УДК 624.07:534.1

# О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРЕЦЕССИОННОГО ДВИЖЕНИЯ СТОЯЧИХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ НА ОПОРАХ КОЛЬЦЕ С НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

**А. И. ПОЛУНИН**

*Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова*

*e-mail: polynin@intbel.ru*

В статье на основе анализа математической модели динамики вращающегося на опорах кольца с нерастяжимой средней линией приведено доказательство свойств прецессионного движения возбужденных стоячих волн. Показано, что скорость прецессии может быть равна скорости вращения кольца на опорах.

Ключевые слова: динамика вращающейся оболочки, стоячая волна, прецессионное движение волны.

### *Введение*

В работе [1] показано, что во вращающемся на опорах классическом кольце, имеющем одинаковые во всех точках физические и геометрические характеристики, возникающие стоячие волны могут прецессировать с угловой скоростью вращения кольца. Перенос результатов этого доказательства на динамику кольца с разными в разных точках геометрическими характеристиками не совсем корректен вследствие появления в этом случае возмущающих массовых сил, которые могут повлиять на характер прецессионного движения стоячих волн. Незнание характера прецессионного движения волн в этом случае ухудшает точность математического моделирования динамики кольца при его обработке по безрамной технологии. Анализ литературы показал отсутствие публикаций по данному вопросу.

### *Получение математической модели динамики кольца и ее анализ*

Найдем зависимости, которым подчиняется прецессионное движение возбужденных стоячих волн. Для этого получим уравнения, описывающие динамику поведения кольца с нерастяжимой средней линией и возбужденными стоячими волнами. Примем допущение, что кольцо вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega$. Положение точек средней линии деформированного кольца в связанной с ним системе координат определяем координатами *UV* в локальной системе координат, задаваемой углом $\theta$ относительно вертикали, направленной из центра кольца вверх. Радиальное перемещение точки средней линии кольца зададим в виде

$$U = \sum_{i=1}^{N} [a_i(t)\cos(i(\theta + \varphi_i(t))) + b_i(t)\sin(i(\theta + \varphi_i(t)))],$$

где $a_i(t)$, $b_i(t)$, $\varphi_i(t)$ – неизвестные функции, подлежащие определению; $N$ – число учитываемых гармоник. Функция $\varphi_i(t)$ задает прецессию стоячей волны.

Величину перемещения точек средней линии по координате $V$ находим из условия не растяжимости средней линии $V = -\int U d\theta$.

Отсюда имеем

$$V = \sum_{i=1}^{N} [-i^{-1} a_i(t)\sin(i(\theta + \varphi_i)) + i^{-1} b_i(t)\cos(i(\theta + \varphi_i))]. \tag{1}$$

Для получения уравнений воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода с неопределенными множителями.

Условиями связи является равенство нулю перемещений $U$ в точках опор. Отсюда получаем зависимости

$$\sum_{i=1}^{N}[a_i\cos(i(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_i))+b_i\sin(i(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_i))]=0,$$

$$\sum_{i=1}^{N}[a_i\cos(i(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_i))+b_i\sin(i(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_i))]=0$$

и производные уравнений связи по переменным $a_j$, $b_j$

$$e_{1j}^a=\cos(j(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_j)),\ e_{2j}^a=\cos(j(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_j)),$$

$$e_{1j}^b=\sin(j(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_j)),\ e_{2j}^b=\sin(j(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_j)).$$

Здесь $2\alpha$ – угол между опорами. Обозначим ширину кольца $a_g=a+a_p$, где $a$ – ширина кольца с параллельными сторонами; $a_p$ – функция угла $\theta$, задающая отклонение ширины кольца от параллельности. Она может быть вызвана погрешностью изготовления или обусловлена конструкцией. Зададим закон изменения двух сторон кольца функциями

$$a_1=\sum_{i=1}^{H}[a_{1i}\cos(i\theta)+b_{1i}\sin(i\theta)], \qquad a_2=\sum_{i=1}^{H}[a_{2i}\cos(i\theta)+b_{2i}\sin(i\theta)].$$

Тогда $a_p=\sum_{i=1}^{H}[a_{нi}\cos(i\theta)+b_{нi}\sin(i\theta)]$, где $a_{нi}=a_{2i}-a_{1i}$ $b_{нi}=b_{2i}-b_{1i}$

Обозначим площадь сечения кольца, проходящего по его образующей, $F_в=(a+a_p)b=F+a_pb$. Здесь $b$ – толщина кольца. Тогда кинетическую энергию кольца вычислим по формуле

$$T_в=T+T_p,\ \text{где}\ T=\frac{\chi}{2}\int_0^{2\pi}[(\dot V+\Omega r+\Omega U)^2+(\dot U-\Omega V)^2]d\theta$$ – кинетическая энергия кольца с параллельными сторонами;

$$T_p=\frac{\chi_p}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{H}[a_{нi}\cos(i\theta)+b_{нi}\sin(i\theta)][(\dot V+\Omega r+\Omega U)^2+(\dot U-\Omega V)^2]d\theta$$ – составляющая кинетической энергии вследствие не параллельности сторон; $\chi=r\rho F$, $\chi_p=r\rho b$, r – радиус средней линии; $\rho$ – удельная плотность материала кольца.

Для вычисления потенциальной энергии кольца используем гипотезу плоских сечений. Потенциальная энергия может быть представлена в виде $П_к=П+П_p$. Здесь $П$ – потенциальная энергия вращающегося кольца с параллельными сторонами шириной $a$; $П_p$ – потенциальная энергия части кольца, учитывающей не параллельность сторон. Анализ влияния не параллельности сторон на потенциальную энергию кольца ( составляющая $П_p$ ) показал, что наличие ее не ведет к появлению дополнительных сил по сравнению с кольцом с параллельными сторонами шириной $a$ и, следовательно, нет дополнительных слагаемых к формулам уравнения кольца с параллельными сторонами. Дифференциальные уравнения поведения вращающегося на опорах кольца с параллельными сторонами получены в [1].

Для производных от $T_p$, задающих дополнительные слагаемые, обусловленные не параллельностью сторон, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_p}{\partial \dot{a}_j}\right) = -\pi\chi_p\Omega r\,\dot{\varphi}_j[a_{нj}\cos(j\varphi_j) - b_{нj}\sin(j\varphi_j)],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_p}{\partial \dot{b}_j}\right) = -\pi\chi_p\Omega r\,\dot{\varphi}_j[a_{нj}\sin(j\varphi_j) + b_{нj}\cos(j\varphi_j)],$$

$$\frac{\partial T_p}{\partial a_j} = \pi\chi_p\Omega r(\Omega - \dot{\varphi}_j)[a_{нj}\cos(j\varphi_j) - b_{нj}\sin(j\varphi_j)],$$

$$\frac{\partial T_p}{\partial b_j} = \pi\chi_p\Omega r(\Omega - \dot{\varphi}_j)[b_{нj}\cos(j\varphi_j) + a_{нj}\sin(j\varphi_j)].$$

Вычислим производные кинетической энергии $T_\text{р}$ по $\dot{\varphi}_i(t)$ (i = 1,2,...,$N$). Не нулевой интеграл в выражении $\frac{\partial T_p}{\partial \dot{\varphi}_j}$ будет от слагаемого $\frac{\partial T_p}{\partial \dot{\varphi}_j} = \chi_p\int_0^{2\pi} a_p\Omega r\frac{\partial \dot{v}}{\partial \dot{\varphi}_j}d\theta$, так как в остальных слагаемых имеем произведение трех функций синус, косинус, интеграл от которых равен нулю. Используя (1) получим

$$\dot{V} = \sum^{N}[-\frac{\dot{a}_i}{i}\sin\left(i(\theta+\varphi_i(t))\right) - \frac{a_i}{i}\cos\left(i(\theta+\varphi_i(t))\right)i\dot{\varphi}_i(t) +$$

$$+\frac{\dot{b}_i(t)}{i}\cos\left(i(\theta+\varphi_i(t))\right) - \frac{b_i(t)}{i}\sin\left(i(\theta+\varphi_i(t))\right)i\dot{\varphi}_i(t)],$$

$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{\varphi}_j} = -a_j\cos\left(j(\theta+\varphi_j(t))\right) - b_j\sin\left(j(\theta+\varphi_j(t))\right),$$

$$\frac{\partial T_p}{\partial \dot{\varphi}_j} = \chi_p\int^{2\pi} a_p\Omega r\left[-a_j\cos(j(\theta+\varphi_j(t))) - b_j\sin(j(\theta+\varphi_j(t)))\right]d\theta =$$

$$= -\chi_p\Omega r\pi[a_{нj}a_j\cos(j\varphi_j) + a_{нj}b_j\sin(j\varphi_j) - b_{нj}a_j\sin(j\varphi_j) + b_{нj}b_j\cos(j\varphi_j)],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_p}{\partial \dot{\varphi}_j}\right) = -\chi_p\Omega r\pi[-a_{нj}a_j\sin(j\varphi_j)j\dot{\varphi}_j + a_{нj}\dot{a}_j\cos(j\varphi_j) + a_{нj}\dot{b}_j\sin(j\varphi_j) +$$

$$+a_{нj}b_j\cos(j\varphi_j)j\dot{\varphi}_j - b_{нj}\dot{a}_j\sin(j\varphi_j) - b_{нj}a_j\cos(j\varphi_j)j\dot{\varphi}_j + b_{нj}\dot{b}_j\cos(j\varphi_j) - b_{нj}b_j\sin(j\varphi_j)j\dot{\varphi}_j].$$

$$\frac{\partial T_p}{\partial \varphi_j} = \chi_p\Omega r\pi[jb_{Hj}a_j\dot{\varphi}_j - jb_{Hj}\dot{b}_j - a_{Hj}\dot{a}_j - ja_{Hj}b_j\dot{\varphi}_j)\cos\left(j\varphi_j\right) +$$

$$+(ja_{Hj}a_j\dot{\varphi}_j - a_{Hj}\dot{b}_j + b_{Hj}\dot{a}_j + jb_{Hj}b_j\dot{\varphi}_j)\sin\left(j\varphi_j\right)] +$$

$$+\chi_p\Omega^2 r\pi\left[j(-a_{Hj}a_j - b_{Hj}b_j)\sin(j\varphi_j) + j(a_{Hj}b_j - b_{Hj}a_j)\cos\left(j\varphi_j\right)\right].$$

Используя эти зависимости, получим дополнительные слагаемые за счет не параллельности сторон к дифференциальным уравнениям поведения вращающегося на опорах кольца с параллельными сторонами.

Для переменной $a_i(t)$ это $-\pi\chi_p\Omega^2 r\left[a_{Hj}\cos\left(j\varphi_j\right)-b_{Hj}\sin\left(j\varphi_j\right)\right]$,

для переменной $b_i(t)$ $-\pi\chi_p\Omega^2 r\left[b_{Hj}\cos\left(j\varphi_j\right)+a_{Hj}\sin\left(j\varphi_j\right)\right]$, для прецессии $\varphi_i(t)$ получим

$$-\chi_p\Omega^2 r\pi\left[\left\{-a_{Hj}\sin\left(j\varphi_j\right)-b_{Hj}\cos\left(j\varphi_j\right)\right\}a_j+\left\{a_{Hj}\cos\left(j\varphi_j\right)-b_{Hj}\sin\left(j\varphi_j\right)\right\}b_j\right]j.$$

Окончательные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}C_j\ddot{a}_j+\left(2K_j\dot{\varphi}_j-\frac{4\Omega}{j}\right)\dot{b}_j+\left(\gamma n_j^2-l_j\dot{\varphi}_j^2+4\Omega\dot{\varphi}_j-C_j\Omega^2\right)a_j+K_j\ddot{\varphi}_j b_j-\\-\pi\chi_p\Omega^2 r\left[a_{Hj}\cos\left(j\varphi_j\right)-b_{Hj}\sin\left(j\varphi_j\right)\right]=\\=\lambda_1\cos\left(j\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)+\lambda_2\cos\left(j\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right),\end{gathered}\tag{2}$$

$$\begin{gathered}C_j\ddot{b}_j+\left(\frac{4\Omega}{j}-2K_j\dot{\varphi}_j\right)\dot{a}_j-K_j\ddot{\varphi}_j a_j+\left(\gamma n_j^2-l_j\dot{\varphi}_j^2+4\Omega\dot{\varphi}_j-C_j\Omega^2\right)b_j-\\-\pi\chi_p\Omega^2 r\left[b_{Hj}\cos\left(j\varphi_j\right)+a_{Hj}\sin\left(j\varphi_j\right)\right]=\\=\lambda_1\sin\left(j\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)+\lambda_2\sin\left(j\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right),\end{gathered}\tag{3}$$

$$\begin{gathered}\left[C_j\ddot{a}_j+\left(2K_j\dot{\varphi}_j-\frac{4\Omega}{j}\right)\dot{b}_j+K_j\ddot{\varphi}_j b_j\right]b_j-\\-\left[C_j\ddot{b}_j+\left(\frac{4\Omega}{j}-2K_j\dot{\varphi}_j\right)\dot{a}_j-K_j\ddot{\varphi}_j a_j\right]a_j-\\-\chi_p\Omega^2 r\pi\left[\left\{-a_{Hj}\sin\left(j\varphi_j\right)-b_{Hj}\cos\left(j\varphi_j\right)\right\}a_j+\left\{a_{Hj}\cos\left(j\varphi_j\right)-b_{Hj}\sin\left(j\varphi_j\right)\right\}b_j\right]j=\\=\lambda_1\left[-a_j\sin\left(j\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)+b_j\cos\left(j\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)\right]+\\+\lambda_2\left[-a_j\sin\left(j\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)+b_j\cos\left(j\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)\right],\end{gathered}\tag{4}$$

($j$ = 1, 2, ..., $N$).

Здесь $\lambda_1$, $\lambda_2$ – неопределенные множители Лагранжа; $\gamma = \mu / \chi$,

$\mu = EJ/r^3$, $C_j=1+1/j^2$, $n_j=j^2-1$, $K_j=j+1/j$, $l_j=1+j^2$.

Анализ уравнений (2), (3), (4) показывает, что уравнение (4) может быть получено комбинацией уравнений (2) и (3), как и в [1]. Рассуждая таким же образом, как и в [1], получим, что во вращающемся кольце с не параллельными сторонами может происходить прецессионное движение возбужденной стоячей волны с угловой скоростью $\dot{\varphi}_j = \Omega$ ($j$= 1, 2,..., $N$).

Таким образом получено, что во вращающемся на опорах с постоянной скоростью кольце с непараллельными сторонами при возникновении его периодических колебаний прецессионное движение возбужденной стоячей волны может происходить со скоростью вращения кольца.

Этот результат можно использовать при математическом моделировании динамики вращающегося на опорах кольца, оболочки, имеющих конструктивные или технологические особенности.

**Литература**

1. Полунин А. И. О характере прецессионного движения стоячих волн во вращающемся кольце с опорами. Известия вузов. Машиностроение. 2008, № 10, с.27 – 33.

## ON THE MATHEMATICAL MODELLING OF THE STATIONARY WAVE PRECESSION MOVEMENT IN THE RING WITH NON-PARALLEL SIDES THAT ROTATES ON THE SUPPORTS

**A. I. POLUNIN**

***Belgorod Shuknov State Technological University after V.G. Shukhov***

***e-mail: polynin@intbel.ru***

The article presents the proof of the fact that when a ring with non-parallel sides and non-stretchable median rotates on two supports, the stationary wave resulting from the agitation can precess with angular velocity equal to that of the ring.

Key words: dynamics of rotating casing, Stationary wave, Precession Wave Motion.