МАТЕМАТИКА

УДК 519.216.2

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ТЕКУЩИМИ СКОРОСТЯМИ [1)]

Ю.Е. Гликлих, А.В. Макарова

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: e-mail: yeg@math.vsu.ru

Аннотация. Доказана новая теорема о существовании решений дифференциальных включений с текущими скоростями, у которых и правая часть включения для текущих скоростей, и правая часть включения для квадратичной производной в среднем являются многозначными.

Ключевые слова: производные в среднем, текущие скорости, стохастические дифференциальные включения

Введение. Текущая скорость – это симметрическая производная в среднем траекторий случайного процесса, введенная Э. Нельсоном. Она является естественным аналогом обычной физической скорости детерминированной кривой. Ранее было показано, что если заданы текущая скорость и так называемая квадратичная производная в среднем (дающая информацию о коэффициенте диффузии процесса), то при некоторых условиях можно построить процесс, имеющий заданную текущую скорость и квадратичную производную. В работе рассматривается математическая задача, когда заданы многозначная текущая скорость и квадратичная производная, т.е. уравнение превращается во включение. В [1] было доказано утверждение о существовании решения такой задачи в случае, когда квадратичная производная задана однозначно. Заметим, что в [7, 10] была рассмотрена задача, которая является противоположной в следующем смысле: квадратичная производная многозначна, но имеет специальный тип, а текущая скорость однозначна (или она многозначна, но имеет гладкий однозначный селектор). В настоящей работе мы объединяем методы указанных работ и исследуем специальный класс включений с многозначными правыми частями. Для простоты мы рассматриваем указанные дифференциальные включения на плоском n-мерном торе. С одной стороны, геометрические свойства на этом многообразии унаследованы из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке, а с другой стороны, это компактное многообразие, что позволяет избежать многих технических трудностей.

Везде используется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся верхнему и нижнему индексу.

Предварительные сведения в нужном объеме по стохастическому анализу имеются в [5, 6], по теории многозначных отображений и включений – в [3].

[1]Исследование частично поддержано грантами РФФИ 10-01-00143 и 12-01-00183.

1. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{T}^n$ – плоский n-мерный тор. Мы рассматриваем случайные процессы $\xi(t)$, $t \in [0,T] \subset \mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{T}^n$, заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Для каждого такого процесса для фиксированного значения t обозначим через $\mathcal{P}_t^\xi$ σ-подалгебру $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ всеми отображениями $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ при $0 \leqslant s \leqslant t$. Эта σ-подалгебра называется алгеброй «прошлого» для процесса ξ.

Обозначим также для фиксированного значения t через $\mathcal{N}_t^\xi$ σ-подалгебру $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ отображением $\xi(t) : \Omega \to \mathcal{T}^n$, которая называется алгеброй «настоящего» для процесса ξ.

σ-алгебры $\mathcal{P}_t^\xi$ и $\mathcal{N}_t^\xi$ при всех t предполагаются полными, т.е. содержащими все множества вероятности ноль. Очевидным образом $\mathcal{N}_t^\xi$ является σ-подалгеброй в $\mathcal{P}_t^\xi$.

Пусть E_t^ξ – условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$.

(i) Производная справа $D\xi(t)$ процесса ξ определяется формулой

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \Big), \tag{1}$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\Delta t \to +0$ означает, что Δt стремится к нулю и при этом $\Delta t > 0$.

(ii) Производная слева $D_*\xi(t)$ определяется формулой

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \Big) \tag{2}$$

На основе этих понятий вводятся симметрическая производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ и антисимметрическая производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$.

Пусть векторы $v^\xi(t,m)$ и $u^\xi(t,m)$, $m \in \mathcal{T}^n$ таковы, что $D_S\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t))$ и $D_A\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t))$. Эти векторы существуют и они называются регрессиями. Вектор $v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$, а $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.

Рассмотрим автономное гладкое поле невырожденных линейных операторов $A(m) : \mathbb{R}^n \to T_m\mathcal{T}^n$, $m \in \mathcal{T}^n$. Предположим, что $\xi(t)$ – процесс диффузионного типа, у которого в диффузионном слагаемом подинтегральная функция равна $A(\xi(t))$. Тогда его коэффициент диффузии $A(m)A^*(m)$ является гладким полем симметрических положительно определенных тензоров типа $(2,0)$ с матрицами $\alpha(m) = (\alpha^{ij}(m))$. Поскольку все эти матрицы невырождены, поле обратных матриц (α_{ij}) существует и также является гладким. Кроме того, в каждой точке $m \in \mathcal{T}^n$ матрица $(\alpha_{ij})(m)$ симметрична и положительно определена. Поэтому рассматриваемое поле задает на $\mathcal{T}^n$ новую риманову метрику $\alpha(\cdot,\cdot) = \alpha_{ij}dq^idq^j$ (гладкое поле симметрических положительно определенных $(0,2)$ тензоров). Каждой матрице соответствует дифференциальная форма объема $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})}dq^1 \wedge dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^n$.

Обозначим через $\rho^\xi(t,m)$ вероятностную плотность процесса $\xi(t)$ относительно формы объема $dt \wedge \Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})}dt \wedge dq^1 \wedge dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^n$ на $[0,T] \times \mathcal{T}^n$, т.е. для любой непрерывной ограниченной функции $f : [0,T] \times \mathcal{T}^n \to \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\int\limits_0^T E(f(t,\xi(t)))dt = \int\limits_0^T \Big(\int\limits_\Omega f(t,\xi(t))d\mathsf{P}\Big)dt = \int\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} f(t,m)\rho^\xi(t,m)dt \wedge \Lambda_\alpha\,. \tag{3}$$

Тогда (см. [11])

$$u^\xi(t,m) = \frac{1}{2}\mathrm{Grad}\,\log\rho^\xi(t,m) = \mathrm{Grad}\,\log\sqrt{\rho^\xi(t,m)}\ , \tag{4}$$

где Grad обозначает градиент относительно римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$.

Для $v^\xi(t,m)$ и $\rho^\xi(t,m)$ выполняется так называемое уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho^\xi(t,m)}{\partial t} = -\mathrm{Div}(v^\xi(t,m)\rho^\xi(t,m))\,, \tag{5}$$

где Div обозначает дивергенцию относительно римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$ (см. [11]).

Следуя [1] (см. также [6]), определим дифференцирование D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi\left(\frac{(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^*}{\Delta t}\right)\,, \tag{6}$$

где $(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))$ – вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^*$ – вектор строка (транспонированный или сопряженный вектор). Результат этого матричного произведения – матрица ранга 1, но после взятия условного математического ожидания и перехода к пределу $D_2\xi(t)$ становится симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0,T]\times\mathbb{R}^n$. D_2 называется квадратичной производной в среднем. Она принимает значения в множестве симметрических неотрицательно определенных тензоров (матриц) типа $(2,0)$.

Текущая скорость является физически правильным аналогом обычной скорости неслучайных процессов. Поэтому, с физической точки зрения, важно исследовать уравнения и включения с текущими скоростями. При этом необходимо также знать информацию о квадратичной производной в среднем.

Пусть $v(t,m)$ – векторное поле, $\alpha(t,m)$ – симметрическое неотрицательно определенное $(2,0)$-тензорное поле на торе $\mathcal{T}^n$. Система

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_S\xi(t) &=& v(t,\xi(t))\,, \\ D_2\xi(t) &=& \alpha(t,\xi(t)) \end{array}\right. \tag{7}$$

называется *уравнением с текущими скоростями первого порядка.*

Определение 1. *Говорят, что (7) на $\mathcal{T}^n$ имеет решение на $[0,T]$ с начальным условием $\xi(0)=\xi_0$ если существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и процесс, $\xi(t)$ заданный на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и принимающий значения в $\mathcal{T}^n$ такой, что $\xi(0)=\xi_0$ и для почти всех $t\in[0,T]$ уравнение (7) выполняется P-п.н. для $\xi(t)$.*

Теорема 1. *Пусть $v : [0,T]\times\mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^n$ – гладкое отображение и отображение $\alpha : \mathcal{T}^n \to \mathrm{S}_+(n)$ – гладкое и автономное, которое определяет риманову метрику $\alpha(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{T}^n$, введенную выше. Пусть ξ_0 – случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, у которого вероятностная плотность ρ_0 относительно формы объема Λ_α метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{T}^n$ (см. выше) является гладкой и нигде не равной нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ уравнение (7) имеет решение, которое существует на всем отрезке $t\in[0,T]$.*

Теорема 1 является простым следствием [1, теорема 4.1] (см. также [6, Теорема 8.50]). Здесь мы используем тот факт, что на компактном многообразии $\mathcal{T}^n$ правая часть уравнения (7) равномерно ограничена, т.е. выполнено условие [1, Теорема 4.1].

Введем $p_0 = \ln\rho_0$ и рассмотрим $p(t,m) = \ln\,\rho^\xi(t,m)$, где $\rho^\xi(t,m)$ – плотность (3), соответствующая решению $\xi(t)$ уравнения (7). В доказательстве [1, Теорема 4.1] (см. также [6, Теорема 8.50]) показано, что $p(t,m)$ корректно определено и имеет вид

$$p(t,m) = p_0(g_{-t}(m)) - \int_0^t (\mathrm{Div}\ v)(s, g_s(g_{-t}(m))\ ds, \tag{8}$$

где Div – дивергенция относительно $\alpha(\cdot,\cdot)$, а g_t – поток гладкого векторного поля $v(t,m)$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha(m)$, $\rho(t,m)$ и Λ_α – такие же, как в Теореме 1 и в формуле (8). Пусть также векторное поле v из Теоремы 1 автономно. Тогда поток $\hat{g}_t$ векторного поля $(1, v(m))$ на $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ сохраняет дифференциальную форму объема $\rho(t,m)dt\wedge\Lambda_\alpha$ (т.е. $\hat{g}_t^*(\rho(t,m)dt\wedge\Lambda_\alpha) = \rho_0(m)dt\wedge\Lambda_\alpha$, где $\hat{g}_t^*$ – обратный образ) и, таким образом, для любого измеримого множества $Q\subset\mathbb{R}^n$ и любого $t\in[0,T]$*

$$\int\limits_Q \rho_0(m)\Lambda_\alpha = \int\limits_{g_t(Q)} \rho(t,m)\Lambda_\alpha\,.$$

Доказательство Леммы 1 имеется в [1] (лемма 4.2).

2. Некоторые технические конструкции. Везде далее мы обозначаем через $S_+(n)$ множество симметрических положительно определенных $n\times n$ матриц.

В [1] на основе разложения Гаусса показано, что каждая матрица $\alpha\in S_+(n)$ представима в виде $\alpha = \zeta\delta\zeta^*$, где ζ – нижне-треугольная матрица с единицами на диагонали, ζ^* – ее транспонированная, т.е. верхне-треугольная матрица с единицами на диагонали, и δ – диагональная матрица, чьи угловые миноры (отметим, что все они положительны) совпадают с угловыми минорами матрицы α. Обозначим диагональные элементы матрицы δ через $\delta_1,\ldots,\delta_n$. Тогда $A = \zeta\sqrt{\delta}$, где $\sqrt{\delta}$ – диагональная матрица с $\sqrt{\delta_1},\ldots,\sqrt{\delta_n}$ на диагонали такова, что $\alpha = AA^*$.

Если при $t\in\mathbb{R}$ и $m\in\mathcal{T}^n$ поле $\alpha(t,m)$ непрерывно (измеримое, гладкое), то $A(t,m)$ тоже непрерывно (измеримое, гладкое, соответственно).

Обозначим через $\mathsf{T}_-(n)$ множество нижне-треугольных $n\times n$-матриц с нулями на диагонали. Это линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех $n\times n$-матриц. Очевидно, что матрица ζ, введенная выше, принадлежит линейному подмногообразию $\mathsf{T}_-(n)+I$ в $\mathbb{R}^{n^2}$, где I – единичная $n\times n$ матрица. Обозначим через $\mathsf{T} : S_+(n)\to\mathsf{T}_-(n)$ гладкое отображение $\alpha\in S_+(n)$ в

$$\mathsf{T}\alpha = \zeta - I \in \mathsf{T}_-(n)\,, \tag{9}$$

а через S_{LC} – множество симметрических положительно определенных матриц с постоянным (равным $C > 0$) определителем. В частности, это означает, что $\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_n = \mathrm{const} = C$, а $\sqrt{\delta_1} \cdot \ldots \cdot \sqrt{\delta_n} = \sqrt{C}$, где точка обозначает произведение.

Пусть $\mathsf{L}_0(n)$ – линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов $X = (X^1, \ldots, X^n)$ таких, что $X^1 + \ldots + X^n = 0$. Введем гладкое отображение $\mathsf{L}_\mathsf{C} : S_{LC} \to \mathsf{L}_0$, переводящее симметрическую матрицу $\alpha \in S_{LC}$ в

$$\mathsf{L}_\mathsf{C}(\alpha) = \left(\ln \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{C}}, \ldots, \ln \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{C}}\right) \in \mathsf{L}_0(n)\,. \tag{10}$$

Отметим, что $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_0(n)$ – линейные пространства, т.е. понятие выпуклого множества в них корректно определено.

Лемма 2 [10]. *Для любого гладкого автономного $(2,0)$-тензорного поля $\alpha(m)$ на плоском торе $\mathcal{T}^n$ со значениями в S_{LC}:*

(i) Форма объема Λ_α соответствующей римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$ (см. выше) равна $\sqrt{C}\Lambda_E$, где Λ_E – форма объема евклидовой метрики на $\mathcal{T}^n$, унаследованной из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке.

(ii) Для любого гладкого векторного поля $v(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ его дивергенция $\mathrm{Div}\, v$ относительно Λ_α совпадает с обычной дивергенцией $\mathrm{div}\, v$ (т.е. относительно Λ_E).

(iii) Для любого случайного элемента со значениями в $\mathcal{T}^n$ его плотность распределения относительно Λ_α равна плотности распределения относительно Λ_E, деленной на $\sqrt{C}$.

□ Действительно, $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})}\, dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n$ и поскольку $\det(\alpha_{ij}) = C$, то $\Lambda_\alpha = \sqrt{C}\Lambda_E = C dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n$.

Напомним, что дивергенция $\mathrm{Div}\, v$ находится из равенства

$$\mathcal{L}_v \Lambda_\alpha = (\mathrm{Div} v)\Lambda_\alpha\,,$$

где $\mathcal{L}_v$ – производная Ли вдоль v (см. подробности, например, в [6]). Напомним также, что $\mathcal{L}_v\Lambda_\alpha = d(v\rfloor\Lambda_\alpha)$, где $\rfloor$ обозначает внутреннее произведение векторов и дифференциальных форм. Поскольку C постоянно, то $d(v\rfloor\Lambda_\alpha) = \dfrac{\partial v^i}{\partial q^i}\sqrt{C}\Lambda_E = \dfrac{\partial v^i}{\partial q^i}\Lambda_\alpha$. Следовательно, $\mathrm{Div} v = \dfrac{\partial v^i}{\partial q^i} = \mathrm{div} v$.

Утверждение (iii) вытекает из (i). ■

3. Включения с текущими скоростями. Пусть $v(t,m)$ – многозначное векторное поле, $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ – многозначное симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in v(t,\xi(t))\,, \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t))\,. \end{cases} \tag{11}$$

называется дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка. Понятие решение включения (11) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введенному в Определении 1.

Напомним (см. [3]) следующее

Определение 2. *Пусть X и Y – метрические пространства. Для заданного $\varepsilon > 0$ непрерывное однозначное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ называется ε-аппроксимацией многозначного отображения $F : X \to Y$, если график отображения f, как множество в $X \times Y$, лежит в ε-окрестности графика отображения F.*

Известно (см., например, [3]), что для полунепрерывного сверху многозначного отображения с выпуклыми замкнутыми образами точек в нормированном линейном пространстве ε-аппроксимации существуют при любом $\varepsilon > 0$.

Мы накладываем на $v(t,m)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ следующие условия.

Условие 1. *Многозначное векторное поле $v(m)$ на $\mathbb{T}^n$ автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы. Существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$ такая, что для любого ε_k поле $v(m)$ имеет гладкую ε_k-аппроксимацию $v_i(m)$ и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой по совокупности $t \in [0,T]$ и $m \in \mathbb{T}^n$ первые частные производные $\dfrac{\partial v_i}{\partial m_j}$.*

Условие 2.

(i) Многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}$ на $\mathcal{T}^n$ принимает значения в S_{LC}; оно автономно и полунепрерывно сверху.

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ замкнуты и равномерно ограничены.

(iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ множество $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{T}_-(n)$ и множество $\mathsf{L}_\mathsf{C}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{L}_0(n)$.

Лемма 3. *При выполнении Условия 1 многозначное векторное поле $v(t,m)$ имеет непрерывный селектор, к которому равномерно сходится подпоследовательность последовательности аппроксимаций $v_i(m)$ при $i \to \infty$.*

□ Действительно, из теоремы Асколи (см. [9]) нетрудно вывести, что при выполнении Условия 2 последовательность $v_i(t,m)$ компактна в пространстве непрерывных векторных полей на $\mathcal{T}^n$. ■

Теорема 2. *Пусть многозначное векторное поле $v(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ удовлетворяет Условию 1, а многозначное $(2,0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(m)$ удовлетворяет Условию 2. Пусть ξ_0 – случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, у которого распределение относительно формы объема Λ_E равно $\sqrt{C}\rho_0$, где ρ_0 – гладкое и нигде не равное нулю распределение. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (11) имеет решение, определенное на всем интервале $t \in [0,T]$.*

□ Так как отображения T и L_C гладкие, многозначные отображения $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{L}_0(n)$ полунепрерывны сверху, поскольку таковым является $\boldsymbol{\alpha}$. По Условию 2 их значения выпуклы, замкнуты и равномерно ограничены. Тогда по [2, Теорема 2] (см. также [6, Теорема 4.11]) для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$ существуют последовательности однозначных непрерывных ε_q-аппроксимаций, которые поточечно сходятся к борелевским селекторам полей $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$, соответственно. Выберем указанные последовательности аппроксимаций для последовательности $\varepsilon_k \to 0$ из Условия 1. Без ограничения общности все эти аппроксимации можно считать гладкими. Так что существует последовательность $\alpha_k(m)$ однозначных гладких и равномерно ограниченных $(2,0)$-тензорных полей из S_{LC}, которая поточечно сходится к борелевскому селектору $\alpha(m)$ многозначного поля $\boldsymbol{\alpha}(m)$. Компоненты поля $\alpha_k(m)$ мы обозначаем α_k^{ij}.

Построим римановы метрики $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ из тензорных полей $\alpha_k(m)$, как было указано выше. Рассмотрим, далее, последовательность уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} D_S\xi(t) & = & v_k(\xi(t))\,, \\ D_2\xi(t) & = & \alpha_k(\xi(t))\,. \end{array}\right. \tag{12}$$

Отметим, что по Лемме 2 для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0, поскольку его плотности относительно всех $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ совпадают между собой. Все уравнения (12) удовлетворяют условиям Теоремы 1 так, что для каждого уравнения существует решение. Решение k-го уравнения обозначим $\xi_k(t)$.

Для решения $\xi_k(t)$ осмотическая скорость имеет вид

$$u_k(t,m)=\frac{1}{2}\mathrm{Grad}_k\, p_k(t,m),$$

где Grad_k – градиент относительно $\alpha_k(\cdot,\cdot)$, а $p_k(t,m)$ построено по формуле (8). По определению этого градиента его координатное представление имеет вид $(\mathrm{Grad}_k p_k(t,m))^i = \alpha_k^{ij}\dfrac{\partial p_k}{\partial q^j}$.

Введем векторные поля $a_k(t,m)=v_k(t,m)+u_k(t,m)$.

По Лемме 1 $\rho_i(t,m)dt\wedge dq^1\wedge\cdots\wedge dq^n = \hat{g}_t^{(i)*}\rho_0(t,m)dt\wedge dm_1\wedge\cdots\wedge dq^n$, где $\hat{g}_t^{(i)}$ поток векторного поля $(1,v_i)$ на $[0,1]\times\mathbb{T}^n$. Следовательно $\dfrac{\partial\rho_i}{\partial m_j}$ равно $\left(T\hat{g}_{-t}\dfrac{\partial}{\partial m^j}\right)\rho_0$, производной ρ_0 по направлению векторного поля $\left(T\hat{g}_{-t}\dfrac{\partial}{\partial m^j}\right)$, где $T\hat{g}_{-t}$ касательное отображение для $\hat{g}_{-t}$. Поскольку все частные производные всех v_i равномерно ограничены одинаковой константой, то все $T\hat{g}_{-t}$ также равномерно ограничены одинаковой константой, и мы получаем, что производные $\dfrac{\partial\rho_i}{\partial m_j}$ равномерно ограничены одной и той же константой при всех $i=1,\ldots,\infty$ и всех $j=1,2,\ldots,n$ так же, как все $\dfrac{\partial p_i}{\partial m^j}$. Таким образом, все векторные поля $\mathrm{Grad}_k\, p_k$ при всех k равномерно ограничены одинаковой константой. Так как все $v_k(m)$ очевидным образом тоже равномерно ограничены одинаковой константой, это означает, что все $a_k(t,m)$ равномерно ограничены одной и той же константой.

Как сказано в разд. 1, каждое поле $\alpha_k(m)$ представимо в виде $\alpha_k(m)=A_k(m)A_k^*(m)$.

Рассмотрим на $\mathcal{T}^n$ последовательность стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито

$$\xi_k(t)=\xi_0+\int_0^t a_k(s,\xi(s))ds+\int_0^t A_k(s,\xi(s))dw(s). \tag{13}$$

Поскольку коэффициенты уравнений (13) при всех k гладкие и ограничены, каждое уравнение имеет единственное сильное решение, определенное на всем отрезке $[0,T]$.

На банаховом многообразии $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ-алгебру $\mathcal{C}$, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных под-σ-алгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, $t\in[0,T]$, и семейство полных под-σ-алгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ при отображении $x(\cdot)\mapsto x(t)$. Понятно, что $\mathcal{N}_t$ является под-σ-алгеброй в $\mathcal{P}_t$.

Так как уравнения (13) можно рассматривать как уравнения на $\mathbb{R}^n$ с пространственно-периодическими коэффициентами, мы можем применить [4, Следствие III.2] и получить утверждение о том, что множество $\{\mu_k\}$ мер на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$ слабо компактно. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности можно считать, что последовательность μ_k слабо сходится к μ. Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C},\mu)$, т.е. для каждого элементарного события $m(\cdot)\in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,m(\cdot))=m(t)$. Отметим, что $\mathcal{P}_t$ является «прошлым» для $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ – «настоящим».

По построению $D_S\xi_k(t)=v_k(t,\xi_k(t))$ при любом k. Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)-v_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k=0\,.$$

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Так как μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k>K(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\|\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}&[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu_k\\&-\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu\|<\varepsilon\end{aligned}$$

и

$$\|\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu_k-\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu\|<\varepsilon.$$

Наконец, так как $v_k(t,m)$ равномерно сходятся к $v(t,m)$, то равномерно для всех μ_i, включая μ, и равномерно по t

$$\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v_k(m(t))d\mu_i\to\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_i$$

при $k\to\infty$, т.е. для любого $\varepsilon_1>0$ существует K_1 такое, что при $k>K_1$ при всех i и при всех $t\in[0,T]$

$$\|\int_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v_k(m(t))d\mu_i-\int_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_i\|<\varepsilon_1$$

Тогда при $k > \max(K, K_1)$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t) - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k -$$

$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t) - v_k(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu \| <$$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu_k -$$

$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu \| +$$

$$+ \| \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v_k(m(t)) d\mu_k - \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_k \| +$$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu_k - \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu \| < 2\varepsilon + \varepsilon_1 .$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t) - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu = 0 \, .$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, отсюда вытекает, что

$$D_S \xi(t) = v(\xi(t)). \tag{14}$$

Напомним, что по построению $v(\xi(t)) \in v(\xi(t))$ μ-п.н.

По построению, для любого $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi_k(t))$. Это означает, что для любой функции $f(m(\cdot))$ как было указано выше

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^* - \alpha_k(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0 \, .$$

Так как $\alpha_k(t,m)$ стремится к $\alpha(t,m)$ при $k\to\infty$ поточечно, $\alpha_k(t,m)$ стремится к $\alpha(t,m)$ п.н. относительно всех мер μ_k и относительно μ. Выберем $\delta > 0$. По теореме Егорова (см., например, [8]) для любого i существует подмножество $\tilde{K}^i_\delta \subset C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ такое, что $(\mu_i)(\tilde{K}^i_\delta) > 1-\delta$ и последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde{K}^i_\delta$. Введем $\tilde{K}_\delta = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{K}^i_\delta$. Последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde{K}_\delta$ при всех i и $\mu(\tilde{K}_\delta) > 1-\delta$.

Поле $\alpha(m(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_i \to 0$ и соответствующую последовательность $\tilde{K}_{\delta_i}$. По построению $\alpha(m(t))$ является равномерным пределом последовательности непрерывных функций на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$. Поэтому $\alpha(m(t))$ непрерывно на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$, т.е. и на любом конечном объединении $\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}$. Очевидным образом $\lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}) = 1$.

Из-за описанной выше равномерной сходимости на $\tilde{K}_\delta$ при всех k мы выводим из ограниченности $f(m(\cdot))$, что при достаточно большом k

$$\| \int_{\tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < \delta\,.$$

Так как $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(m(\cdot))| < \Xi$ для всех $m(\cdot)$. Напомним, что все $\alpha_k(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, т.е. их нормы не превосходят некоторого числа $Q > 0$. Тогда, поскольку

$$\mu_k(C^0([0,T],\mathcal{T}^n) \backslash \tilde{K}_\delta) < \delta$$

при всех достаточно больших k, то

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)\backslash \tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < 2\delta Q\,\Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ – произвольное положительное число, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0\,.$$

Функция $\alpha(m(t))$ – μ-п.н. непрерывна и ограничена на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ (см. выше). Так как к тому же меры μ_k слабо сходятся к μ, то по лемме из [4, VI.1]

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu_k = \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu.$$

Очевидным образом,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*] f(m(\cdot)) d\mu_k$$

$$= \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*] f(m(\cdot)) d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^* - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu = 0.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, это означает, что $D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t)) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

Вместе с (14) это означает, что $\xi(t)$ является искомым решением включения (11). ■

Литература

1. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. Differential inclusions with mean derivatives // Dynamic systems and applications. – 2007. – 16. – P.49-72.
2. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E., Obukhovskii A.V. Solvability of Langevin differential inclusions with set-valued diffusion terms on Riemannian manifolds // Applicable Analysis. – 2007. – 86;9. – P.1105-1116.
3. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / М: Комкнига, 2005. – 215 с.
4. Гихман И.В., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т.3 / М.: Наука, 1975. – 496 с.
5. Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / М.: Комкнига, 2005. – 416 с.
6. Gliklikh Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / London: Springer-Verlag, 2011. – 460 p.
7. Gliklikh Yu.E., Makarova A.V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities // Applicable Analysis (in print)
8. Иосида К. Функциональный анализ / М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Келли Дж.Л. Общая топология / М.: Наука, 1968. – 432 с.
10. Makarova A.V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II // Global and Stochastic Analysis. – 2012. – 2;1. – P.101-112.
11. Nelson E. Quantum fluctuations /Princeton: Princeton University Press, 1985. – 147 p.

ON SOLUTION EXISTENCE THEOREM FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH CURRENT VELOCITIES

Yu.E. Gliklikh, A.V. Makarova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: e-mail: yeg@math.vsu.ru

Abstract. New solution existence theorem is proved for differential inclusions with current velocities where inclusion right-hand sides both for current velocities and for quadratic mean derivatives are set-valued.

Key words: mean derivatives; current velocities; stochastic differential inclusions.