



УДК 535.41+654.91

## СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ГАУССОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, СО СТАТИСТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫМИ МОДАМИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

А.С. Мазманишвили

Сумской государственный университет,  
г. Сумы, Украина, e-mail: [mazmanishvili@gmail.com](mailto:mazmanishvili@gmail.com)

**Аннотация.** Вычислена характеристическая функция распределения вероятностей фотоотсчетов квантового неполяризованного гауссового оптического излучения со статистически связанными модами поляризации, который описывается нормальным гауссовским процессом.

**Ключевые слова:** квантовое оптическое излучение, процесс Орнштейна-Уленбека, моды поляризации.

**1. Постановка задачи.** Излучение оптических лазеров часто моделируется узкополосным гауссовским процессом [1, 2]. При возбуждении таким излучением одномодового световода (СВ) с круговым поперечным сечением и осесимметричным распределением показателя преломления в нем распространяются в направлении оси две фундаментальные моды  $HE_{11}$ , электрические поля которых ортогонально поляризованы вдоль главных осей  $x$  и  $y$  ( $HE_{11}^x - HE_{11}^y$  моды). Если при введении в одномодовый СВ начальное состояние излучения обладало свойствами линейно-поляризованного излучения, то это свойство не сохраняется уже на достаточно коротких расстояниях и, таким образом, излучение оптического лазера становится эллиптически поляризованным.

Появление двух мод с ортогональными поляризациями обусловлено наличием нерегулярностей в волокне (тепловых, акустических и механических возмущений вдоль волокна, изгибов, технологических дефектов и прочее) [2]. При этом даже весьма малые возмущения значительно «связывают» моды, способствуя перекачке энергии из одной компоненты поляризации в другую. Очевидно, что статистическая связь между поляризационными модами определяется погонной плотностью перечисленных возмущений (нерегулярностей).

При наблюдении оптического излучения на выходе одномодового СВ с помощью фотодетектора регистрируются отсчеты, т.е. электрические импульсы на временном интервале наблюдения [1, 3, 4].

Представляет интерес нахождение статистики фотоотсчетов выходного излучения с учетом статистической связи поляризационными компонентами, обусловленными нерегулярностями вдоль СВ. Если располагать функцией корреляции между поляризационными компонентами излучения, связанной с плотностью нерегулярностей в волокне, то по статистике фотоотсчетов можно найти количественные характеристики таких нерегулярностей вдоль СВ и, следовательно, выработать требования к качеству выпускаемых оптических кабелей и установить допуски на их параметры при прокладке.

**2. Статистически независимые моды поляризации.** Известное решение [4, 5] задачи о статистике фотоотсчетов неполяризованного гауссового излучения получено для случая,



когда обе компоненты поляризации статистически независимы. Рассмотрим случай произвольной статистической связи между поляризационными компонентами в предположении, что статистическая связь между ними определяется воздействием неоднородностей СВ.

Пусть  $\alpha_n(t)$  – комплексная амплитуда [5,6] компонентов ( $n = 1, 2$ ) поляризации излучения. В рамках модели гауссовского излучения с лоренцевским контуром линии с шириной  $\nu$  примем, что каждый из компонентов является нормальным марковским процессом [2, 7], при этом корреляционная матрица интенсивностей  $S = \langle \alpha(t) \otimes \alpha^*(t) \rangle$  равна

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho^* \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \\ \rho \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\sigma_n = \langle |\alpha_n(t)|^2 \rangle$  – интенсивности поляризационных компонент,  $\rho$  – коэффициент корреляции ( $0 \leq |\rho| \leq 1$ ) между компонентами поляризации,  $\langle \cdot \rangle$  – знак нахождения математического ожидания.

Для одномодового (однокомпонентного) гауссовского излучения с интенсивностью  $\sigma_1$  известно выражение, описывающее производящую функцию (ПФ) числа фотоотсчетов

$$Q_1(\lambda, \sigma_1) = \langle \exp(-\lambda \Omega_1) \rangle, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – производящий параметр,  $\Omega_1$  – энергия оптического поля, запасенная в компоненте поляризации с ортом  $\vec{e}_1$ ,

$$\Omega_1 = \int_0^T dt |\vec{e}_1^* \alpha_1(t)|^2. \quad (3)$$

Производящая функция  $Q_1(\lambda, \sigma_1)$  для гауссовского излучения с лоренцевским контуром линии с шириной  $\nu$  имеет следующий вид [3, 5, 6]

$$Q_1(\lambda, \sigma_1) = \frac{4\nu r_1 \exp(\nu T)}{(r_1 + \nu)^2 \exp(r_1 T) - (r_1 - \nu)^2 \exp(-r_1 T)}. \quad (4)$$

При этом  $r_1 = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_1}$  и  $T$  – длительность интервала наблюдения.

Выражение для другой компоненты имеет аналогичный вид

$$Q_2(\lambda, \sigma_2) = \langle \exp(-\lambda \Omega_2) \rangle = \frac{4\nu r_2 \exp(\nu T)}{(r_2 + \nu)^2 \exp(r_2 T) - (r_2 - \nu)^2 \exp(-r_2 T)}, \quad (5)$$

где  $\Omega_2 = \int_0^T dt |\vec{e}_2^* \alpha_2(t)|^2$  с ортом  $\vec{e}_2$ ,  $r_2 = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_2}$ .

С помощью ПФ  $Q_1(\lambda, \sigma_1)$  и  $Q_2(\lambda, \sigma_2)$  можно извлечь информацию о распределении амплитуд вероятностей  $\{P(m)\}$  регистрации  $m$  фотоотсчетов одной (первой) из компонент

$$P_1(m) = \left\langle \frac{\Omega_1^m}{m!} \exp(-\Omega_1) \right\rangle \quad (6)$$

и аналогично для второй моды поляризации.

Распределение амплитуд вероятностей (6) является взвешенным распределением Пуассона, оно может быть получено из ПФ  $Q_1(\lambda, \sigma_1)$  с помощью многократного дифференцирования

$$P_1(m) = \frac{(-1)^m}{m!} \left. \frac{d^m}{d\lambda^m} Q_1(\lambda, \sigma_1) \right|_{\lambda=1}. \quad (7)$$



С целью избежать нахождения производных высоких порядков можно воспользоваться интегральным представлением Коши для аналитических функций

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (8)$$

с контуром интегрирования, охватывающим точку  $z$ .

Из (8) вытекает удобная для численных расчетов формула, описывающая статистику фотоотчетов поляризационной компоненты одномодового излучения

$$P_1(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} Q_1(1 + e^{i\varphi}, \sigma_1) d\varphi, \quad (9)$$

которая следует из (8) с помощью замены  $\xi = \exp(i\varphi)$ . Аналогичную формула получается и для  $P_2(m)$ .

**3. Произвольная статистическая связь между модами поляризации.** Для описания двухкомпонентного оптического излучения воспользуемся матричным аналогом интегральной формулы Коши. Тогда производящая функция  $Q_{12}(\lambda)$  отсчетов неполяризованного излучения может быть записана в виде

$$Q_{12}(\lambda) = \det \left( \frac{1}{2\pi i} \oint ds (s - S)^{-1} Q(\lambda, s) \right) \quad (10)$$

с  $2 \times 2$ -матрицей Стокса излучения. В этом выражении контур интегрирования в  $s$ -плоскости должен охватывать полюса резольвенты  $(s - S)^{-1}$ . Пользуясь известными методами [7], рассмотрим (10) в представлении, в котором матрица Стокса (1) диагональна, т.е.

$$S \Rightarrow S_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

с собственными числами матрицы  $S$

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left( (\sigma_1 + \sigma_2) \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4|\rho|^2 \sigma_1 \sigma_2} \right). \quad (12)$$

При наличии статистической связи между модами поляризации  $|\rho| \neq 0$  собственные числа  $s_1$  и  $s_2$  будут определять формирование статистики фотоотчетов.

Вычисляя, с учетом (11), матричные элементы в формуле (10) найдем, что

$$Q_{12}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i} \oint ds (s - s_1)^{-1} Q_1(\lambda, s) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi i} \oint ds (s - s_2)^{-1} Q_2(\lambda, s) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда получим окончательно для искомой производящей функции

$$Q_{12}(\lambda) = Q_1(\lambda, s_1) Q_2(\lambda, s_2). \quad (14)$$

Выражение (14) описывает статистику фотоотчетов неполяризованного излучения в случае наличия статистической связи между модами поляризации. Из него вытекает, что в случае



отсутствия статистической связи, когда  $|\rho| = 0$  и  $s_1 = \sigma_1$ ,  $s_2 = \sigma_2$ , ПФ  $Q_{12}(\lambda)$  есть простое произведение парциальных ПФ

$$Q_{12}(\lambda) = Q_1(\lambda, \sigma_1) Q_2(\lambda, \sigma_2) = \frac{4\nu r_1 \exp(\nu T)}{(r_1 + \nu)^2 e^{r_1 T} - (r_1 - \nu)^2 e^{-r_1 T}} \cdot \frac{4\nu r_2 \exp(\nu T)}{(r_2 + \nu)^2 e^{r_2 T} - (r_2 - \nu)^2 e^{-r_2 T}}, \quad (15)$$

отвечающих каждой из мод поляризации. При этом распределение  $P_{12}(m)$  представляет собой свертку парциальных распределений  $P_1(m)$  и  $P_2(m)$  со средними  $\langle m \rangle_1 = \sigma_1 T$  и  $\langle m \rangle_2 = \sigma_2 T$  соответственно, вычисляемых согласно (4), (5) и (10). В другом предельном случае полной статистической связи, когда  $|\rho| = 1$ , статистика фотоотсчетов эффективно отвечает одной регистрируемой поляризационной моде с суммарной интенсивностью  $s_1 = \sigma_1 + \sigma_2$ . При этом  $s_2 = 0$ , что дает  $Q_2(\lambda, \sigma_2) = 1$  и  $P_2(m = 0) = 1$ , т.е. во второй поляризационной компоненте с вероятностью, равной единице, имеет место только «отсчет»  $m = 0$ .

**4. Анализ распределения вероятностей.** В общем случае частичной статистической связи между модами поляризации, когда  $0 \leq |\rho| \leq 1$ , ПФ  $Q_{12}(\lambda)$  есть произведение ПФ  $Q_1(\lambda, \sigma_1)$  и  $Q_2(\lambda, \sigma_2)$ , отвечающих каждой из мод поляризации, но с эффективными интенсивностями  $s_1$  и  $s_2$ , определяемыми согласно (12).

Распределение амплитуд вероятностей  $P_{12}(m)$  является взвешенным распределением Пуассона, оно может быть получено из ПФ  $Q_{12}(\lambda)$ :

$$P_{12}(m) = \frac{(-1)^m}{m!} \left. \frac{d^m}{d\lambda^m} Q_{12}(\lambda) \right|_{\lambda=1}. \quad (16)$$

При этом распределение  $P_{12}(m)$  фотоотсчетов является сверткой парциальных распределений  $P_1(m)$  и  $P_2(m)$  со средними  $\langle m \rangle_1 = s_1 T$  и  $\langle m \rangle_2 = s_2 T$  соответственно

$$P_{12}(m) = \sum_{n=0}^{\infty} P_1(n) P_2(m-n), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

которые в случае  $|\rho| \neq 0$  отличаются от распределений амплитуд вероятностей  $P_1(m)$  и  $P_2(m)$  со средними  $\langle m \rangle_1 = \sigma_1 T$  и  $\langle m \rangle_2 = \sigma_2 T$ .

Первый момент распределения  $P_{12}(m)$  определяется формулой  $\langle m \rangle_{12} = (\sigma_1 + \sigma_2) T$ . Для дисперсии  $\Delta_{12}$  распределения числа фотоотсчетов найдем, следуя (15),

$$\Delta_{12} = \langle m^2 \rangle_{12} - \langle m \rangle_{12}^2 = \langle m \rangle_{12} + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2|\rho|^2) \frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{4\nu^2}. \quad (18)$$

Поскольку при  $\rho = 0$  имеем

$$\Delta_{12} = \Delta_1 + \Delta_2 = \sigma_1 T + \sigma_1^2 \frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{4\nu^2} + \sigma_2 T + \sigma_2^2 \frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{4\nu^2}, \quad (19)$$

и дисперсия  $\Delta_{12}$  (19) есть сумма парциальных дисперсий  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , то в дисперсии  $\Delta_{12}$  (18) содержится слагаемое  $\sigma_1\sigma_2|\rho|^2(2\nu T - 1 + e^{-2\nu T})/2\nu^2$ , являющееся дополнительным и отвечающее статистической связи между модами поляризации. Статистическая связь между модами приводит к уширению в целом распределения амплитуд  $P_{12}(m)$  при неизменном его первом моменте.



### Литература

1. Шереметьев А.Г. Статистическая теория лазерной связи / М.: Связь, 1974.
2. Шереметьев А.Г. Волоконный оптический гироскоп / М.: Радио и связь, 1987.
3. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / К.: Наукова думка, 1987.
4. Перина Я. Когерентность света / М.: Мир, 1974.
5. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М.: Мир, 1974.
6. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика отсчетов // в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика» / М.: Мир, 1974.
7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления / М.: Наука, 1984.

### PHOTOCOUNTS STATISTICS OF NONPOLARIZED GAUSSIAN OPTICAL RADIATION

A.S. Mazmanishvili

Sumy State University,  
Sumy, Ukraine, e-mail: [mazmanishvili@gmail.com](mailto:mazmanishvili@gmail.com)

**Abstract.** Photocounts statistics of nonpolarized Gaussian optical radiation is analytically found in the case when statistical connection between polarization modes exists.

**Key words:** quantum optical radiation, Ornstein-Uhlenbeck's process, polarization modes.