УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

А.В. Скороход

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия,
ул. Антонова-Овсеенко, Самара, 443090, Россия, e-mail: scorohodav@yandex.ru

Аннотация. Для уравнения, которое меняет тип на прямой $y = 0$, в области, ограниченной при $y > 0$ кусочно-гладкой кривой с концами в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, и отрезками прямых $x = -1$, $y = x$, $x = 1$, $y = -x$ при $y < 0$, изучаются задачи типа Геллерстедта с нелокальными интегральными условиями сопряжения. Методом экстремума доказана единственность решения поставленных задач. Существование решения задач эквивалентно редуцируется к однозначной разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальные задачи, принцип экстремума, единственность решения, существование решения, интегральное уравнение.

1. Постановка задач. Полученные результаты

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L(u) \equiv \begin{cases} y^m u_{xx} + u_{yy} = 0\,, & y > 0\,, \quad m > 0\,, \\ u_{xy} - \dfrac{q}{x-y}\left(u_x - u_y\right) = 0\,, & y < 0\,, \quad x < 0\,, \\ u_{xy} + \dfrac{q}{x+y}\left(u_x + u_y\right) = 0\,, & y < 0\,, \quad x > 0\,, \quad q = \dfrac{m}{2\,(m+2)}\,, \end{cases} \tag{1}$$

в области D, ограниченной при $y > 0$ кусочно-гладкой кривой Γ, с концами в точках $A\,(-1,\,0)$ и $B\,(1,\,0)$, и отрезками прямых $x = -1$, $y = x$, $y = -x$, $x = 1$ при $y < 0$.

При $y > 0$ уравнение (1) совпадает с обобщенным уравнением Трикоми, а при $y < 0$ то же самое уравнение записано в характеристических координатах, что позволяет при минимальных условиях на граничные функции доказать существование классического (а не обобщённого, как было в работах К.И. Бабенко [1] и других) решения в области гиперболичности.

Обозначим через $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_-^1 = D \cap \{x < 0,\, y < 0\}$, $D_-^2 = D \cap \{x > 0,\, y < 0\}$, $D_- = D_-^1 \cup D_-^2$.

Для уравнения (1) в области D поставим следующие краевые задачи типа Геллерстедта с интегральными условиями сопряжения.

Задача V_1**.** Найти в области D функцию $u(x,\,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,\,y)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^2(D_+)\cap C^1(D_-)\,,\quad u_{xy}\in C(D_-)\,; \tag{2}$$

$$Lu\equiv 0\,,\qquad (x,\,y)\in D_+\cup D_-\,; \tag{3}$$

$$u(x,\,y)|_\Gamma=\varphi(s)\,,\quad 0\le s\le l\,; \tag{4}$$

$$u(-1,\,y)=\psi_1(y)\,,\quad u(1,\,y)=\psi_2(y)\,,\qquad y\in[-1,\,0]\,; \tag{5}$$

$$u_y(x,\,+0)=-v_-^1(x)\,,\quad x\in(-1,\,0)\,,\quad u_y(x,\,+0)=v_-^2(x)\,,\quad x\in(0,\,1)\,. \tag{6}$$

Здесь

$$v_-^1(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_x^0(t-x)^{-\lambda}u_1(t,\,0)\,dt\,+$$

$$+\int\limits_x^0(t-x)^{-\lambda}u_2(x,\,t)\,dt\,,\qquad 0<\lambda<1,\ x\in(-1,\,0)\,. \tag{7}$$

При этом $u_1(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_-^1 с данными: $u_1(x,\,0)=\tau_1(x)\,,\,-1\le x\le\ 0,\,\tau_1(-1)=\ 0,\,u_1(-1,\,y)=0,\,-1\le y\le 0$; $u_2(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_-^1 с данными: $u_2(x,\,0)=0,\,-1\le x\le 0,\,u_2(-1,\,y)=\psi_1(y)\,,\,-1\le y\le 0,\,\psi_1(0)=0$. Далее,

$$v_-^2(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^x(x-t)^{-r}u_1(t,\,0)\,dt\,+$$

$$+\int\limits_0^x(x-t)^{-r}u_2(x,\,-t)\,dt\,,\qquad 0<r<1,\ x\in(0,\,1)\,, \tag{8}$$

где $u_1(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_-^2 с граничными условиями: $u_1(x,\,0)=\tau_2(x)\,,\,0\le x\le 1,\,\tau_2(1)=0,\,u_1(1,\,y)=0,\,-1\le y\le 0$; $u_2(x,\,y)$ – решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_-^2 с граничными условиями: $u_1(x,\,0)=0,\,0\le x\le 1,\,u_2(1,\,y)=\psi_2(y)\,,\,-1\le y\le 0,\,\psi_2(0)=0$; $\psi_1(y),\,\psi_2(y),\,\varphi(s)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\psi_1(0)=\varphi(l),\,\psi_2(0)=\varphi(0)$.

Задача V_2**.** Найти в области D функцию $u(x,\,y)$, удовлетворяющую условиям (2)-(4) и

$$u(x,\,x)=\psi_1(x)\,,\ x\in[-1,\,0]\,;\qquad u(x,\,-x)=\psi_2(x)\,,\ x\in[0,\,1]\,; \tag{9}$$

$$u_y(x,\,+0)=v_-^1(x)\,,\ x\in(-1,\,0)\,,\quad u_y(x,\,+0)=-v_-^2(x)\,,\ x\in(0,\,1)\,. \tag{10}$$

Здесь

$$v_{-}^{1}(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{-\lambda}u_1(t,0)\,dt+$$

$$+\int\limits_{x}^{0}(t-x)^{-\lambda}u_2(x,t)\,dt\,,\qquad 0<\lambda<1\,,\ x\in(-1,0)\,,\qquad(11)$$

где $u_1(x,y)$ – решение задачи Дарбу для уравнения (1) в области D_{-}^{1} с данными: $u_1(x,0)=\tau_1(x)\,,\ -1\leqslant x\leqslant 0,\ \tau_1(0)=0,\ u_1(x,x)=0,\ -1\leqslant x\leqslant 0$; $u_2(x,y)$ – решение задачи Дарбу для уравнения (1) в области D_{-}^{1} с данными: $u_2(x,0)=0,\ -1\leqslant x\leqslant 0,\ u_2(x,x)=\psi_1(x)\,,\ -1\leqslant x\leqslant 0,\ \psi_1(0)=0$. Далее,

$$v_{-}^{2}(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{1}(t-x)^{-r}u_1(t,0)\,dt+$$

$$+\int\limits_{0}^{x}(x-t)^{-r}u_2(x,-t)\,dt\,,\qquad 0<r<1,\ x\in(0,1)\,,\qquad(12)$$

где $u_1(x,y)$– решение задачи Дарбу для уравнения (1) в области D_{-}^{2} с граничными условиями: $u_1(x,0)=\tau_2(x)\,,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \tau_2(0)=0,\ u_1(x,-x)=0,\ -1\leqslant x\leqslant 0$; $u_2(x,y)$ – решение задачи Дарбу для уравнения (1) в области D_{-}^{2} с граничными условиями: $u_1(x,0)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ u_2(x,-x)=\psi_2(x)\,,\ -1\leqslant x\leqslant 0,\ \psi_2(0)=0$; $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi(s)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Заметим, что в нашем рассмотрении уравнения (1) вместо классических задач Геллерстедта предлагаются видоизмененные задачи с интегральными условиями сопряжения (6) и (10). Введение этих новых условий сопряжения вызвано тем, что линия изменения типа $y=0$ является характеристикой уравнения (1) при $y\leq 0$. В силу этого известное условие сопряжения $u_y(x,+0)=u_y(x,-0)$ не подходит. Если принять последнее условие, то в области гиперболичности должна быть корректно поставленной задача Коши для уравнения (1) с граничными условиями $u(x,0)=\tau(x)\,,\ u_y(x,0)=\nu(x)$. Такая задача в силу теоремы Коши-Ковалевской поставлена некорректно.

Задачи с подобным нелокальным интегральным условием сопряжения для уравнений смешанного типа изучались в работах [2]-[4]. В данной статье методом экстремума доказана единственность решения задач V_1 и V_2, а существование эквивалентно сведено к однозначной разрешимости интегральных уравнений Фредгольма II рода.

2. Задача V_1

Предварительно в областях D_{-}^{1} и D_{-}^{2} методом Римана построим в явном виде решение задачи Гурса [5]. Исходя из этих формул, вычислим $v_{-}^{1}(x)$ и $v_{-}^{2}(x)$, заданные формулами (7) и (8):

$$v_-^1(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_x^0 \tau_1(t)(t-x)^{-\lambda}\,dt + \Psi_1(x), \tag{13}$$

$$v_-^2(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \tau_2(t)(x-t)^{-r}\,dt + \Psi_2(x), \tag{14}$$

где

$$\Psi_1(x) = k_1\int\limits_x^0 (s-x)^{1-q-\lambda}(1+s)^q\, F\left(1-q,\, q;\, 2-q-\lambda;\, \frac{s-x}{1+s}\right)\widetilde{\psi}_1(s)\,ds, \tag{15}$$

$$k_1 = -\frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(2-2q-\lambda)}{\Gamma^2(2-q-\lambda)}, \qquad \widetilde{\psi}_1(s) = \psi_1'(s) + \frac{q}{1+s}\psi_1(s)\ ,$$

$$\Psi_2(x) = k_2\int\limits_{-x}^0 (s+x)^{1-q-r}(1+s)^q\,\widetilde{\psi}_2(s)\, F\left(1-q,\, q;\, 2-q-r;\, \frac{s+x}{1+s}\right)ds, \tag{16}$$

$$k_2 = -\frac{\Gamma(1-r)\Gamma(2-2q-r)}{\Gamma^2(2-q-r)}, \qquad \widetilde{\psi}_2(s) = \psi_2'(s) + \frac{q}{1+s}\psi_2(s)\ .$$

На основании представлений (13) и (14) доказан следующий принцип локального экстремума.

Лемма 1. *Пусть $u(x,y)\in C\left(\overline{D}_-^1\right)$ является решением уравнения (1) в области D_-^1 и $u(-1,y)\equiv 0$. Тогда, если $\tau_1(x) = u(x,0)$, $\tau_1(x)\in C[-1,0]\cap C^1(-1,0)$, $\tau_1'(x)\, L_1[-1,0]$, достигает на сегменте $[-1,0]$ наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке $\xi\in(-1,0)$, то $v_-^1(\xi)<0$ ($v_-^1(\xi)>0$).*

Лемма 2. *Пусть $u(x,y)\in C\left(\overline{D}_-^2\right)$ является решением уравнения (1) в области D_-^2 и $u(1,y)\equiv 0$. Тогда, если $\tau_2(x) = u(x,0)$, $\tau_2(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$, $\tau_2'(x)\, L_1[0,1]$, достигает на сегменте $[0,1]$ наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке $\xi\in(0,1)$, то $v_-^2(\xi)>0$ ($v_-^2(\xi)<0$).*

Подробное доказательство этих лемм приведено в работе автора [5].

На основании лемм 1 и 2 установлен принцип экстремума для уравнения (1) в смешанной области D.

Лемма 3. *Пусть функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (2), (3), (6) и $u(-1,y) = u(1,y)\equiv 0$. Тогда, если $\max\limits_{\overline{D}_+} u(x,y) = u(Q) > 0$ ($\min\limits_{\overline{D}_+} u(x,y) = u(Q) < 0$), то максимум (минимум) $u(Q)$ достигается на кривой Γ.*

Доказательство проводится по схеме, предложенной в работе [7]. При доказательстве данной леммы основная трудность заключалась в том, что надо было показать, что максимум решения $u(x,\,y)$ по замкнутой области $\overline{D}$ не может достигаться в угловой точке (0,0) границы области D.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)-(6), *то оно единственно.*

□ Пусть $u(x,\,y)$ – решение однородной задачи (2)-(6), где $\varphi(s)\equiv 0$, $\psi_1(y)\equiv 0$, $\psi_2(y)\equiv 0$. Покажем, что $u(x,\,y)\equiv 0$ в D_+. Предположим, что существует точка $(x_1,\,y_1)\in D_+$ такая, что $u(x_1,\,y_1)\neq 0$. Пусть для определенности $u(x_1,\,y_1)>0$. Тогда $\max\limits_{\overline{D}^+} u(x,\,y) = u(Q)>0$ и по доказанной лемме 3 точка $Q\in\Gamma$, что противоречит тому, что $u(x,\,y)\equiv 0$ на кривой Γ. Следовательно, $u(x,\,y)\equiv 0$ в D_+. Отсюда следует, что $u(x,\,0+0)=\tau(x)\equiv 0$. Тогда в силу единственности решения задачи Гурса для уравнения (1) $u(x,\,y)\equiv 0$ в замкнутых областях $\overline{D}_-^1$ и $\overline{D}_-^2$.

Доказательство существования решения задачи V_1 для простоты вычислений проводится для случая, когда кривая Γ совпадает с "нормальной" кривой Γ_0:

$$x^2+\frac{4}{(m+2)^2}\,y^{m+2}=1\,,\qquad y>0\,.$$

В области D_+ в качестве искомого решения берется решение задачи N [8, с.78] с граничными условиями: $u|_{\Gamma_0}=\varphi(x)$, $-1\le x\le 1$; $u_y(x,\,0+0)=\nu(x)$, $-1<x<1$, считая известной функцию $\nu(x)$. Исходя из формулы решения задачи N при $y\to 0+0$, найдем функциональное соотношение между функциями $\tau(x)=u(x,\,0+0)$ и $\nu(x)=u_y(x,\,0+0)$:

$$\tau(x)=-k\int\limits_{-1}^{1}\nu(t)\left[|x-t|^{-2q}-(1-tx)^{-2q}\right]dt+\Phi(x)\,,\qquad -1\le x\le 1\,,\tag{17}$$

где

$$\Phi(x)=2kq\,(1-q)^{-2q}\left(1-x^2\right)\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\left(1-t^2\right)}{\left(1+x^2-2xt\right)^{1+q}}\,dt\,,\tag{18}$$

$$k=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2q}\frac{\Gamma^2(q)}{\Gamma(2q)}\,.$$

Учитывая условия сопряжения (6), в равенстве (17) вместо $\nu(x)$ подставляем значения функций $v_-^1(x)$ и $v_-^2(x)$, заданных формулами (13) и (14). Тогда равенство (17) принимает вид

$$\tau(x)=k\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{t}^{0}\tau_1'(s)\,(s-t)^{-\lambda}\,ds\left[|x-t|^{-2q}-(1-tx)^{-2q}\right]dt\;-$$

$$-k\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t}\tau_2'(s)\,(t-s)^{-r}\,ds\left[|x-t|^{-2q}-(1-tx)^{-2q}\right]dt\;+$$

$$+\ \widetilde{\Phi}(x)\,, \qquad -1 \le x \le 1, \tag{19}$$

где функция $\widetilde{\Phi}(x)$ определяется через функции (15), (16) и (18).

В правой части равенства (19), поменяв пределы интегрирования, вычислим внутренние интегралы. Затем, дифференцируя обе части полученного равенства, существование решения задачи V_1 сводим к вопросу разрешимости интегрального уравнения

$$\tau'(x) + k\int\limits_{-1}^{1} \tau'(s)\,K(x,s)\,ds = \widetilde{\Phi'}(x)\,, \qquad x \in (-1,0)\cup(0,1)\,, \tag{20}$$

где

$$\tau'(s) = \begin{cases} \tau_1'(s)\,, & -1 < s < 0\,, \\ \tau_2'(s)\,, & \ \ 0 < s < 1\,, \end{cases}$$

и явные виды ядра $K(x,\,s)$ и правой части $\widetilde{\Phi}'(x)$ приведены в работе [5].

Для ядра $K(x,\,s)$ и правой части $\widetilde{\Phi}'(x)$ интегрального уравнения (20) справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Ядро $K(x,\,s)$ бесконечно дифференцируемо в квадрате $\{(x,\,s):\ -1 < s, x < 1\}$, за исключением линий $x = s$, $x = -1$, $s = -1$, $x = 1$, $s = 1$, и справедлива оценка*

$$|K(x,\,s)| \le \begin{cases} C_1\left(\dfrac{1}{|x-s|^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{(1+x)^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{(1+s)^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{|x-s|^{2q}(1+s)^{\lambda}}\right), \\ \qquad\qquad x < 0\,; \\ C_2\left(\dfrac{1}{|x-s|^{r+2q}} + \dfrac{1}{(1-x)^{r+2q}} + \dfrac{1}{(1-s)^{r+2q}} + \dfrac{1}{|x-s|^{2q}(1-s)^{r}}\right), \\ \qquad\qquad x > 0\,, \end{cases}$$

C_i, $i = 1, 2$ – здесь и далее положительные постоянные.

Лемма 4. *В терминах приведенных выше обозначений, если имеет место*

$$\varphi(x) = (1-x^2)^{1-2q}\,\overline{\varphi}(x)\,, \quad \overline{\varphi}(x) \in C\,[-1,\,1]$$

и справедливы включения

$$\psi_1(y) \in C\,[-1,\,0] \cap C^1(-1,\,0)\,, \qquad \psi_1'(y) \in L_1[-1,0]\,,$$

$$\psi_2(y) \in C\,[0,\,1] \cap C^1(0,\,1)\,, \qquad \psi_2'(y) \in L_1[0,1]\,,$$

где $\psi_1(-1) = \psi_2(1) = 0$, то

$$\widetilde{\Phi}(x) \in C[-1,1] \cap C^1((-1,0)\cup(0,1))\,, \qquad \widetilde{\Phi}'(x) \in L_1[-1,1]\,.$$

Следствие 1. *Если $\lambda = r$ и существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to 0+0} \widetilde{\psi}_1(x), \qquad \lim_{x\to 0+0} \widetilde{\psi}_2(x),$$

и они равны между собой, то

$$\widetilde{\Phi}(x) \in C^1(-1,1), \qquad \widetilde{\Phi}'(x) \in L_1[-1,1].$$

Из теоремы 2 следует, что при $\lambda + 2q < 1$, $r + 2q < 1$ ядро $K(x,t)$ имеет особенность интегрируемого порядка на особых линиях. Поэтому уравнение (20) относится к классу интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Однозначная разрешимость интегрального уравнения (20) в классе функций $C((-1,0)\cup(0,1)) \cap L_1[-1,1]$ следует из теоремы единственности решения задачи V_1.

Теорема 3. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и $r + 2q < 1$, $\lambda + 2q < 1$, то существует единственное решение задачи V_1.*

3. Задача V_2.

Здесь в областях D_-^1 и D_-^2 методом Римана-Адамара построим в явном виде решение задачи Дарбу [6] и вычислим (11) и (12):

$$v_-^1(x) = \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x} \tau_1(t)(x-t)^{-\lambda}\,dt + F_1(x), \tag{21}$$

$$v_-^2(x) = \frac{d}{dx}\int_{x}^{1} (t-x)^{-r}\,\tau_2(t)\,dt + F_2(x), \tag{22}$$

$$F_1(x) = k_3\int_{x}^{0} (s-x)^{-\lambda}\,\psi_1(s)\,ds, \tag{23}$$

$$F_2(x) = k_4\int_{0}^{x} (x-s)^{-r}\,\psi_2(s)\,ds, \tag{24}$$

$$k_3 = \frac{\Gamma(1-q)\,\Gamma(2-2q-\lambda)}{\Gamma(2-q-\lambda)\,\Gamma(2-2q)}(1-2q); \quad k_4 = \frac{\Gamma(1-q)\,\Gamma(2-2q-r)}{\Gamma(2-q-r)\,\Gamma(2-2q)}(1-2q).$$

На основании (21) и (22) устанавливаются аналоги лемм 1 - 3 и доказывается

Теорема 4. *Если существует решение задачи V_2, то оно единственно.*

Доказательство существования решения задачи V_2 как и в случае задачи V_1 проводится для случая, когда кривая $\Gamma \equiv \Gamma_0$. Для доказательства разрешимости задачи V_2 используются решения двух вспомогательных задач: задачи N в области D_+ и задачи Дарбу в областях D_-^1 и D_-^2. Эти решения, удовлетворяя условиям сопряжения (10), существование решения задачи V_2 эквивалентно редуцируется к разрешимости интегрального уравнения

$$\tau'(x) + k\int_{-1}^{1} \tau'(s)\, H(x,s)\, ds = F'(x)\,, \qquad -1 < x < 1\,, \tag{25}$$

где явный вид $H(x,s)$ приведен в работе [6], а $F'(x)$ определяется через функции (18), (23) и (24).

Теорема 5. *Ядро $H(x,s)$ бесконечно дифференцируемо в квадрате $\{(x,\, s):\ -1 < x, s < 1\}$, за исключением линий $x = s$, $s = 0$, $x = 0$. При этом справедлива оценка*

$$|H(x,\,s)| \le \begin{cases} C_3\left(\dfrac{1}{|x-s|^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{(1-xs)^{\lambda+2q}} + \dfrac{1}{|s|^r\,(-x)^{2q}}\right), & x < 0\,; \\[2ex] C_4\left(\dfrac{1}{|x-s|^{r+2q}} + \dfrac{1}{(1-xs)^{r+2q}} + \dfrac{1}{|s|^\lambda\, x^{2q}}\right), & x > 0\,. \end{cases}$$

Лемма 5. *В терминах приведенных выше обозначений, если имеет место*

$$\varphi(x) = (1-x^2)^{1-2q}\,\overline{\varphi}(x)\,, \qquad \overline{\varphi}(x) \in C\,[-1,\,1]\,,$$

и справедливы включения

$$\psi_1(y) \in C\,[-1,\,0] \cap C^1(-1,\,0)\,, \qquad \psi_1'(y) \in L_1[-1,0]\,,$$

$$\psi_2(y) \in C\,[0,\,1] \cap C^1(0,\,1)\,, \qquad \psi_2'(y) \in L_1[0,1]\,,$$

где $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$, то

$$F(x) \in C[-1,1] \cap C^2(-1,1)\,, \qquad F'(x) \in L_1[-1,1]\,.$$

В силу единственности решения задачи V_2 и альтернативы Фредгольма интегральное уравнение (25) при $r + 2q < 1$, $\lambda + 2q < 1$ разрешимо в классе функций $C^1(-1,1) \cap L_1[-1,1]$ и притом единственным образом.

Теорема 6. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5, $r + 2q < 1$, $\lambda + 2q < 1$, то существует единственное решение задачи* (2)-(4), (9), (10).

В заключение отметим, что в данной работе в силу введения новых условий сопряжения (6) и (10) существование решения задач V_1 и V_2 напрямую редуцируется к однозначной разрешимости интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, минуя аппарат сингулярных интегральных уравнений, в отличие от того, как это было в классических задачах Геллерстедта [8, с. 186].

Литература

1. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа // Успехи математических наук. – 1953. – VIII(2). – С. 160-161.

2. Волкодавов В.Ф., Илюшина Ю.А. Характеристический принцип локального экстремума для одного уравнения гиперболического типа и его применение // Изв. ВУЗов. Математика. – 2002. – 4;13. – С. 17-19.

3. Волкодавов В.Ф., Куликова Н.А. Задача Δ_2 для уравнения гиперболического типа с сопряжением пределов производных дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 2003. – 39; 12. – С. 1704-1707.

4. Волкодавов В.Ф., Наумов О.Ю. Для уравнения смешанного типа задача Т с сопряжением специального вида / Неклассические уравнения математической физики // Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2002. – С.41-49.

5. Скороход А.В. О существовании и единственности задачи Геллерстедта для уравнения смешанного типа со специальными условиями сопряжения // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. – 2008. – 2;61. – С.60-68.

6. Скороход А.В. О существовании решения задачи типа Геллерстедта для уравнения смешанного типа с нелокальным условием сопряжения // Труды Стерл.филиала АН Респ. Башкортостан. Серия "Физико-математические и технические науки-/Уфа:Гилем. – 2009. – 6. – С.127-143.

7. Сабитов К.Б. О принципе максимума для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 1988. – 24;11. – С.1967-1976.

8. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.

BOUNDARY PROBLEMS FOR THE EQUATION OF MIXED TYPE WITH NONLOCAL INTEGRAL CONJUGATION CONDITIONS

A.V. Scorohod

Volga region socially-humanitarian academy,
Antonova-Ovseenko St., 26, Samara, 443090, Russia, e-mail: scorohodav@yandex.ru

Abstract. The equation with changing type is studied. Such a changing takes place on the line $y = 0$ in the domain bounded by a piecewise curve with endpoints $A(-1, 0)$ and $B(1, 0)$ at $y > 0$ and by segments $x = -1$, $y = x$, $x = 1$, $y = -x$, at $y < 0$. Problems of the Gellersted type with nonlocal boundary conditions are investigated. The solution uniqueness is proved by the extremum method. It is done by the reduction to the unique solvability of the Fredholm integral equations of second type.

Key words: mixed type equation, problem with nonlocal boundary Gellersted conditions, extremum principle, the uniqueness and existence theorem, integral equation.