УДК 517.983

ФУНКЦИЯ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ [10)]

Т.А. Манаенкова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, e-mail: Manaenkova@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача о вычислении функции Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля. Приводятся условия ее корректной разрешимости.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с дробной производной, функция Коши.

Пусть A — линейный замкнутый оператор, плотно определенный в банаховом пространстве X с областью определения $D(A)$ и непустым резольвентным множеством. При $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$ рассмотрим следующую задачу типа Коши

$$D^{\alpha}_{0+}u(t) = Au(t)\,, \qquad t > 0\,, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0+} D^{\alpha-1}_{0+}u(t) = u_{n-1}\,, \quad \lim_{t\to 0+} D^{\alpha-k}_{0+}u(t) = 0\,, \quad k = 2, ..., n\,. \tag{2}$$

где $D^{\alpha}_{0+}u(t) = \dfrac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\alpha}_{0+}u\right)(t)$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$, $I^{\beta}_{0+}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\,u(s)\,ds$ – левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$ (см. [1, с. 41], [2, с. 69]), $u_{n-1} \in D(A)$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Для задачи (1), (2) мы приведем условия ее корректной разрешимости. Разрешающий оператор этой задачи мы назовем функцией Коши. С ее помощью будет построено решение задачи типа Коши для неоднородного уравнения.

Определение 1. *Решением задачи (1), (2) называется функция $u(t)$ такая, что имеют место включения $u(t) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$, $I^{k-\alpha}_{0+}u(t) \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+, X)$ для $k = 0, 1, ..., n-1$, $I^{n-\alpha}_{0+}u(t) \in C^n(\overline{\mathbb{R}}_+, X)$, и удовлетворяющая (1), (2).*

Определение 2. *Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если при любых $u_{n-1} \in D(A)$ существует единственное решение $u(t; u_{n-1})$ задачи (1), (2) и если $u_{n-1,m} \in D(A)$, $u_{n-1,m} \to 0$ при $m \to \infty$ влечет $u(t; u_{n-1,m}) \to 0$ при $m \to \infty$, равномерно по t на любом компактном интервале из $(0, \infty)$.*

[10]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357)

Применим к уравнению (1) оператор I^{α}_{0+}. Учитывая равенство (см. [1, с. 50], [2, с. 74])

$$I^{\alpha}_{0+}D^{\alpha}_{0+}u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{\alpha-k-1}_{0+}u(0)}{\Gamma(\alpha-k)}\, t^{\alpha-k-1} \tag{3}$$

и граничные условия (2), можно утверждать, что задача (1), (2) равномерно корректна только тогда, когда следующее интегральное уравнение типа Вольтерра

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, u_{n-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\,\alpha-1} Au(s)\, ds\,, \qquad t>0\,, \tag{4}$$

равномерно корректно в смысле Определения 3, которое мы приводим далее.

Определение 3. *Интегральное уравнение (4) называется равномерно корректным, если для каждого $u_{n-1} \in D(A)$ существует единственное решение $u(t; u_{n-1}) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$ этого уравнения и если $u_{n-1,k} \in D(A)$, $u_{n-1,k} \to 0$ при $k \to \infty$ влечет сходимость $u(t; u_{n-1,k}) \to 0$ равномерно по t на любом компактном интервале из $(0,\infty)$.*

Пусть $\mathcal{B}(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X. Определим разрешающий оператор задачи (1), (2).

Определение 4. *Операторная функция $K_\alpha(t) \in \mathcal{B}(X)$ называется разрешающим оператором для задачи (1), (2), если выполнены следующие условия:*

(i) $K_\alpha(t)$ сильно непрерывна при $t>0$ и $D^{\alpha-1}_{0+}K_\alpha(0) = I$,

(ii) $K_\alpha(t)$ коммутирует с A, то есть, $K_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ и $AK_\alpha(t)u_{n-1} = K_\alpha(t)Au_{n-1}$ для любого $u_{n-1} \in D(A)$ и $t>0$,

(iii) $K_\alpha(t)u_{n-1}$ является решением задачи (1), (2) для любого $u_{n-1} \in D(A)$ и $t>0$.

Определение 5. *Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$, если задача (1), (2) имеет разрешающий оператор $K_\alpha(t)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\|K_\alpha(t)\| \leqslant M(t)e^{\omega t}\,, \quad t>0\,, \tag{5}$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ и функция $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ и $K_\alpha(t)$ – соответствующий разрешающий оператор. При $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ определим преобразование Лапласа для разрешающего оператора

$$\widehat{K}_\alpha(\lambda)u_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}K_\alpha(t)u_{n-1}\, dt\,, \quad u_{n-1} \in X\,.$$

Учитывая оценку (5), можно утверждать, что $\widehat{K}_\alpha(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$. Используя свойства (ii) и (iii) Определения 4 и тождество [см. 2, с. 284] для преобразования Лапласа дробных производных

$$L[D^\alpha_{0+}u](\lambda) = \lambda^\alpha L[u](\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1}D^{\alpha-k}_{0+}u(0)\,, \tag{6}$$

после преобразования Лапласа, из (1), (2) получим следующие соотношения:

$$\lambda^\alpha \widehat{K}_\alpha(\lambda)u_{n-1} - u_{n-1} = A\widehat{K}_\alpha(\lambda)u_{n-1}\,, \quad u_{n-1} \in X\,;$$

$$\lambda^\alpha \widehat{K}_\alpha(\lambda)u_{n-1} - u_{n-1} = \widehat{K}_\alpha(\lambda)Au_{n-1}\,, \quad u_{n-1} \in D(A)\,.$$

Лемма. *Пусть* $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$, *тогда оператор* $(\lambda^\alpha I - A)$ *обратим и* $\widehat{K}_\alpha(\lambda) = R(\lambda^\alpha, A)$, *то есть множество* $\{\lambda^\alpha : Re\,\lambda > \omega\}$ *включено в* $\rho(A)$ *и*

$$R(\lambda^\alpha, A)u_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_\alpha(t)u_{n-1}\,dt\,, \quad u_{n-1} \in X\,. \tag{7}$$

Доказательство приводимых далее теорем 1-6 аналогично доказательству соответствующих теорем из [3] и мы его опускаем.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, *тогда* $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ *и оператор* $D^{\alpha-1}_{0+}K_\alpha(t)$ *непрерывен в равномерной операторной топологии только тогда, когда* $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 2. *Пусть* $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ *для некоторого* $\alpha > 2$ *и*

$$\int_0^\infty e^{-\nu t}M(t)dt \;\le\; \frac{C_1}{\nu^\alpha}\,, \qquad \nu > 0\,, \quad C_1 > 0\,. \tag{8}$$

Тогда $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha \le 2$. *В этом случае* $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ *и*

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda-\omega)^n}{n!}\left\|\frac{d^nR(\lambda^\alpha,A)}{d\lambda^n}\right\| \le C_2\,, \quad \lambda > \omega\,,\ C_2 > 0\,. \tag{9}$$

Теорема 4. *Пусть* $0 < \alpha \le 2$. *Тогда* $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ *и существует сильно непрерывная операторная функция* $K(t)$, *удовлетворящая неравенству* $\|K(t)\| \leqslant M(t)e^{\omega t}$, $\ t > 0$, $\ M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *такая, что*

$$R(\lambda^\alpha, A)u_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}K(t)u_{n-1}\,dt, \quad u_{n-1} \in X\,. \tag{10}$$

В этом случае $K_\alpha(t) = K(t)$.

Теорема 5. *Если* A *является генератором сильно непрерывной* C_0*-полугруппы, то* $A \in \mathcal{H}^\alpha(M, \omega^{1/\alpha})$ *для каждого* $\alpha \in (0,1)$ *с некоторой функцией* $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 6. *Пусть* $\alpha > 0$. *Если* $K_\alpha(t)$ *– разрешающий оператор (1), (2), то*

$$Au_{n-1} = \Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to 0+}\frac{D^{\alpha-1}_{0+}K_\alpha(t)u_{n-1} - u_{n-1}}{t^\alpha} \tag{11}$$

для тех $u_{n-1} \in X$, *для которых этот предел существует.*

Рассмотрим теперь неоднородную задачу при $\alpha > 0$ и нулевых начальных условиях

$$D^\alpha_{0+}u(t) = Au(t) + f(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{12}$$

$$\lim_{t\to 0+} D_{0+}^{\alpha-k}u(t) = 0\,, \quad k = 1, 2, ..., n\,. \tag{13}$$

Теорема 7. *Пусть* $A \in \mathcal{H}^\alpha(M, \omega)$, *функция* $M(t)$ *такая, что для* $t \in [0, 1]$

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} M(\tau)\, d\tau \le C_2,$$

а функция $f(t) \in C\left((0,\infty), X\right)$ *абсолютно интегрируема в нуле, принимает значения в* $D(A)$, $Af(t) \in C\left((0,\infty), X\right)$ *и также абсолютно интегрируема в нуле. Тогда функция*

$$u(t) = \int_0^t K_\alpha(t-s) f(s)\, ds\,, \tag{14}$$

является решением задачи (12), (13).

□

При $t > 0$ имеем

$$D_{0+}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \int_0^\tau K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \int_\xi^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\, d\tau\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x) f(\xi)\, dx\, d\xi.$$

Поскольку под знаком интеграла по ξ находится непрерывная по $t-\xi$ функция, то

$$D_{0+}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \lim_{\xi\to t} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x) f(\xi)\, dx +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_0^t \frac{d}{dt} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x) f(\xi)\, dx\, d\xi =$$

$$= \lim_{s\to+0} D_{0+}^{\alpha-1} K_\alpha(s) f(t) +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \lim_{\xi\to t} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x) f(\xi)\, dx +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \int_0^t \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x) f(\xi)\, dx\, d\xi =$$

$$= f(t) + \lim_{s\to+0} D_{0+}^{\alpha-2} K_\alpha(s) f(t) +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \int_0^t \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x) f(\xi)\, dx\, d\xi = ... =$$

$$= f(t) + \int_0^t D_{0+}^{\alpha} K_\alpha(t-\xi) f(\xi)\, d\xi = f(t) + \int_0^t K_\alpha(t-\xi) A f(\xi)\, d\xi = f(t) + Au(t)\,.$$

Следовательно, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (12).

Проверим далее, что функция $u(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям (13). Рассмотрим сначала $D_{0+}^{\alpha-n}u(t)$. Имеем

$$\lim_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-n} u(t) = \lim_{t\to+0} I_{0+}^{n-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lim_{t\to+0} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \int_0^\tau K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\, d\xi\,.$$

Поскольку для $K_\alpha(t)$ справедлива оценка (5), то для $t \in [0,1]$

$$\left\| \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \int_0^\tau K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\, d\xi \right\| \leqslant \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \int_0^\tau M(\tau-\xi) \|f(\xi)\|\, d\xi =$$

$$= \int_0^t \|f(\xi)\|\, d\xi \int_0^{t-\xi} (t-\xi-\eta)^{n-\alpha-1} M(\eta)\, d\eta \le C_2 \int_0^t \|f(\xi)\|\, d\xi\,.$$

Следовательно $\lim\limits_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-n} u(t) = 0$.

Далее, рассмотрим образ $D^{\alpha-n+k}u(t)$ при $k=1$

$$D_{0+}^{\alpha-n+1} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \int_0^\tau K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lim_{\xi\to t} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x) f(\xi)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t f(\xi)\, d\xi \frac{d}{dt} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x)\, dx =$$

$$= \lim_{s\to+0} D_{0+}^{\alpha-n} K_\alpha(s) f(\xi) + \int_0^t D_{0+}^{\alpha-n+1} K_\alpha(t-\xi)\, f(\xi)\, d\xi\,.$$

Переходя к пределу при $t \to +0$ и учитывая условия (2), получим

$$\lim_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-n+1} u(t) = 0.$$

Продолжая далее аналогичные рассуждения для любого $k < n$ на основе того, что $\lim\limits_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-n+(k-1)} u(t) = 0$, дойдем до случая $k = n-1$

$$D_{0+}^{\alpha-1} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \int_0^\tau K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \lim_{s\to+0} D_{0+}^{\alpha-k} K_\alpha(s) f(\xi) + \int_0^t D_{0+}^{\alpha-1} K_\alpha(t-\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Переходя к пределу при $t \to +0$ и учитывая условия (2), получим

$$\lim_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-1} u\,(t) = 0\,.$$

Следовательно, функция $u(t)$, заданная формулой (14), удовлетворяет нулевым начальным условиям (13). ■

Пример. Заметим, что:

1) при $0 < \alpha < 1$, $K_\alpha(t) = T_\alpha(t)$, где $T_\alpha(t)$ – разрешающий оператор рассмотренной в [3] задачи

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = Au(t)\,, \qquad t > 0\,,$$

$$\lim_{t\to 0+} D_{0+}^{\alpha-1} u(t) = u_0\,;$$

2) если $\alpha = 1$, то $K_1(t)$ – C_0-полугруппа и A – ее генератор;

3) если $\alpha = 2$, то $K_2(t)$ – синус оператор-функция и A – генератор соответствующей косинус оператор-функция;

4) если оператор A ограничен и $\alpha > 2$, то $K_\alpha(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)$.

В заключение заметим, что неоднородное дифференциальное уравнение порядка $1+\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ с регуляризованной дробной производной и позитивным оператором A было исследовано в [4] методом сумм Да Прато и Гривара.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations / Math. Studies / Elsevier, 2006.
3. Глушак А.В., Манаенкова Т.А. О разрешимости задачи типа Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2012. – №17(136). – Вып.28. – С.28-45.
4. Clement Ph., Gripenberg G., Londen S.-O. Regularity properties of solutions of fractional evolution equation. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998) // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 215 / New York: Dekker, 2001. – P.235-246.

CAUCHY's FUNCTION FOR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVE

T.A. Manaenkova

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Manaenkova@bsu.edu.ru

Abstract. The problem of calculation of Cauchy's function for abstract differential equation with fractional Riemann-Liouville derivative is under consideration. Conditions of its well-posed solvability are found.

Key words: differential equation with fractional derivative, Cauchy's function.