(I-a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-k} \tag{11}$$

и оценка нормы

$$\|U\left(t;B\right)\|\leq\exp\left(\frac{a+b}{a^2}t\right)\ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a+b)^k t^k}{k!a^{2k}}\left\|\left(I-a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right\|^k.$$

Следовательно, применяя оценку (4) нормы резольвенты дифференциального оператора d^2/dx^2, выводим оценку нормы полугруппы порождаемой оператором B:

$$\|U\left(t;B\right)\|\leq\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right),\quad t\geq 0.$$

Для произвольного элемента $\psi=\psi\ (x)$ пространства $C\left[R^1\right]$, используя соотношения (5), продолжим преобразование степенного ряда в (11):

$$U\left(t;B\right)\psi=\exp\left(\frac{a+b}{a^2}t\right)\left[\psi+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k(a+b)^k t^k}{(k-1)!k!a^{2k}}\int_0^{+\infty}s^{k-1}\exp\left(-s\right)U\left(as;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi ds\right].$$

Откуда получаем представление полугруппы $U\left(t;B\right)$ через полугруппу (3):

$$U\left(t;B\right)\psi=\exp\left(\frac{a+b}{a^2}\ t\right)\times$$

$$\times\left[\psi-\frac{\sqrt{(a+b)\,t}}{a}\int_0^{+\infty}\exp\left(-s\right)J_1\left(2\,\frac{\sqrt{(a+b)\,st}}{a}\right)U\left(as;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\right], \tag{12}$$

в котором

$$J_1\left(z\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!}(z/2)^{2k+1}$$

— функции Бесселя.

Из полученных представлений (10) и (12) соответственно полугрупп $U\left(t;A\right)$ и $U\left(t;B\right)$ через полугруппу (3), порождаемую оператором d^2/dx^2, следует их коммутирование.

При возмущении производящего оператора A полугруппы $U\left(t;A\right)$ класса C_0 линейным ограниченным оператором B, оператор $A+B$ с областью определения $\mathcal{D}\left(A+B\right)=\mathcal{D}\left(A\right)$ также порождает [2, с. 672] полугруппу $U\left(t;A+B\right)$ класса C_0. При этом возмущённая полугруппа определяется для произвольного элемента ψ банахова пространства разложением в ряд:

$$U\left(t;A+B\right)\psi=\sum_{k=0}^{+\infty}U_k\left(t\right)\psi\,,\quad t\geq 0\,,$$

где

$$U_0(t)\psi = U(t;A)\psi \quad \text{и} \quad U_k(t)\psi = \int_0^t U(t-s;A)\,BU_{k-1}(s)\,\psi ds\,, \quad k=1,2,\dots\ ,$$

причём ряд абсолютно сходится, равномерно по t в любом конечном интервале положительной полуоси.

В рассматриваемом случае, возмущающий линейный ограниченный оператор B коммутирует с полугруппой, порождаемой возмущаемым оператором A:

$$BU(t;A)\psi = U(t;A)\,B\psi\,,$$

так как этим свойством обладает резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ и полугруппа $U(t;A)$, для любого производящего оператора A сильно непрерывной полугруппы класса C_0. Отсюда следует, что для произвольного элемента ψ пространства $C\left[R^1\right]$ выполняются равенства

$$U_k(t)\,\psi = \frac{t^k}{k!}B^k U(t;A)\,\psi = \frac{t^k}{k!}U(t;A)\,B^k\psi\,, \quad k=1,2,\dots\,,$$

и, значит, справедливо представление

$$U(t;A+B)\,\psi = U(t;A)\,U(t;B)\,\psi = U(t;B)\,U(t;A)\,\psi =$$

$$= \exp\left(\frac{a+b}{a^2}t\right)\left[U\left(\frac{b}{a}t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\ - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{(a+b)\,t}}{a}\int_0^{+\infty}\exp(-s)\,J_1\left(2\frac{\sqrt{(a+b)\,st}}{a}\right)U\left(as+\frac{b}{a}t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\right] \quad (13)$$

и оценка нормы

$$\|U(t;A+B)\| \le \|U(t;A)\|\,\|U(t;B)\| \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right), \quad t \ge 0\,. \quad (14)$$

Итак, в абстрактном уравнении (8) коэффициент $A+B$ является производящим оператором полугруппы (13) класса C_0, а функция $F(\cdot)$ есть непрерывно дифференцируемое отображение из $C\left[R^1\right]$ в $C\left[R^1\right]$.

Из непрерывной дифференцируемости отображения $F(\cdot)$ следует, что для любого числа $r > 0$ и для всех функций $\psi_i = \psi_i\ (x)$, принадлежащих замкнутому шару радиуса r с центром в нуле пространства $C\left[R^1\right]$, $\|\psi_i\|_{C[R^1]} \le r$, $i = 1, 2$, существует постоянная

$$L_r = \sup_{\|\psi\|_{C[R^1]}\le r}\left\|-\frac{a}{a+b}B\mathcal{F}'(\psi)\right\|_{C[R^1]} = \frac{6}{a}\,r^2$$

для которой

$$\|F(\psi_2) - F(\psi_1)\|_{C[R^1]} \le L_r\|\psi_2 - \psi_1\|_{C[R^1]}\ ,$$

т.е. $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому [5, с. 469], [5, с. 185] для любого элемента Φ пространства $C[R^1]$ существует промежуток $[0,t^{**}[\subseteq \overline{R}^1_+$ такой, что задача Коши (8), (9) имеет единственное обобщенное решение $V=V(t)$, $t\in[0,t^{**}[$, т.е. единственное непрерывное решение интегрального уравнения

$$V(t)=U(t;A+B)\Phi+\int_0^t U(t-\tau;A+B)F(V(\tau))d\tau\,. \tag{15}$$

При этом если $t^{**}<+\infty$, то

$$\max_{t\to t^{**}}\|V(t)\|_{C[R^1]}=\infty\,.$$

Это обобщенное решение $V=V(t)$ является единственной неподвижной точкой нелинейного интегрального оператора

$$(HV)(t)=U(t;A+B)\Phi+\int_0^t U(t-\tau;A+B)F(V(\tau))d\tau\,,\quad t\in[0,t^*]\,,\quad t^*<t^{**}, \tag{16}$$

например, в шаре $S_r(0)$ радиуса $r=2\exp\left(2(a+b)/a^2\right)\|\Phi\|_{C[R^1]}$ с центром в нуле банахова пространства $C([0,t^*];C[R^1])$ абстрактных функций $V(t)$, определенных на $[0,t^*]$ со значениями в $C[R^1]$, норма которых в этом пространстве определяется формулой $\|V\|_C=\max_{t\in[0,t^*]}\|V(t)\|_{C[R^1]}$. Тот факт, что нелинейный оператор (15) является оператором сжатия в шаре $S_r(0)$, устанавливается за счет «малости» отрезка $[0,t^*]$:

$$t^*=\min\left\{1;\frac{a}{64\|\Phi\|^2_{C[R^1]}}\exp\left(-6\frac{a+b}{a^2}\right)\right\}. \tag{17}$$

Действительно, для функции $V(t)\in S_r(0)$, $t\in[0,t^*]$, оценивая норму (16), получим

$$\|(HV)(t)\|_{C[R^1]}\le\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}\right)\|\Phi\|_{C[R^1]}+t^*\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}\right)\frac{6}{a}r^3\le$$

$$\le\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}\right)\|\Phi\|_{C[R^1]}+t^*\exp\left(8\frac{a+b}{a^2}\right)\frac{48}{a}\|\Phi\|^3_{C[R^1]}\le r\,.$$

Далее, для V_1, $V_2\in S_r(0)$ имеем

$$\|(HV_2)(t)-(HV_1)(t)\|_{C[R^1]}=\left\|\int_0^t U(t-\tau;A+B)\left[F(V_2(\tau))-F(V_1(\tau))\right]d\tau\right\|_{C[R^1]}\le$$

$$\le t^*\frac{6}{a}\,r^2\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}\right)\|V_2-V_1\|_C\le\frac{3}{8}\,\|V_2-V_1\|_C\,.$$

Итак, если выполнено условие (17), то нелинейный оператор (16) переводит шар $S_r(0)$ в себя и является на $S_r(0)$ сжимающим отображением, а поэтому интегральное уравнение (15) имеет в $S_r(0)$ единственное решение $V(t)$, $t\in[0,t^*]$, которое будет обобщенным уравнением задачи Коши (8), (9). Это решение может быть получено как предел последовательности

$$V_0(t) = U(t; A+B)\,\Phi\,,$$

$$V_i(t) = V_0(t) + \int_0^t U(t-\tau; A+B)\, F(V_{i-1}(\tau))d\tau\,, \quad i = 1, 2, \cdots, \quad t \in [0, t^*]\,,$$

сходящейся в пространстве $C([0,t^*]; C[R^1])$ к обобщенному решению задачи Коши (8), (9) при $i \to +\infty$. Принимая $V(t^*)$ за новое начальное данное обобщенное решение с отрезка $[0,t^*]$ продолжается до $V(t)$, $t \in [0, t^*+\delta] \subseteq [0, t^{**}[$, где величина δ зависит только от нормы начального данного Φ и параметров a, b уравнения Кана-Хилларда с вязкостью (1).

Используя оценку (14) полугруппы $U(t; A+B)$, из интегрального уравнения (15) выводим интегральное неравенство[12]

$$\|V(t)\|_{C[R^1]} \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\|\Phi\|_{C[R^1]} + \frac{2}{a}\int_0^t \exp\left[2\frac{a+b}{a^2}(t-\tau)\right]\|V(\tau)\|^3_{C[R^1]}d\tau\,.$$

Откуда следует [9, с. 13] оценка нормы

$$\|V(t)\|_{C[R^1]} \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\|\Phi\|_{C[R^1]}\times$$

$$\times\left\{\left[1 + \frac{a}{a+b}\|\Phi\|^2_{C[R^1]}\right] - \frac{a}{a+b}\|\Phi\|^2_{C[R^1]}\exp\left(4\frac{a+b}{a^2}t\right)\right\}^{-1/2} \tag{18}$$

на отрезке $[0, t_*] \subseteq [0, t^{**}[$, где

$$t_* = \sup\left\{t \in [0, t^{**}[\ : \frac{a}{a+b}\|\Phi\|^2_{C[R^1]}\left[\exp\left(4\frac{a+b}{a^2}t\right) - 1\right] < 1\right\}. \tag{19}$$

Таким образом, на отрезке $[0, t_*]$, на котором

$$t_* < \frac{a^2}{4(a+b)}\ln\left(1 + \frac{a+b}{a\|\Phi\|^2_{C[R^1]}}\right)$$

существует обобщенное решение задачи Коши (8), (9) для которого справедлива оценка нормы (18) при $t \in [0, t_*]$. Это обобщенное решение $V(t)$, $t \in [0, t_*]$, будет классическим решением [5, с. 127], [5, с. 462] задачи Коши (8), (9), если оно непрерывно дифференцируемо в полуинтервале $]0, t_*]$.

Если начальное данное Φ принадлежит области определения оператора $A+B$, то первое слагаемое в правой части (15) есть решение однородного уравнения, соответствующего (8), и, значит, оно имеет непрерывную производную при $t \ge 0$.

[12] Для элементов банахова пространства $C[R^1]$ справедлива оценка $\|\psi\varphi\|_{C[R^1]} \leqslant \|\psi\|_{C[R^1]}\|\varphi\|_{C[R^1]}$, в силу чего, с ним можно работать как с алгеброй [8, с. 120].

Воспользуемся теперь непрерывной дифференцируемостью нелинейного оператора $F(\cdot)$ из правой части уравнения (8). Для обобщенного решения $V(t)$, $t \in [0, t_*]$ значение производной Фреше $F'(V(t)) = -aB\mathcal{F}'(V(t))/(a+b)$, $t \in [0, t_*]$, есть семейство линейных ограниченных операторов действующих из $C[R^1]$ в $C[R^1]$, причем

$$\|F'(V(t))\| \le L_* = \frac{6}{a} V_*^2 , \quad t \in [0, t_*] , \tag{20}$$

где

$$V_* = \sup_{x \in R^1, t \in [0, t_*]} |v(x,t)| .$$

По определению производной Фреше, обозначая

$$H_h(t) = V(t+h) - V(t) , \quad t \in [0, t_*] ,$$

имеем

$$F(V(t+h)) - F(V(t)) = F(V(t) + H_h(t)) - F(V(t))$$
$$= F'(V(t)) H_h(t) + \omega(V(t), H_h(t)) ,$$

где

$$\lim_{\|H_h(t)\|_{C[R^1]} \to 0} \frac{\|\omega(V(t), H_h(t))\|_{C[R^1]}}{\|H_h(t)\|_{C[R^1]}} = 0 , \quad t \in [0, t_*] .$$

Так как обобщенное решение $V(t)$ непрерывно в каждой точке t отрезка $[0, t_*]$, то

$$H_h(t) \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0 , \quad t \in [0, t_*],$$

следовательно, для достаточно малого $h > 0$, существует постоянная $\Omega > 0$ такая, что

$$\|\omega(V(t), H_h(t))\|_{C[R^1]} \le \Omega \|H_h(t)\|_{C[R^1]}, \tag{21}$$

для всех $t \in [0, t_*]$.

Пусть t — произвольная фиксированная точка полуинтервала $]0, t_*]$. Для того чтобы установить дифференцируемость обобщенного решения $V(t)$, $t \in [0, t_*]$ в точке t, покажем существование предела

$$\frac{1}{h} H_h(t) = \frac{1}{h} [V(t+h) - V(t)] \ \text{ при } \ h \to 0 , \ t \in]0, t_*] .$$

Предполагая $t \in]0, t_*]$, имеем

$$H_h(t) = U(t; A+B) [U(h; A+B) \Phi - \Phi] + \int_0^h U(t+h-\tau; A+B) F(V(\tau)) \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t U(t-\tau; A+B) \omega(V(\tau), H_h(\tau)) \, d\tau + \int_0^t U(t-\tau; A+B) F'(V(\tau)) H_h(\tau) \, d\tau.$$

Откуда, оценивая норму $H_h(t)$, получаем интегральное неравенство

$$\|H_h(t)\|_{C[R^1]} \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\left\{\|U(h;A+B)\Phi-\Phi\|_{C[R^1]} + \right.$$

$$+\int_0^h \exp\left[2\,\frac{a+b}{a^2}(h-\tau)\right]\ \|F(V(\tau))\|_{C[R^1]}d\tau + \int_0^t \|\omega(V(\tau), H_h(\omega))\|_{C[R^1]}d\tau +$$

$$\left. + \int_0^t \|F'(V(\tau))\,H_h(\tau)\|_{C[R^1]}d\tau\right\}.$$

Полагая $h>0$ достаточно малым и учитывая оценки (20), (21), из последнего неравенства выводим

$$\|H_h(t)\|_{C[R^1]} \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\left\{\|U(h;A+B)\Phi-\Phi\|_{C[R^1]} + \right.$$

$$\left. +\int_0^h \exp\left[2\frac{a+b}{a^2}(h-\tau)\right]\|F(V(\tau))\|_{C[R^1]}d\tau + \left(\Omega+\frac{6}{a}V_*^2\right)\int_0^t \|H_h(\tau)\|_{C[R^1]}d\tau\right\}.$$

Откуда следует [9, с. 7] оценка нормы

$$\left\|\frac{1}{h}[V(t+h)-V(t)]\right\|_{C[R^1]} \le$$

$$\le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\left\{\left\|\frac{1}{h}[U(h;A+B)\Phi-\Phi]\right\|_{C[R^1]} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h}\int_0^h \exp\left[2\frac{a+b}{a^2}(h-\tau)\right]\|F(V(\tau))\|_{C[R^1]}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\left(\Omega+\frac{6}{a}V_*^2\right)\int_0^t \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}s\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{\left(\Omega+\frac{6}{a}V_*^2\right)\frac{a^2}{2(a+b)}\left[\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)-\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}s\right)\right]\right\}ds\right\}. \quad (22)$$

В силу принадлежности элемента $\Phi \in \mathcal{D}(A+B)$, имеем

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}[U(h;A+B)\Phi-\Phi]\right\|_{C[R^1]} = \|(A+B)\Phi\|_{C[R^1]} \le$$

$$\le \frac{b}{a}\sup_{x\in R^1}|\varphi''(x)| + 2\,\frac{a+b}{a^2}\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|,$$

а из непрерывности абстрактной функции $F(V(t))$, $t\in[0,t_*]$ вытекает предельное равенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \exp\left[2\frac{a+b}{a^2}(h-\tau)\right]\|F(V(\tau))\|_{C[R^1]}d\tau = \|F(\Phi)\|_{C[R^1]} \le \frac{2}{a}\sup_{x\in R^1}\left|\varphi^3(x)\right|.$$

Итак, переходя в неравенстве (22) к пределу при $h \to 0$, получим

$$\|V'(t)\|_{C[R^1]} \leq \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\left[\|(A+B)\,\Phi\|_{C[R^1]} + \|F(\Phi)\|_{C[R^1]}\right] \times$$

$$\times\left\{1 + \left(\Omega + \frac{6}{a}V_*^2\right)\int_0^t \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}s\right) \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[\left(\Omega a + 6V_*^2\right) a \frac{\exp\left(2(a+b)t/a^2\right) - \exp\left(2(a+b)s/a^2\right)}{2\,(a+b)}\right] ds\right\}. \quad (23)$$

Следовательно, обобщенное решение $V(t)$ дифференцируемо в полуинтервале $]0, t_*]$. Более того, для его нормы справедлива оценка (23). Таким образом, имеет место

Теорема. *Пусть в задаче Коши (1), (2) начальное данное $\varphi(x) \neq 0$ принадлежит пространству $C[R^1]$ вместе с производными первого и второго порядка. Тогда при $t \in [0, t_*[$, где*

$$t_* = \frac{a^2}{4\,(a+b)} \ln\left[1 + \frac{a+b}{a}\left(\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|\right)^{-2}\right],$$

существует единственное классическое решение $v = v(x,t)$, $(x,t) \in R^1 \times [0, t_*[$ этой задачи в пространстве $C[R^1]$, которое может быть получено методом последовательных приближений при $i \to +\infty$:

$$v_0(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{a+b}{a^2}t\right)\left[\sqrt{\frac{a}{bt}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a\frac{(x-\xi)^2}{4bt}\right)\varphi(\xi)\,d\xi - \right.$$

$$\left. -\sqrt{\frac{(a+b)\,t}{a}}\int_0^{+\infty} J_1\left(2\frac{\sqrt{(a+b)\,st}}{a}\right)\frac{\exp(-s)\,ds}{\sqrt{(a^2s+bt)s}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-a\frac{(x-\xi)^2}{4\,(a^2s+bt)}\right)\varphi(\xi)\,d\xi\right],$$

$$v_{i+1}(x,t) = v_0(x,t) +$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp\left(\frac{a+b}{a^2}(t-\tau)\right)\left\{\sqrt{\frac{a}{b\,(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{a\,(x-\xi)^2}{4b\,(t-\tau)}\right) w_i(\xi,\tau)\,d\xi - \right.$$

$$-\sqrt{\frac{(a+b)\,(t-\tau)}{a}}\int_0^{+\infty} J_1\left(2\frac{\sqrt{(a+b)\,s\,(t-\tau)}}{a}\right)\frac{\exp(-s)\,ds}{\sqrt{[a^2s+b\,(t-\tau)]s}} \times$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{a(x-\xi)^2}{4\,[a^2s+b\,(t-\tau)]}\right) w_i(\xi,\tau)\,d\xi\right\} d\tau,$$

где

$$w_i(\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-r)\,dr}{\sqrt{r}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(\xi-\eta)^2}{4ar}\right)v_i^3(\eta,\tau)d\eta-v_i^3(\xi,\tau),$$

и для которого справедлива оценка

$$\sup_{x\in R^1}|v(x,t)|\le\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|\times$$
$$\times\left\{\left[1+\frac{a}{a+b}\left(\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|\right)^2\right]-\frac{a}{a+b}\left(\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|\right)^2\exp\left(4\frac{a+b}{a^2}t\right)\right\}^{-1/2}.$$

Литература

1. Gal C. Well-Posedness and Long Time Behavior of the Non-Isothermal Viscous Cahn-Hilliard Equation with Dynamic Boundary Conditions // Dynamics of PDE. – 2008. – 5;1. – P. 39–67.
2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. I. Общая теория / М.: ИЛ, 1962. – 895 с.
3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967. – 464 с.
4. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1971. – 104 с.
5. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.: Наука, 1966. – 500 с.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа / М.: Высш. школа, 1982. – 271 с.
7. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (Appl. Math. Sci., vol. 44) / New York: Springer-Verlag, 1983. – 279 p.
8. Appell J., Zabreiko P.P. Nonlinear superposition operators (Cambridge Texts in Mathematics, № 95) / Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 320 p.
9. Dragomir S.S. Some Gronwall Type Inequalities and Applications / Melbourne: Melbourne City MC, 2002. – 193 p.

SOLVABILITY OF ONE-DIMENSIONAL CAHN-HILLIARD EQUATION WITH VISCOSITY IN SPACE OF UNIFORMLY LIMITED CONTINUOUS FUNCTIONS

Kh.G. Umarov

Chechen State University,
Sheripov Str., 32, 364907, Grozny, Russia, e-mail: umarov50@mail.ru

Abstract. For one-dimensional Cahn-Hillard equation modeling the evolution of concentration distribution of the component of binary viscous mixture, the solvability of Cauchy's problem is studied by reducing to the abstract Cauchy problem in Banach's space.

Key words: Cahn-Hilliard equation, strongly continuous semi-groups of operators.