



УДК 519.1: 681.3

МИНИМИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СТРУКТУР С ПОЧТИ КОММУТАТИВНЫМИ СВОЙСТВАМИ

**В. Е. ХАЧАТРИАН,
Я. Г. ВЕЛИКАЯ
А. И. СУНЦОВА**

*Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет*

*e-mail:
khachatryan@bsu.edu.ru*

Статья посвящена решению фундаментальных проблем информационных структур с почти коммутативными свойствами. Частными случаями таких структур являются многолен-точные и конечные детерминированные автоматы. Предлагаются решения проблемы минимизации эквивалентных преобразований и проблемы эквивалентности для подклассов информационных структур.

Ключевые слова: информационная структура, эквивалентные преобразования, эквивалентность, минимизация.

Актуальность исследования информационных структур с почти коммутативными свойствами вытекает из необходимости решения ряда задач:

- 1) оптимизация запросов декларативного языка для специализированных баз данных [1];
- 2) минимизация числа сотрудников, выполняющих определенную последовательность работ, некоторые из которых обладают условием коммутативности;
- 3) оптимизация механизма обеспечения защищенности информационных процессов методом установления эквивалентности независимо образованных объектов информационной системы и т. д.

Первые из двух описанных задач, так или иначе, связаны с проблемой минимизации информационной структуры. Задача минимизации заключается в построении по информационной структуре другой информационной структуры, эквивалентной исходной, но с минимальным значением выделенного параметра. Последняя задача связана с так называемой проблемой эквивалентности информационных структур. Проблема эквивалентности заключается в нахождении алгоритма, который по паре информационных структур определяет, эквивалентны они или нет.

В качестве модели информационной структуры с коммутативными свойствами предлагается рассматривать размеченный, ориентированный граф с системой коммутативных соотношений R .

Граф, являющийся моделью информационной структуры, удовлетворяет следующим свойствам:

- вершины графа помечены символами алфавита $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, а дуги символами алфавита $Q=\{0, 1\}$;
- имеются две выделенные вершины: вход и выход информационной структуры; из выхода нет исходящих дуг, а из других вершин может исходить несколько дуг, причем из каждой вершины исходят дуги, помеченные разными символами.

Будем называть вершины графа состояниями информационной структуры. В дальнейшем будем под информационной структурой понимать граф, которым она задается. Для состояний информационной структуры в модели задана система коммутативных соотношений R , которую можно описать следующим образом:

$$(p_i, a_j)(p_k, a_r) = (p_k, a_r)(p_i, a_j),$$



где i, k принимают некоторые значения из множества $\{0, \dots, n\}$, здесь p_i, p_k — метки состояний информационной структуры, a_j, a_r принадлежит Q — метки дуг информационной структуры.

Пусть D — информационная структура, представленная в виде графа.

Конечный ориентированный путь w в информационной структуре D задается последовательностью дуг. Он описывается историей $L(w)$, где $L(w) = (a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_k, b_k)$, a_j — метка вершины, из которой исходит j -ая дуга пути, а b_j — метка этой дуги, $j = 1, 2, \dots, k$.

Два пути эквивалентны, если они совпадают с точностью до системы соотношений R . Информационные структуры эквивалентны, если для любого пути из входа в выход в одной структуре существует эквивалентный ему путь в другой и наоборот.

Отметим, что если система R — пуста, то модель совпадает с моделью обычных конечных детерминированных автоматов;

Если же систему R задать следующим образом:

$$(p_i, a_j)(p_k, a_r) = (p_k, a_r)(p_i, a_j),$$

где $i \neq k; i, k \in \{0, \dots, n\}$, а $a_j, a_r \in Q$, то информационная структура совпадает с моделью многоленточных автоматов.

Для многоленточных автоматов существует ряд проблем, названных фундаментальными: проблема эквивалентных преобразований, проблема эквивалентности и проблема минимизации. Рассмотрим состояние этих проблем на сегодняшний день.

Проблема эквивалентных преобразований заключается в построении системы эквивалентных преобразований в некотором множестве, которая позволяет преобразовать любой объект этого множества в любой эквивалентный исходному. В 2003 г. предложена полная система эквивалентных преобразований для n -ленточных автоматов, где $n \geq 2$ [2].

Проблема эквивалентности не удавалось решить более 40 лет, это обусловлено тем, что была доказана неразрешимость проблемы включения [3]. Для двухленточных автоматов решение проблемы было предложено Бердом Р. [4], но уже для случая n -ленточных автоматов, при $n > 2$, этот метод не решает проблему эквивалентности.

В 1991 г. Т. Харью и Дж. Кархумаки доказали разрешимость проблемы эквивалентности многоленточных автоматов, но алгоритм разрешения эквивалентности не был предложен [5]. Подловченко Р.И. и Хачатрян В.Е. был предложен трансформационный метод, использующий фрагментные эквивалентные преобразования, нацеленный на решение проблемы эквивалентности многоленточных автоматов [6]. Была доказана применимость трансформационного метода с целью разрешения эквивалентности в некоторых подклассах многоленточных автоматов [13]. В 2010 г. Летичевский А.А, Шукурян А.С. и Шукурян С.К. предложили решение проблемы эквивалентности многоленточных автоматов [7], основанное на использовании многомерных автоматов.

Проблема минимизации многоленточных автоматов является почти не исследованной, предложены её решения лишь для некоторых частных случаев. Так, в работе [8] проблема решена для одного подкласса двухленточных автоматов, а в [1] приведено построение по заданному автомату автомата близкого к минимальному автомату.

Подводя итог, можно утверждать, что многие из фундаментальных проблем до сих пор остаются открытыми.

В работе предлагается решение фундаментальных проблем для некоторых подклассов информационных структур.

Пусть информационная структура G принадлежит подклассу, обозначим его K , информационная структура которого задается графом, вершины которого помечены символами алфавита $P = \{p, q_1, \dots, q_{n-1}\}$, а рёбра символами алфавита $Q = \{0, 1\}$. Из вершин,

помеченных символами q_1, \dots, q_{n-1} , может выходить только одна дуга с меткой o . Такие вершины назовем простыми. Вершины, помеченные символом p , назовем сложными.

На рисунке 1 приведена информационная структура из класса K . Ребра с меткой 1 , отмечены жирной точкой в начале ребра, а не помеченные ребра несут метку o . Вход информационной структуры изображен черным кружком, а выход – перечеркнутым.

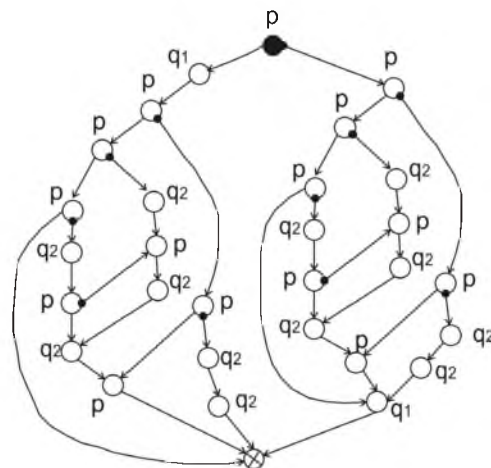


Рис. 1. Информационная структура из класса K

Назовем фрагментом информационной структуры G некоторое подмножество вершин V_i , которое включено или совпадает с V , и содержит в себе все инцидентные этим вершинам рёбра, помеченными теми же метками, что и в информационной структуре G .

Фрагментным преобразованием информационной структуры G – называется замена в структуре G фрагмента G_1 на фрагмент G_2 , при этом информационная структура G преобразуется в информационную структуру S . Фрагментное преобразование w задается фрагментами G_1 и G_2 , участвующими в преобразовании и обозначается $w=(G_1, G_2)$.

Фрагментное преобразование является эквивалентным [9], если в результате его применения к информационной структуре G получим информационную структуру S , такую что, структуры G и S являются эквивалентными.

Предлагается система эквивалентных преобразований, обозначим ее T , информационных структур для класса K , т. е. множество эквивалентных преобразований, которое позволяет любую информационную структуру преобразовать в любую информационную структуру, эквивалентную исходной. Система эквивалентных преобразований T состоит из двух преобразований. Первое из них позволяет склеивать и расклеивать состояния, а второе «переносить» через фрагмент состояния типа q_1, q_2, \dots, q_n .

Имеет место теорема:

Теорема 1. Система преобразований T является полной для информационных структур класса K .

Для решения проблемы эквивалентности многоленточных автоматов был предложен трансформационный метод, основанный на использовании фрагментных эквивалентных преобразований [6].

Как было показано в [10] трансформационный метод решает проблему эквивалентности для класса автоматов с не пересекающимися циклами. Автомат является таковым, если его циклы не имеют общих вершин. В то же время не удалось, используя трансформационный метод, решить проблему эквивалентности для конечных детерминированных автоматов. Автоматы с не пересекающимися циклами обладают единственным покрытием [11]. Отметим, что применить трансформационный метод для доказательства проблемы эквивалентности для автоматов с не однозначным покрытием не удалось.

Автомат назовем однозначным, если он обладает единственным покрытием. На рисунке 2. а) приведен пример автомата вместе с покрытиями, которые можно по нему построить 2.б) и 2.в).

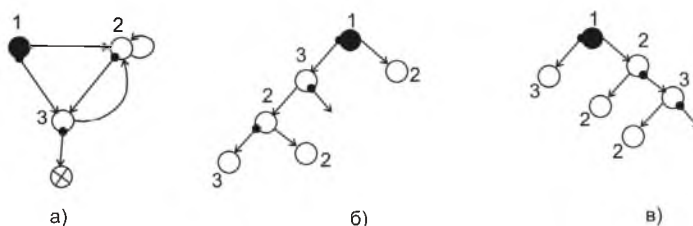


Рис. 2. Автомат и его покрытия

Предлагается следующая модификация трансформационного метода[12]: для каждой пары автоматов, появляющихся в процессе сравнения исходных автоматов на эквивалентность, необходимо выполнить дополнительный шаг, а именно, первый из автоматов предварительно преобразовать в однозначный автомат.

Обозначим через μ алгоритм сравнения на эквивалентность двух автоматов, использующий модификацию трансформационного метода. Такой алгоритм легко получить из описанного процесса алгоритмизируя неоднозначность выбора сравниваемых на эквивалентность автоматов дерева потомков.

Верна следующая теорема [12].

Теорема 2. Алгоритм μ является алгоритмом разрешения проблемы эквивалентности конечных детерминированных автоматов.

Обратимся к последней из фундаментальных проблем: проблеме минимизации информационных структур. Условимся считать, что информационная структура является минимальной в классе эквивалентных ей структур, если она содержит наименьшее число состояний. Сложность решения проблемы минимизации заключается в том что: во-первых, минимальная информационная структура находится неоднозначно, т.е. иногда по исходной информационной структуре можно построить несколько минимальных информационных структур [14]. Во-вторых, минимизация не достигается путем замены эквивалентных состояний одним, поскольку, таким образом, мы можем получить тупиковую структуру, т.е. не содержащую эквивалентных состояний и не являющуюся минимальной [15].

Рассмотрим процедуру χ , которая переводит информационную структуру G в так называемую упорядоченную информационную структуру $\chi(G)$. Суть процедуры χ заключается в следующем:

Этап 0. К информационной структуре G применяют преобразование расклейки состояний, до тех пор, пока не будет получена информационная структура G' , в каждое простое состояние которой, входит ровно одно ребро.

Этап 1. Сформируем множество строго входящих в информационную структуру G' фрагментов, к которым можно применить второе преобразование системы T , обозначим его A .

Этап 2. Применим преобразование к каждому фрагменту множества A .

Этап 3. В полученной после применения этапов 1-2 информационной структуре на всех линейных участках упорядочим состояния, таким образом, чтобы состояние q_i предшествовало состоянию q_j , где $i < j$; $i, j = 1, \dots, n-1$.

Полученная информационная структура называется $\chi(S)$ упорядоченной.

Склеив в упорядоченной информационной структуре строго-эквивалентные состояния получим каноническую информационную структуру. Под строго-эквивалентными состояниями понимаются такие состояния, что для каждого пути ведущего из первого состояния в выход информационной структуры, найдется путь из второго состояния в выход, причем истории этих путей совпадают.

Для информационных структур класса K предлагается процедура минимизации, которая распадается на следующие шаги:

1. минимизация сложных элементов информационной структуры;

2. минимизация простых элементов информационной структуры;
3. окончательная минимизация информационной структуры;
4. нахождение всех минимальных информационных структур.

Опишем содержательно функциональное предназначение каждого шага процедуры минимизации.

На этапе минимизации по сложным элементам структуры исходная информационная структура из множества L , сначала преобразуется в упорядоченную информационную структуру, а затем, полученная упорядоченная информационная структура в каноническую, т.е. не содержащую строго эквивалентных состояний.

На шаге минимизации по простым элементам структуры каноническая структура, полученная на предыдущем шаге, модифицируется с помощью $\varphi(q_i)$ -преобразования, $i=1, \dots, n-1$. Это преобразование является обобщением φ -преобразования, введенного в [15]. $\varphi(q_i)$ -преобразование представляет собой комбинацию эквивалентных преобразований системы T . Для этого в информационной структуре отыскиваются фрагменты, применение к которым $\varphi(q_i)$ -преобразования, заменяет исходный фрагмент фрагментом, с меньшим количеством простых состояний. Применяя $\varphi(q_i)$ -преобразование к каждому из таких фрагментов, мы уменьшаем число простых состояний в информационной структуре.

Третий шаг - это окончательная минимизация структуры. На данном шаге ищутся сложные состояния, расклейка которых, позволила бы породить новые фрагменты, к которым можно применить $\varphi(q_i)$ -преобразование, таким образом, чтобы уменьшить число простых состояний. Полученная информационная структура, обозначим её m , является минимальной в классе эквивалентности K .

На шаге нахождение всех минимальных информационных структур в информационной структуре m , отыскивают фрагменты, применение к которым $\varphi(q_i)$ -преобразования, $i=1, \dots, n-1$, не меняет общее количество состояний, но при этом меняется сама информационная структура. Применяя $\varphi(q_i)$ -преобразование, $i=1, \dots, n-1$, к каждому из таких фрагментов получим новую минимальную информационную структуру.

Полученные на данном этапе информационные структуры и информационная структура m образуют множество минимальных информационных структур в классе эквивалентности K .

Проиллюстрируем шаги процедуры минимизации на конкретном примере.

Пусть задана информационная структура, приведенная на рисунке 1, требуется построить минимальную информационную структуру, находящуюся в том же классе эквивалентности.

На первом шаге процедуры исходная информационная структура трансформируется в упорядоченную информационную структуру, приведенную на рисунке 3.

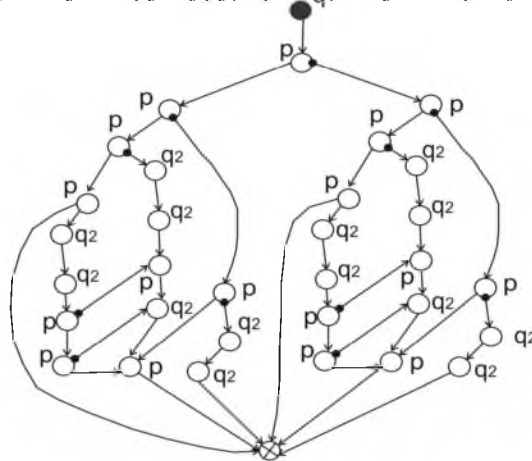


Рис. 3. Упорядоченная информационная структура



Затем упорядоченная информационная структура преобразуется в каноническую, в результате склейки строго-эквивалентных состояний. Каноническая структура изображена на рисунке 4.

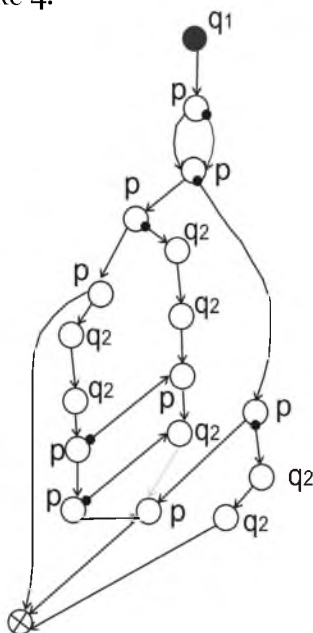


Рис. 4. Каноническая информационная структура

На следующем шаге, минимизация простых элементов информационной структуры, приводит к уменьшению q_i - состояний, $i=1, \dots, n-1$, информационной структуры. Результат изменений приведен на рисунке 5.

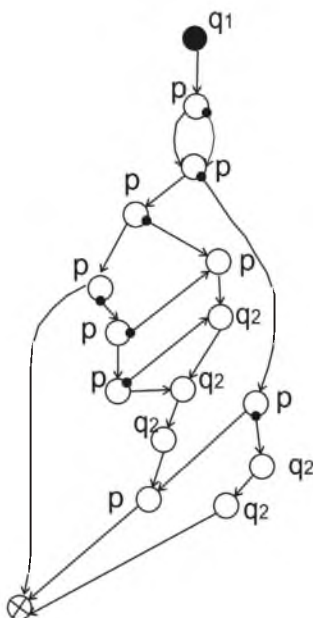


Рис. 5. Итог минимизации по простым элементам информационной структуры

На этапе окончательной минимизации информационной структуры проведена расклейка p -состояния, которое позволило в результате использования $\varphi(q_2)$ -преобразования уменьшить количество q_2 -состояний. Иллюстрация данного этапа

приведена на рисунке 6. Полученная в результате данного шага информационная структура является одной из минимальных.

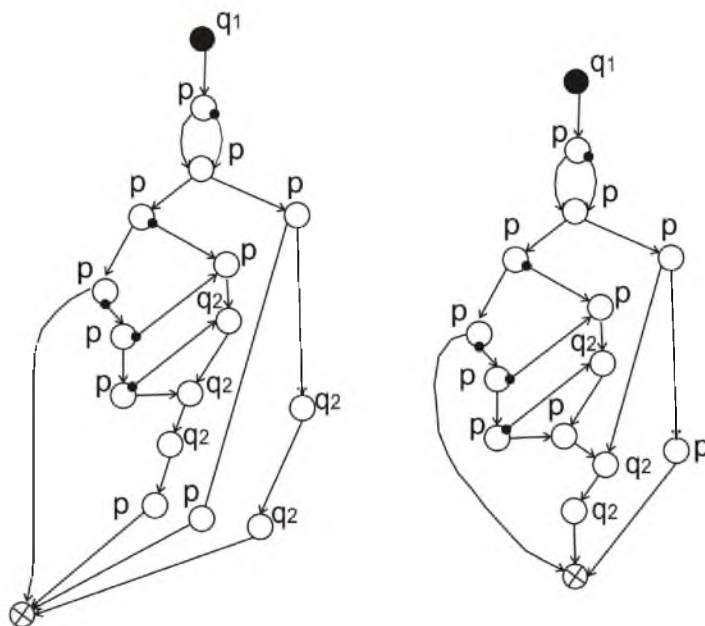


Рис. 6. Этап окончательной минимизации

На заключительном этапе процедуры минимизации, преобразуем полученную на предыдущем шаге минимальную информационную структуру, используя эквивалентное $\varphi(q_i)$ -преобразования, не меняющие количество состояний в информационной структуре. Таким образом, получим все минимальные структуры в данном классе эквивалентности. Все минимальные информационные структуры изображены на рисунке 7.

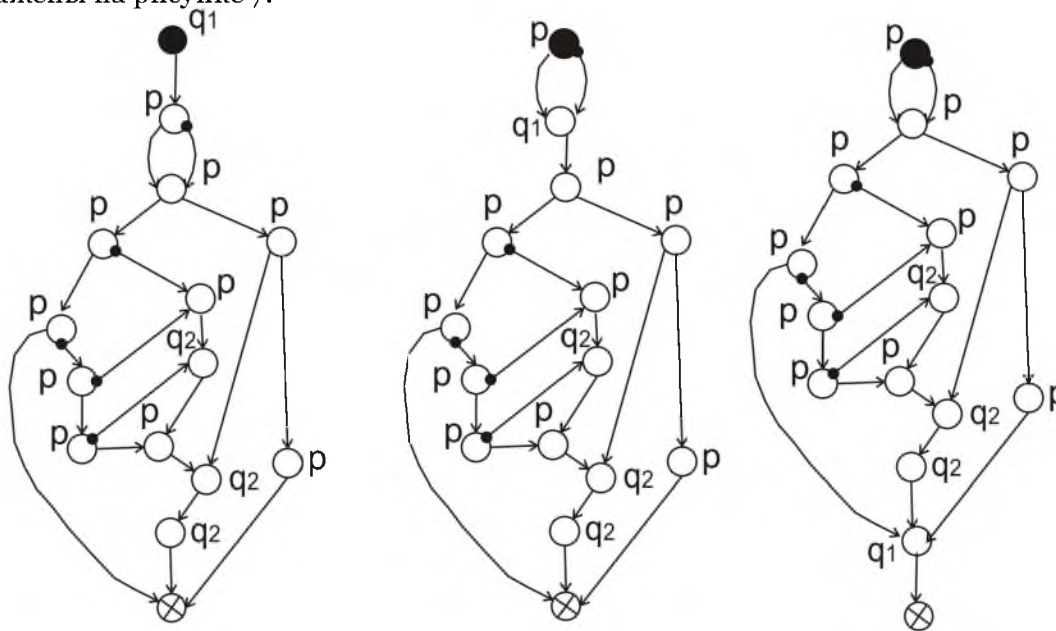


Рис. 7. Минимальные информационные структуры



Литература

1. Tamm H. On Minimality and Size Reduction of One-Tape and Multitape Finite Automata // University of Helsinki, Helsinki, 2004. *theory* 34, 5 (1988), 1049–1053.
2. Хачатрян В.Е. Полная система эквивалентных преобразований для многоленточных автоматов // Программирование. 2003. №1. С. 62-77.
3. Rabin M.O., Scott D. Finite automata and their decision problems // IBM J. of Research and Development, 1959, 3, № 2. p. 114-125 (Русский перевод: Кибернетический сборник, 1962, № 4. С. 58-91.
4. Bird R. The equivalence problem for deterministic two-tape automata // J. of Computer and System Science, 1973, 7, № 4. p.218-236.
5. Harju T. and Karkumaki J. Decidability of the multiplicity equivalence problem of multitape finite automata, in: Proc. 22nd STOC (1990)477-481.
6. Хачатрян В.Е. О применении трансформационного метода для распознавания эквивалентности многоленточных автоматов. // VI межд. конф. Дискретные модели в теории управляющих систем. Москва, МГУ. 2004. С. 148-150.
7. Letichevsky Alexander A., Shoukourian Arsen S., Shoukourian Samvel K. The equivalence problem of deterministic multitape finite automata: a new proof of solvability using a multidimensional tape // Language and Automata Theory and Applications. Lecture Notes in Computer Science, 2010, Volume 6031/2010, p.392-402.
8. Подловченко Р.И., Хачатрян В. Е. Минимальность и тупиковость многоленточных автоматов // Дискретная математика. 2008. № 2. С.92-120.
9. Подловченко Р.И. О проблеме эквивалентных преобразований программ // Программирование, 1986, №6. С.3-14.
10. Подловченко Р.И., Хачатрян В.Е. Алгоритм распознавания эквивалентности многоленточных автоматов без пересекающихся циклов // Труды 5-межд. конф. Дискретные модели в теории управления систем. Ратмино-Москва. 2003. С.67-70.
11. Хачатрян В.Е., Великая Я.Г. Модели вычислений с однозначным покрытием // Научные ведомости БелГУ. 2009. № 7(62). С.116-121.
12. Великая Я.Г. Обобщенный трансформационный метод и конечные детерминированные автоматы // Научные ведомости БелГУ. 2010 г. (в печати).
13. Подловченко Р. И., Хачатрян В. Е., Чашин Ю. Г. Полная система эквивалентных преобразований для двухленточных автоматов с непересекающимися циклами // Программирование. 2000. №5. С.1-19.
14. Подловченко Р.И., Хачатрян В. Е. Минимальность и тупиковость многоленточных автоматов // Дискретная математика. 2008. № 2. С.92-120.
15. Подловченко Р.И., Хачатрян В. Е. Полное решение проблемы минимизации для одного множества бинарных двухленточных автоматов // Дискретная математика. 2010. № 3. С. 146-159.

MINIMIZATION OF INFORMATION STRUCTURES WITH ALMOST COMMUTATIVE PROPERTIES

V. E. KHACHATRYAN
Y. G. VELIKAYA
A. I. SUNTSOVA

*Belgorod National
Research University*

e-mail:
khachatryan@bsu.edu.ru

The paper is devoted to the decision of the fundamental problems of the information structures with almost commutative properties. The special cases of such structures are the multitape and final deterministic automaton. The solution of the problem of equivalent transformations, problems of equivalence and minimization for subclasses of the information structures is offered.

Key words: the information structure, the problem of equivalent transformations, the equivalence problem, the minimization problem.