УДК 517.9

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА-КИПРИЯНОВА РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ [6)]

Л.Н. Ляхов, О.И. Попова

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail:
lyakhov@box.vsi.ru, olyaa.popova@yandex.ru

Аннотация. Приведен вывод формулы связи преобразования Радона радиальных функций и преобразования Радона-Киприянова K_γ функции одной переменной. Получена формула K_γ-преобразования радиальной в $\mathbb{R}^n$ функции в виде $K_{\gamma+n-1}$-преобразования функции одной переменной. Получена формула обращения преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной. Результаты обобщают и уточняют результаты, полученные ранее одним из авторов.

Ключевые слова: преобразование Радона, преобразование Радона-Киприянова, радиальные функции.

1. Преобразование Радона как частный случай преобразования Радона-Киприянова

В качестве введения в тему исследований рассмотрим вопрос о том, как преобразование Радона центрально симметричной функции сводится к преобразованию Радона-Киприянова функции одной переменной. Преобразования Радона $R[f]$ (см. [3]) и Радона-Киприянова $K_\gamma[f]$ (введено в [4]) функции f определяются соответственно формулами,

$$R[f](\Theta;p)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\delta(p-\langle x,\Theta\rangle)\,dx=\int\limits_{\Gamma} f(x)\;d\Gamma,$$

$$K_\gamma[f](\Theta;p)=K_\gamma[f](p)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\,\Pi^\nu_{x_1}\delta(p-\langle x,\Theta\rangle))\,x_1^\gamma\,dx\,,\quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\,,\quad \gamma>0\,. \tag{1}$$

где $x=(x_1,x')\in\mathbb{R}^n_+=(0,+\infty)\times\mathbb{R}_{n-1}$, $\langle x,\Theta\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\,\Theta_i$, — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$, $p=\langle x,\Theta\rangle$ — уравнение плоскости Γ с нормальным вектором Θ $(|\Theta|=1)$, находящейся на расстоянии $|p|$ от начала координат, $\delta(P)$ — δ-функция сосредоточенная на $(n-1)-$мерной поверхности $P(x)=0$ в $\mathbb{R}^n$, а в последнем равенстве символ $\Pi^\nu_{x_1}$ обозначает действие оператора Пуассона порядка ν по переменной x_1 (определение этого оператора приведено далее).

Известно, что преобразование Радона имеет смысл только для функций многих переменных и это преобразование радиальных функций представляет собой функцию

[6)] В этой работе обобщены и частично уточнены некоторые из результатов, анонсированные ранее в [1] и [2].

одной переменной, например (см. [3], стр. 28),

$$R[e^{-|x|^2}](\Theta;p)=\pi^{\frac{n-1}{2}}\,e^{-p^2},\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Независимость правой части равенства (2) от вектора нормали Θ (при $|\Theta|=1$) к плоскости Γ, очевидно, есть следствие центральной симметрии, поскольку преобразуемая функция не зависит от угловых координат точки. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Преобразование Радона радиальной функции f, интегрируемой в $\mathbb{R}^n$, совпадает (с точностью до константы $|S_1(n)|$, равной площади единичной сферы в $\mathbb{R}^n$) с преобразованием Радона-Киприянова индекса $\gamma=n-1$ той же функции, рассматриваемой как функции одной (а именно радиальной) переменной:*

$$R[f(|x|)](\Theta;p)=R[f(|x|)](p)=|S_1(n)|K_{n-1}[f(r)](p). \tag{3}$$

□ Доказательство заключается в следующем. Преобразование координат вращением, при котором направляющий вектор оси x_1 перейдет в единичный вектор Θ, приводит к следующему представлению преобразования Радона радиальной (в $\mathbb{R}^n$) функции f:

$$R[f](\Theta;p)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\,\delta(p-\langle x,\Theta\rangle)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\,\delta(p-x_1)\,dx.$$

Из этой формулы уже следует, что преобразование Радона радиальной функции не зависит от единичного вектора нормали Θ к плоскости Γ. Поэтому далее левую часть этого равенства будем записывать в виде $R[f](p)$. Сферическое преобразование координат удобно ввести по формулам

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1,\\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
&\dots\\
x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\
x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},
\end{aligned}$$

что приводит к выражению

$$R[f](p)=\int\limits_0^\infty f(r)\,r^{n-1}\,dr\,\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi \delta(p-r\cos\varphi_1\rangle)\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\int\limits_0^\pi\sin^{n-3}\varphi_2\,d\varphi_2\,\dots\int\limits_0^\pi\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}\,.$$

Поделим и умножим левую часть этого равенства на

$$\int\limits_0^\pi\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

Выделив из полученного выражения площадь единичной сферы $|S_1(n)|$ в $\mathbb{R}^n$, получим

$$R[f](p) = |S_1(n)| \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\varphi\; f(r)\,\delta(p - r\cos\varphi)\; d\varphi\; r^{n-1} dr. \tag{4}$$

Здесь, сокрашая запись, воспользуемся определением оператора Пуассона (см. [5], [6]) порядка $\nu = (\gamma-1)/2$, действующего по переменной r следующим образом

$$\Pi_r^\nu f(r,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f(r\cos\alpha\,,\,t)\;\sin^{\gamma-1}\alpha\; d\alpha\,.$$

Тогда

$$R[f](p) = |S_1(n)| \int\limits_0^\infty f(r)\;\Pi_r^\nu \delta(x-r)\;r^{n-1}\,dr, \quad \nu = \frac{n-1}{2}\,, \quad n \geq 2. \tag{5}$$

Определение преобразования Радона-Киприянова (1) мы запишем применив его формально к функции одной переменной:

$$K_\gamma[f](\Theta;p) = K_\gamma[f](p) = \int\limits_0^\infty f(x)\,\Pi_x^\nu \delta(p-x)\,x^\gamma\,dx, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}\,, \quad \gamma > 0.$$

Теперь, сравнивая правую часть этого равенства с правой частью равенства (5) (или, что тоже самое, (4)), получим формулу (3), которая связывает преобразования Радона радиальной функции с преобразованием Радона-Киприянова четной функции одной переменной, когда $\gamma = n-1$ — натуральное число. ■

Следует отметить, что в работе [4] (и в [7], [8]) не предполагалось применять K_γ-преобразование к функциям одной переменной, хотя никаких принципиальных трудностей введения такого преобразования не было, но было ясно, что появится некоторая специфика и даже простота в определениях и формулах, и это надо рассматривать отдельно. Необходимость изучения K_γ-преобразований функций одной переменной связана не только с исследованием преобразования Радона радиальных функций, но и с решением задачи о носителе K_γ-преобразования (см. [9]). В следующем пункте проведены необходимые исследования и уточнена указанные выше формулы (3) или (4) и (5) (см. Теорему 3 и ее следствие).

Сначала приведем пример вычисления преобразования Радона радиальной функции через преобразование Радона-Киприянова функции одной переменной. Снова вернемся к (4), где совершим антиполярное преобразование координат

$$z_1 = r\;\cos\alpha, \quad z_2 = r\;\sin\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \quad r^{n-1}\sin^{n-2}\alpha\,dr = z_2^{n-2}\,dz_1\,dz_2.$$

Имеем

$$R[f](\Theta;p) = |S_1(n)| \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\,\Gamma(1/2)} \int\limits_0^{+\infty} z_2^{n-2}\,dz_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right)\,\delta(p-z_1)\,dz_1 =$$

$$= |S_1(n)| \, \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left((n-1)/2\right)\Gamma\left(1/2\right)} \int\limits_0^{+\infty} z_2^{n-2} \, f\left(\sqrt{p^2+z_2^2}\right) \, dz_2 \, . \tag{6}$$

Отметим, что формулы (3), (4), (5) и (6) эквивалентны и формула (6) получена из определения преобразования Радона-Киприянова (1) заменой функции $f = f(x)$, $x \in R_1$ на функцию вращения

$$\tilde{f} = f(z_1, z_2) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right).$$

Этот подход легко применить для вычисления преобразования Радона радиальной функции. В частности если

$$f(x) = e^{-|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, ,$$

то

$$R[f](\Theta; p) = |S_1(n)| \, \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} z_2^{n-2} \, e^{-z_1^2 - z_2^2} \, \delta(p - z_1) \, dz_1 \, dz_2 =$$

$$= |S_1(n)| \, \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \, e^{-p^2} \int\limits_0^{+\infty} z_2^{n-2} \, e^{-z_2^2} \, dz_2 .$$

Последний удвоенный интеграл представляет собой Г-функцию Эйлера от аргумента $(n-1)/2$ и, следовательно,

$$R[f](\Theta; p) = |S_1(n)| \, \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \, e^{-p^2} \cdot \frac{1}{2} \, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \pi^{\frac{n-1}{2}} \, e^{-p^2}.$$

Таким образом получили формулу (2).

Надо отметить, что приведенная схема вычислений классического преобразования Радона радиальных функций не только сокращает рассуждения. Важнее то, что эта схема применима к более общему преобразованию (Радона-Киприянова), а это дает возможность получить новые формулы, которые не известны из классической теории. В работе [1] показано, что для индекса $\gamma \in (0, 2]$ вычисление преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной, сводится к вычислению дробного интеграла от $f_1(t) = C \, f(\sqrt{x})$. Это позволило применить методы обращения интегралов дробного порядка для получения формул обращения преобразования Киприянова-Радона. В настоящей работе подобный результат получен в общем случае $\gamma > 0$ и другим путем.

2. Преобразование Радона-Киприянова радиальных функций

Через $\mathbb{R}^n_+$ будем обозначать евклидово полупространство точек $\mathbb{R}^n$, определенное неравенством $x_1 > 0$, и пусть γ фиксированное положительное число, а функция $f =$

$f(|x|)$ — радиальная функция, абсолютно интегрируемая с весом x_1^γ, $\langle x,\xi\rangle = p$ — уравнение гиперплоскости, лежащей на расстоянии p от начала координат, с единичным вектором нормали ξ.

Преобразование Радона-Киприянова радиальных функций определяется следующим соотношением:

$$K_\gamma[f](\xi;p) = \int\limits_{R_n^+} f(|x|)\Pi^\nu_{x_1}\delta(p-\langle x,\xi\rangle)x_1^\gamma dx =$$

$$= C(\gamma)\int\limits_{R_n^+} f(|x|)\int\limits_0^\pi \delta(p - x_1\cos\alpha\xi_1 - \langle x',\xi'\rangle)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha\, x_1^\gamma dx,$$

где $x' = (x_2,..,x_n), \xi' = (\xi_2,..,\xi_n)$, а $C(\gamma) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}$ — константа, нормирующая оператор Пуассона.

Далее используем процедуру вращения. Для этого сделаем замену переменных:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1\,\cos\alpha = z_1 \\ x_1\,\sin\alpha = z_2, \end{array}\right| ,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\quad z_1\in(-\infty,+\infty),\quad z_2\in(0,+\infty),$$

$$z = (z_1,z_2,x')\in\mathbb{R}^{n+1}_+,\quad |z| = |x| = \sqrt{z_1^2+z_2^2+x_2^2+x_3^2+...+x_n^2}\,.$$

В результате, находим

$$K_\gamma[f](\xi;p) = C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} f(|z|)\delta(p - z_1\xi_1 - \langle x',\xi'\rangle)z_2^{\gamma-1}dz.$$

Введем обозначение $\overline{\xi} = (\xi_1,0,\xi')$ для вектора, лежащего в координатной гиперплоскости $z_2 = 0$. Тогда

$$K_\gamma[f](\xi;p) = C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(|z|)\delta(p-\langle z,\overline{\xi}\rangle)z_2^{\gamma-1}dz.$$

Скалярное произведение инвариантно относительно вращений. В данном случае вращение необходимо провести в координатной гиперплоскости $z_2 = 0$. Такое вращение не изменит координаты z_2 и, следовательно, веса z_2^γ под знаком интеграла в полученном равенстве. Поворот совершим вокруг оси z_2 так, чтобы направление оси z_1 совпало с направлением вектора $\tilde{\xi}$. Новые координаты вектора $\overline{\xi}$ обозначим $\tilde{\xi} = (|\xi|,0,0,..,0)$. Ясно, что $|\tilde{\xi}| = |\overline{\xi}| = |\xi| = 1$. Имеем

$$K_\gamma[f](\xi;p) = C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(|z|)\delta(p-z_1)z_2^{\gamma-1}dz.$$

Теперь произведем сферическое преобразование координат (как и раньше, первую координату положим равной $z_1 = r\cos\alpha_1$,). Тогда

$$K_\gamma[f](\xi;p) = K_\gamma[f](p) = C(\gamma)\int\limits_0^{+\infty} f(r) r^{n+\gamma-1} dr \int\limits_{S_1(n+1)} \delta(p - r\cos\alpha_1)\ \sin^{\gamma-1}\alpha_1\ \cos^{\gamma-1}\alpha_2\, dS,$$

где dS — элемент поверхности единичной сферы в евклидовом пространстве размерности $n+1$:

$$dS = sin^{n-1}\alpha_1\, d\alpha_1\ \sin^{n-2}\alpha_2\, d\alpha_2 \ldots \sin\alpha_{n-1}\, d\alpha_{n-1}\ d\alpha_n.$$

Следовательно

$$K_\gamma[f](p) = C(\gamma)\int\limits_0^{+\infty} f(r) r^{n+\gamma-1} dr \int\limits_0^{\pi} \delta(p - r\cos\alpha_1)\ \sin^{n+\gamma-2}\alpha_1 d\alpha_1 \int\limits_0^{\pi} \cos^{\gamma-1}\alpha_2\ \sin^{n-2}\alpha_2\, d\alpha_2\ \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-3}\alpha_3 d\alpha_3 \ldots \int\limits_0^{\pi} d\alpha_n\,.$$

Это выражение умножим и разделим на

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^{n+\gamma-2}\ \varphi_1\ d\varphi_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\gamma-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\gamma}{2}\right)}\ .$$

Теперь можно воспользоваться формулой «площади весовой сферы» (см [6], формула (1.2.5))

$$|S_1(n)|_\gamma = \int\limits_{S_1^+(n)} \prod_{j=1}^{m} \Theta_j^{\gamma_j} dS = \frac{\pi^{\frac{n-m}{2}}}{2^{m-1}} \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\ ,$$

где надо положить $m = 1$, $\gamma_1 = \gamma$. Тогда

$$K_\gamma[f](p) = |S_1(n)|_\gamma \int\limits_0^{+\infty} f(r) \Pi_r^\nu(p - r) r^{n+\gamma-1} dr\,, \quad \nu = \frac{n+\gamma-1}{2}\ .$$

Здесь, справа, снова видим «одномерное» преобразование Радона-Киприянова, но уже с новым индексом. Итак, получен следующий результат.

Теорема 2. *Преобразование Радона-Киприянова индекса γ радиальных функций не зависит от вектора нормали к плоскости интегрирования ξ и представляет собой одномерное преобразование Радона-Кипрпянова индекса $n+\gamma-1$, умноженное на площадь весовой полусферы $|S_1^+(n)|_\gamma$:*

$$K_\gamma[f](p) = |S_1^+(n)|_\gamma\ K_{\gamma+n-1}[f](p).$$

Эту формулу интересно сравнить с формулой «преобразование Радона радиальной функции» — с формулой (3). Ясно, что $2\left|S_1^+(n)|_\gamma\right|_{\gamma=0} = |S_1(n)|$. Но тогда

$$K_0[f] = |S_1(n)|\ K_{n-1}[f](p) = R[f].$$

Вообще говоря, преобразованире K_0 формулой (1) не определено. Полученное равенство справедливо лишь для функций радиальных в евклидовом пространстве размерности $n \geq 2$.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что в теории преобразования Радона-Киприянова, а также для приложений данной теории необходимы знания свойств преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной. Некоторые из них приведены в следующем разделе.

3. Преобразование Радона-Киприянова функций одной переменной. Связь с преобразованиями Фурье, Ганкеля и операторами преобразования Пуассона-Сонина

Пусть $f = f(x)$ абсолютно интегрируемая по $(0,\infty)$ с весом x^γ функция, число γ положительно и фиксировано. Через $\tilde{f} = \tilde{f}(z)$ будем обозначать функцию

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_1, z_2) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right).$$

Преобразование Радона-Киприянова (1) функции одной переменной $f = f(x)$ легко трансформируется по схеме получения равенства (6) в следующее интегральное выражение

$$K_\gamma[f](p) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{\{z_1=p\}^+} \tilde{f}(z)\, z_2^{\gamma-1}\, d\Gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{p_1^2 + z_2^2}\right)\, z_2^{\gamma-1}\, dz_2, \tag{7}$$

где $\{z_1 = p\}^+$ — полупрямая в $\mathbb{R}_+^2 = \{z = (z_1, z_3),\ z_2 > 0\}$, заданная уравнением $z_1 = p$.

Очень важной в теории преобразований Радона-Киприянова является формула связи с преобразованиями Фурье и Фурье-Бесселя (см. [4], [7], [8]). В нашем случае роль прямого и обратного преобразований Фурье-Бесселя должно выполнить прямое и обратное преобразования Ганкеля (см. [5]), соответственно

$$H_\gamma[f](\xi) = F_B[f](\xi) = \int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(r\xi)\, f(x)\, x^\gamma\, dx,$$

$$H_\gamma^{-1}[f](x) = \left[2^{\gamma-1}\,\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right]^{-1} H_\gamma[f](x).$$

Ядром этих преобразований Ганкеля служит так называемая j-функция Бесселя j_ν, связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν равенством

$$j_\nu(t) = \frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}\,J_\nu(t).$$

Хорошо известно представление j-функций Бесселя в виде интеграла Пуассона ([5])

$$j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = \Pi^\gamma \exp[-ix].$$

Отсюда получим следующее представление преобразования Ганкеля:

$$H_\gamma[u](\xi) = C(\gamma)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi e^{-ix\xi\cos\alpha}\,\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,f(x)\,x^\gamma\,dx\,,\quad C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Антиполярное преобразование координат

$$z_1 = x\,\cos\alpha,\quad z_2 = x\,\sin\alpha,\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\quad x\,dx\,d\alpha = dz_1dz_2$$

приводит к выражению

$$H_\gamma[f](\xi) = C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz_1\xi}\,dz_1\int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right)\,z_2^{\gamma-1}\,dz_2\,.$$

Заменив z_1 на p и воспользовавшись определением (7), получим

$$H_\gamma[f](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi}\,K_\gamma[f](p)\,dp = F\,[\,K_\gamma[f](p)]\,(\xi),$$

где через F обозначено преобразование Фурье. Эта формула устанавливает связь между преобразованиями Ганкеля, Фурье и одномерным преобразованием Радона-Киприянова. Применение обратного преобразования Фурье дает формулу

$$K_\gamma[f](p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\xi}\,H_\gamma[f](\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Обозначим через $C^\infty_{0,ev}(\mathbb{R})$ подпространство пространства $C^\infty_0(\mathbb{R})$, состоящее из четных функций, а через $S_{ev}(\mathbb{R})$ — подпространство Л.Шварца, также состоящее из четных функций. Через Z_{ev} обозначим образ пространства $C^\infty_{0,ev}(\mathbb{R})$ при cos-преобразовании Фурье F_c. Приведем следующий известный результат (см. [10]) относительно cos-преобразования Фурье и относительно преобразования Ганкеля:

Лемма 1. *Операторы F_c и H_γ изоморфно отображают пространства $C^\infty_{0,ev}(\mathbb{R})$ на Z_{ev} и $S_{ev}(\mathbb{R})$ на себя.*

Теперь рассмотрим операторы преобразования Пуассона и Сонина, представленные посредством преобразований Ганкеля и cos-преобразованием Фурье следующим образом[7)]

$$P_\gamma = H_\gamma^{-1}\,F_c = \left[2^{\gamma-1}\,\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right]^{-1} H_\gamma\,F_c,$$

$$S_\gamma = F_c^{-1}\,H_\gamma = (2\pi)^{-1}F_c\,H_\gamma.$$

Известны следующие свойства операторов преобразования P_γ и S_γ (см. [10]).

Лемма 2. *Операторы P_γ и S_γ отображают пространства $C^\infty_{0,ev}(\mathbb{R}_1)$ и S_{ev} изоморфно на себя.*

Лемма 3. *Для любой функции $f \in S_{ev}$ операторы P_γ и S_γ являются взаимно обратными :*

$$S_\gamma\,P_\gamma\,f = P_\gamma\,S_\gamma\,f = f\,.$$

Для преобразования Радона-Киприянова функции одной переменной справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *На функциях из пространства $S_{ev}(R_1)$ K_γ-преобразование (1) представляет собой оператор преобразования Пуассона-Сонина S_γ, при этом*

$$P_\gamma\,K_\gamma[f] = f\,, \qquad K_\gamma\,P_\gamma[f] = f\,.$$

□ Если $f \in S_{ev}$, то справедливо равенство (8). Законность выполнения всех операций следует из Леммы 1. Учитывая, что $H_\gamma[f](\xi)$ — четная функция, получим $K_\gamma[f](p) = F_c^{-1}\,H_\gamma[f]$, что в соответствии с определением оператора S_γ дает равенство

$$K_\gamma[f](p) = S_\gamma[f](p).$$

Применение Леммы 3 завершает доказательство. ■

Следствие 1 (О преобразовании Радона радиальных функций). *Если $f \in S(\mathbb{R}^n)$ и $f = f(|x|)$, то ее преобразование Радона выражается через преобразование Радона-Киприянова и оператор преобразования Пуассона-Сонина по формулам*

$$R[f](\xi;p) = R[f](p) = K_{n-1}[f](p) = S_{n-1}[f](p)\,.$$

При этом $P_{n-1}\,R[f] = f$.

[7)] Оператор Пуассона $\Pi^{\frac{\gamma-1}{2}}$ и оператор преобразования Пуассона P_γ в этой работе суть различные операторы.

4. Применение дробных производных

Ясно, что формулы, полученные в Теореме 3, являются формулами обращения K_γ-преобразования. При этом роль обращающего оператора выполняет оператор Пуассона[8]. Здесь мы получим формулы обращения, основанные на применении дробных производных (ср. с результатами работ [1] и [2]).

Общие формулы обращения RK-преобразования получены в работах [7], [8]. Интерес к обращению одномерного K_γ-преобразования отчасти связан с тем, что во-первых эти формулы имеют очень простой вид, а во-вторых с тем, что в частном случае, когда весовой показатель γ целый, эти формулы окажутся обращающими преобразование Радона радиальных функций, а это имеет значение при решении практических задач и задач компьютерной томографии.

Пусть $f \in S_{ev}$. Согласно теореме 3

$$f(x) = P_\gamma K_\gamma[f] = H_\gamma^{-1}\, 2F_c\, K_\gamma[f]\,.$$

Константу, нормирующую обратное преобразование Ганкеля, обозначим через $C_1(\gamma)$. Итак

$$f(x) = C_1(\gamma) \int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\xi^\gamma\,d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi p}\,K_\gamma[f](p)\,dp\,, \quad C_1(\gamma) = \left[2^{\gamma-1}\,\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right]^{-1}. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$\Phi(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi p}\,K_\gamma[f](p)\,dp\,.$$

Поскольку $K_\gamma[f](p)$ — четная функция[9], то и ее преобразование Фурье (а это cos-преобразование) — четная функция. Нашей следующей целью является распространение интегрирования по ξ в (9) с полуоси на всю действительную ось. Поступим следующим образом

$$M = \int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\,|\xi|^\gamma\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\;|\xi|^\gamma\,d\xi + \int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\;|\xi|^\gamma\,d\xi\right).$$

Во втором слагаемом заменим ξ на $-\xi$. Тогда

$$M = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\;|\xi|^\gamma\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{0} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(-x\,\xi)\,\Phi(-\xi)\;|\xi|^\gamma\,d\xi\right).$$

---

[8]В теории обратных задач пара операторов P_γ и S_γ называются «операторы преобразования». Эти операторы преобразуют сингулярный дифференциальный оператор Бесселя с индексом γ во вторую производную и наоборот.

[9]$K_\gamma[f](-\xi;-p) = K_\gamma[f](\xi;p)$, см. [4], [8]

Учитывая четность подынтегрального выражения во втором слагаемом,

$$M = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\;|\xi|^{\gamma}\,d\xi.$$

Теперь равенство (9) принимает вид

$$f(x) = \frac{C_1(\gamma)}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\,.\,|\xi|^{\gamma}\,d\xi$$

Заменив функцию Бесселя соответствующим интегралом Пуассона, получим

$$f(x) = \frac{C_1(\gamma)\,C(\gamma)}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\pi} e^{-ix\,\xi\,\cos\alpha}\,\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi p}\,K_{\gamma}[f](p)\,dp\,|\xi|^{\gamma}\,d\xi.$$

Выделим прямое и обратное преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{C_1(\gamma)\,C(\gamma)\,2\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi} F^{-1}_{\xi\to x\,\cos\,\alpha}\left[\,|\xi|^{\gamma}\,F_{p\to\xi}\,K_{\gamma}[f]\,\right]\,\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,. \tag{11}$$

Здесь оператор Пуассона применен к классическому псевдодифференциальному оператору $F^{-1}|\xi|^{\gamma}F[u]$ с символом $|\xi|^{\gamma}$. Пусть $0<\alpha<1$ и $A=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$, каждое из выражений

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)=A\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\,,\quad (\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x)=-A\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\,,$$

называется дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha\in(0,1)$, соответственно левосторонней и правосторонней (см. [11]). Если же $\alpha\geq 1$ и не является целым, то

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\mathcal{D}^{\{\alpha\}}_{a+}f\,,\quad \mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\mathcal{D}^{\{\alpha\}}_{b-}f\,.$$

Мы пользуемся стандартными обозначениями: $[\alpha]$ — целая часть числа α, $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α, т. е. $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}$.

Далее полагаем $a=-\infty$, $b=+\infty$. В этом случае для дробных производных Римана-Лиувилля (соответственно левосторонней и правосторонней) используем обозначения $\mathcal{D}^{\alpha}_{+}$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{-}$. Для этих производных справедливо следующее представление в образах Фурье (см. [11], стр. 114):

$$F[\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}\varphi]=(\mp i\xi)^{\alpha}F[\varphi](\xi),$$

где $\alpha > 0$, $(\pm ix)^\alpha = |x|^\alpha e^{\pm\frac{i\alpha\pi}{2}\operatorname{sign} x}$. Отсюда вытекают формулы для средней величины дробной производной Римана-Лиувилля

$$\left(\frac{\mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha}{2}\right)\varphi(x) = F^{-1}\left[\cos\frac{\alpha\pi}{2}|\xi|^\alpha F[\varphi](\xi)\right](x).$$

Введем обозначение

$$\mathfrak{D}^\alpha\varphi(x) = F^{-1}\left[|\xi|^\alpha F[\varphi](\xi)\right](x) = \frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left(\frac{\mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha}{2}\right)\varphi(x). \tag{12}$$

Отметим, что дробные производные Римана-Лиувилля представляются в виде производных Маршо:

$$\mathcal{D}_\pm^\alpha\varphi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x) - \varphi(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}dt\,.$$

Откуда

$$\left(\frac{\mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha}{2}\right)\varphi(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\varphi(x) - \varphi(x-t) - \varphi(x+t)}{t^{1+\alpha}}dt\,.$$

Это равенство с точностью до константы $[\cos\frac{\alpha\pi}{2}]^{-1}$ представляет собой производную Грюнвальда-Летникова-Рисса функции ϕ (см. [11], стр. 280). Из (12) вытекает полугрупповое свойство: $\mathfrak{D}^\alpha\mathfrak{D}^\beta = \mathfrak{D}^{\alpha+\beta}$. В частности, если $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, то $\mathfrak{D}^\alpha\varphi(x) = \left(\mathfrak{D}^{\{\alpha\}}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\right)\varphi(x)$.

Следуя [12] (стр. 30), введем оператор

$$(\Lambda^\alpha f)(p) = \begin{cases} \dfrac{d^\alpha}{dp^\alpha}f(p), & \alpha\text{— четное;} \\[2ex] G\,\dfrac{d^\alpha}{dp^\alpha}f(p), & \alpha\text{— нечетное;} \\[2ex] \mathfrak{D}^\alpha f(x), & \alpha\text{— дробное число,} \end{cases}$$

где G – преобразование Гильберта:

$$(Gf)(t) = \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(p)}{t-p}\,dp\,.$$

а $\mathfrak{D}^\alpha$ — оператор (12).

Теорема 4. *Пусть Λ_p^α — оператор (12), γ — фиксированное положительное число. Для $f\in S_{ev}$ имеет место следующая формула обращения*

$$f(x) = A(\gamma)\,\Pi_x^\gamma(\Lambda_p^\gamma K_\gamma[f])(p)|_{p=x}\,. \tag{13}$$

При этом в случае целого γ

$$A(\gamma) = \frac{(-i)^{-\gamma}\,\pi}{2^{\gamma-1}\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\ ,$$

а в случае дробного γ

$$A(\gamma) = \frac{\pi}{2^{\gamma-1}\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\ .$$

□ Необходимо рассмотреть три случая, когда γ четное, нечетное или дробное число.

Если $\gamma = 2m$ — четное, то утверждение теоремы следует из того, что выражение $(-i|\xi|)^{2m} = (-i\xi)^{2m}$ представляет собой символ оператора $\frac{d^{2m}}{dp^{2m}}$ (разумеется в образах Фурье).

Если же $\gamma = 2m+1$ — нечетное, то утверждение теоремы следует из того, что

$$|\xi|^{2m+1} = \mathrm{sign}(\xi)\,\xi^{2m+1}\,,$$

а $\mathrm{sign}(s)$ — символ представления в образах Фурье преобразования Гильберта (см. например [12], стр. 31, формула (40)) и мы приходим к интегродифференцированию, осуществляемому суперпозицией оператора Гильберта и производной целого порядка $2m+1$: $G\,\frac{d^{2m+1}}{dp^{2m+1}}$. Вычисление соответствующей константы не составляет каких-либо трудностей, таким образом для целых значений γ получим (13) с оператором Λ при четных или нечетных значениях γ.

Пусть γ — дробное. В этом случае утверждение теоремы вытекает из определения дробной производной $\mathfrak{D}^{\alpha}$ (12). ■

Отметим, что второе равенство в (12) дает возможность заменить в формуле (13) производную $\mathfrak{D}^{\alpha}$ средней величиной дробной производной Римана-Лиувиля. Формулы обращения K_γ-преобразования через производной Маршо или Грюнвальда-Летникова-Рисса выписываются довольно просто.

Теперь покажем, что при целом γ дифференцирование в формуле обращения в Теореме 1 может быть заменено дифференцированием, осуществляемым сингулярным дифференциальным оператором Бесселя.

Теорема 5. *Пусть f радиальная функция, определенная в $\mathbb{R}^n$ и принадлежащая пространству Шварца основных функций $S(\mathbb{R}^n)$. Для преобразования Радона функции f имеет место формула обращения преобразования Радона радиальных функций*

$$f(r) = \frac{\pi\,C_1(n-1)}{i^{n-1}}\,\Pi_r^{n-1}\left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}K_{n-1}[f](p)\right]\Bigg|_{p=r}. \tag{14}$$

При нечетном n эта формула примет вид

$$f(r) = \frac{\pi\,C_1(n-1)}{i^{n-1}}\,B^{(n-1)/2}\Pi_r^{n-1}K_{n-1}[f](r)\,. \tag{15}$$

При четном n

$$f(r) = \frac{\pi\, C_1(n-1)}{i^{n-1}}\, B^{(n-2)/2} \Pi_r^{n-1} \frac{d}{dr} K_{n-1}[f](r)\,. \tag{16}$$

□ Как известно, преобразование Радона $R[f]$ радиальной функции оказывается преобразованием Радона-Киприянова функции $K_\gamma[f]$ одной переменной при $\gamma = 1$. Таким образом, полагая в (13) $\gamma = n-1$, получим формулу обращения преобразования Радона радиальных функций

$$f(r) = \frac{\pi\, C_1(n-1)}{i^{n-1}}\, \Pi_r^{n-1} \left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} K_{n-1}[f](p)\right]\Bigg|_{p=r}\,.$$

Тем самым формула (14) доказана.

Если размерность n евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ нечетное число, то исходя из формулы (см. [17], формула (1.1))

$$B^m \Pi^\gamma = \Pi^\gamma \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\ ,$$

где B — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя

$$B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}\ ,$$

из (15) получим

$$f(x) = A(\gamma)\, B^{\gamma/2} \Pi_x^\gamma K_\gamma[f])(r)\,.$$

При четной размерности пространства n из (14) получим

$$f(r) = \frac{\pi\, C_1(n-1)}{i^{n-1}}\, B^{(n-2)/2} \Pi_r^{n-1} \frac{d}{dr} K_{n-1}[f](r)\,. \quad \blacksquare$$

Литература

1. Ляхов Л.Н. RK_γ-преобразование с $\gamma \in (0,2]$ весовых сферических функций. Соотношения Асгейрсона // Доклады РАН. – 2011. – 439;№5. – С.589-592.
2. Ляхов Л.Н. О преобразованиях Радона и Радона-Киприянова сферически симметричных функций // Доклады РАН. – 2008. – 419;№3. – С.315-319.
3. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / М.: ГИФМЛ, 1962. – 656 с.
4. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона // Доклады РАН. – 1998. – 360;№2. – С.157-160.
5. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические задачи / М.:Наука, 1997. – 199 с.
6. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом / Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад.,1997. – 144 с.
7. Ляхов Л.Н. Обращение преобразования Радона-Киприянова // Доклады РАН. – 2004. – 399;N5. – С.597-600.
8. Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова-Радона. // ТР.МИАН. 2005. Т.248. С.153-163.

9. Гоц Е.Г. Преобразование Киприянова-Радона основных функций. Теорема о носителе // Труды участников школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо / Ростов-на-Дону: Ростовское математическое общество, 2006. – С.185-186.

10. Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы // СМЖ. – 1980. – XXI; №1. – С.86-97.

11. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

12. Хелгасон С. Преобразование Радона / М.: Мир, 1983. – 150 с.

13. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / М.: Наука, 1974. – 808 с.

14. Ляхов Л.Н. Об одном классе сферических функций и сингулярнvх псевдодифференциальнvх операторов // Доклады РАН. – 1983. – 272;№4. – С.781-784.

15. Ляхов Л.Н. О рядах по весовым сферическим функциям // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математ. физики: Сб.научн. тр./ Новосибирск: СО АН СССР, 1984. – С.102-109.

16. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и сингулярные псевдодифференциальные операторы // Дифференц. уравнения. – 1985. – 21;№6. – С.1020-1032.

17. Киприянов И.А., Кононенко В.И. О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1969. – 5;№8. – С.1470-1483.

INVERSION OF RADON-KIPRIYANOV's TRANSFORM OF RADIAL FUNCTIONS

L.N. Lyakhov, O.I. Popova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: lyakhov@box.vsi.ru, olyaa.popova@yandex.ru

Abstract. It is done the deduction of the formula connected the Radon transformation of radial functions
and the Radon-Kipriyanov K_γ transformation of one-variable functions. It is obtained the formula of K_γ-transformation of radial functions in $\mathbb{R}^n$. It is done in the form of $K_{\gamma+n-1}$-transformation of the one-variable function. The formula of inverse Radon-Kipriyanov transformation of one-variable functions is found. The results extend and refine previous ones obtained by one of the authors.

Key words: Radon transform, Radon-Kipriyanov transform, radial functions.