УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ [5)]

А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: soldatov48@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе исследована общая нелокальная задача Римана для аналитических функций в семействе весовых пространств Гёльдера. Рассмотрены вопросы фредгольмовой разрешимости задачи и асимптотика ее решений в угловых точках кусочно-гладкой границы области.

Ключевые слова: задача Римана, концевой символ, фредгольмовость, индекс, асимптотика.

Как известно [1], задача Римана-Гильберта заключается в отыскании аналитической в области D функции $\phi = u + iv$ по заданному линейному соотношению $au + bv = f$ на её граничном контуре $\Gamma = \partial D$. Полагая $G = a - ib$, это краевое условие можно записать в форме

$$\operatorname{Re} G\phi\big|_{\Gamma} = f\,. \tag{1}$$

Пусть контур Γ кусочно-гладкий и составлен из гладких дуг Γ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, а функция G кусочно-непрерывна, более точно, сужения G_j этой функции на Γ_j непрерывны. Граничное значение функции ϕ на Γ_j обозначим $\phi_{\Gamma,j}$. Тогда (1) можем переписать в форме

$$\operatorname{Re}\, G_j\phi_{\Gamma,j} = f_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m\,.$$

Эти соотношения можно записать на одном отрезке, если задать гладкие параметризации $\gamma_j : [0,1] \to \Gamma_j$ и обозначить $\phi_{\gamma,j} = \phi_{\Gamma,j} \circ \gamma_j$. Тогда краевое условие задачи Римана – Гильберта (1) по отношению к $m-$вектор – функции $\phi_\gamma = (\phi_{\gamma,j})_1^m$ и диагональной матрицы $A = (A_i\delta_{ij})_1^m$, $A_i = G_i \circ \gamma_i$, принимает следующий вид:

$$\operatorname{Re} A\phi_\gamma^+ = f\,, \tag{2}$$

где $m-$вектор $(f_i \circ \gamma_i)_1^m$ обозначен снова f.

Аналогичная постановка, когда A является произвольной $m\times m-$ матрицей-функцией, непрерывной на Γ, приводит к новой нелокальной задаче. Наряду с (1) указанная задача была сформулирована Риманом [2] в его знаменитой докторской диссертации, однако

[5]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракты № 02.740.11.0613 от 29.03.2010г., № П693 от 20.05.2010г.)

эта постановка осталась незамеченной и не получила дальнейшего развития. Например, частным случаем (2) является известная задача Карлемана [1], поставленная им на международном математическом конгрессе в Цюрихе более чем полвека спустя.

Пусть область D ограничена двумя гладкими дугами Γ_1 и Γ_2 с общими концами в точках τ_1 и τ_2 и задан сдвиг (диффеоморфизм) $\alpha : \Gamma_1 \to \Gamma_2$, оставляющий неподвижными ее концы. Тогда задача Карлемана состоит в отыскании аналитической в D функции ϕ по краевому условию

$$(\phi^+ - G\phi^+ \circ \alpha)\big|_{\Gamma_1} = f \,. \tag{3}$$

Подчиняя параметризации дуг Γ_1 и Γ_2 условию $\gamma_2 = \alpha \circ \gamma_1$, эту задачу можем переписать в форме (2) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -G \circ \gamma_1 \\ i & -iG \circ \gamma_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Как известно, с задачей Римана-Гильберта связано условие нормального типа, которое заключается в обратимости функции G, или что равносильно, в обратимости диагональной матрицы $A = (A_i \delta_{ij})_1^m$, $A_i = G \circ \gamma_i$.

Аналогичный вопрос по отношению к задаче (2) решается с помощью сигнатуры ориентации σ дуг Γ_j. Параметризация γ_j наделяет эту дугу ориентацией, по отношению к которой область D может лежать как слева, так и справа. В соответствии с этим полагаем $\sigma_j = 1$ и $\sigma_j = -1$. Полученное семейство $\sigma = (\sigma_j)_1^m$ и есть сигнатура ориентаций.

С каждой $m \times m$- матрицей $A = (A_{ij})$ свяжем матрицу A^σ с элементами

$$(A^\sigma)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & \sigma_j = 1, \\ \overline{A}_{ij}, & \sigma_j = -1\,. \end{cases} \tag{5}$$

В этих обозначениях принадлежность задачи (2) к нормальному типу определяется обратимостью матрицы A^σ, т.е. условием

$$\det\, A^\sigma(t) \neq 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\,.$$

Например, условимся в постановке задачи (3) дугу Γ_1 предполагать ориентированной положительно по отношению к D. Тогда $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = -1$,так что в соответствии с (4), (5) можем записать

$$A^\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{G \circ \gamma}_1 \\ i & i\overline{G \circ \gamma_1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Поскольку $\det A^\sigma(t) = 2i\overline{G} \circ \gamma_1$, нормальный тип задачи Карлемана сводится к обратимости матрицы G, что согласуется с известными результатами для этой задачи.

С задачей (2) нормального типа свяжем концевой символ — аналитическую на всей плоскости матрицу-функцию $X(\zeta) = U + V(\zeta)$, где U зависит только от A^σ, а $V(\zeta)$ – от геометрии области D.

Пусть точки $\tau_1, \ldots, \tau_m$ служат концами дуг Γ_i, $1 \leq i \leq m$ (в произвольной нумерации). Пусть $\delta > 0$ выбрано столь малым, что круги с центром в точках τ_j радиуса δ

попарно не пересекаются. По отношению к концам дуги Γ_i эти круги "вырезают" две дуги Γ_i^0, Γ_i^1, причем верхний индекс 0 (1) отвечает левому (правому) концу дуги Γ_i. Пересечение области D с этими кругами дает криволинейные секторы S_i с вершиной τ_i, боковыми сторонами которых служит соответствующая пара дуг из семейства Γ_j^k. Оставшаяся часть границы ∂S представляет собой дуги окружности $|z-\delta_i|=\delta$, которую ориентируем против часовой стрелки. Левый и правый концы этой дуги лежат на боковых сторонах сектора, которые обозначим, соответственно, $\partial^0 S_i$ и $\partial^1 S_i$, и назовем, левой и правой сторонами. В результате получаем новую нумерацию $\partial^p S_i$, $1 \le i \le m$, $p=0,1$, дуг $\Gamma_1^0,\ldots,\Gamma_m^0,\Gamma_1^1,\ldots,\Gamma_m^1$. Удобно, однако зафиксировать некоторую нумерацию $\Gamma_{(1)},\ldots,\Gamma_{(2m)}$ этих дуг, не связанную с этими двумя специальными нумерациями. Таким образом, для каждого номера $k\in\{1,\ldots,2m\}$ существуют единственные два элемента $(i,p),(j,q)\in\{1,\ldots,m\}\times\{0,1\}$, для которых $\Gamma_{(k)}=\Gamma_i^p=\partial^q S_j$.

Введем теперь две $2m\times 2m$- матрицы U и $V(\zeta),\zeta\in\mathbb{C}$ с элементами

$$\begin{gathered} U_{kr}=[(A^{-\sigma})^{-1}A^{\sigma}]_{ij}(0) \quad \text{при} \quad \Gamma_{(k)}=\Gamma_i^0\,,\ \ \Gamma_{(r)}=\Gamma_j^0, \\ U_{kr}=[(A^{\sigma})^{-1}A^{-\sigma}]_{ij}(1) \quad \text{при} \quad \Gamma_{(k)}=\Gamma_i^1\,,\ \ \Gamma_{(r)}=\Gamma_j^1, \\ U_{kr}=0 \quad \text{в остальных случаях}\,, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} V_{kr}(\zeta)=V_{rk}(\zeta)=e^{i\theta_j\zeta} \quad \text{при} \quad \Gamma_{(k)}=\partial^0 S_j\,,\ \ \Gamma_{(r)}=\partial^1 S_j\,, \\ V_{kr}(\zeta)=0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{gathered} \tag{8}$$

где θ_j есть раствор криволинейного сектора S_j.

Мероморфная функция
$$\frac{\det[U+V(\zeta)]}{\det[1+V(\zeta)]}$$
при $\operatorname{Im}\zeta\to\pm\infty$, $\operatorname{Re}\zeta=\mathrm{const}$ стремится к ненулевым пределам, так что проекция нулей функции $\det X(\zeta)$ на действительную ось является дискретным множеством. Пусть $\varepsilon>0$ выбрано столь малым, что эти нули отсутствуют в полосе $-\varepsilon\leqslant\operatorname{Re}\zeta<0$. Положим

$$æ_0=-\frac{1}{\pi}[\ln(\arg\det A^{\sigma})(t)]\Big|_0^1-\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{\det[U+V(\zeta)]}{\det[1+V(\zeta)]}\Big|_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty}, \tag{9}$$

где выражения в квадратных скобках определяются непрерывными ветвями логарифма, а вертикальная черта означает приращение в соответствующих пределах. Легко показать, что число $æ_0$ целое.

Основной результат сформулируем в рамках весовых гёльдеровых пространств, связанных с весовой функцией

$$\rho_\lambda(z)=|z-\tau_1|^{\lambda}\cdots|z-\tau_m|^{\lambda}, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Пусть $C^{\mu}(\overline{D})$, $0<\mu<1$, означает пространство функций удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ. Оно снабжается обычной нормой

$$|\varphi|=|\varphi|_0+[\varphi]_\mu\,,$$

где первое слагаемое есть sup-норма, а второе слагаемое представляет собой постоянную Гёльдера

$$[\varphi]_\mu = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\,\varphi(z_1) - \varphi(z_2)\,|}{|\,z_1 - z_2\,|^{\,\mu}}.$$

Это пространство содержится в более широком пространстве $C_0^\mu(\overline{D}) = C_0^\mu(\overline{D}; \tau_1, \ldots \tau_m)$ ограниченных функцией φ с конечной нормой

$$|\,\varphi| = |\varphi|_0 + [\rho_\mu \varphi]_\mu\,.$$

Оно состоит из всех функций вида $\varphi = \rho_\mu^{-1}\psi$, где $\psi \in C^\mu(\overline{D})$ и $\psi(\tau_1) = \ldots = \psi(\tau_m) = 0$. Ясно, что эти функции определены и ограничены в $\overline{D} \setminus \{\tau_1, \ldots \tau_m\}$. Нетрудно убедиться, что операция умножения как билинейное отображение ограничено $C_0^\mu \times C_0^\mu \to C_0^\mu$, так что пространство C_0^μ является банаховой алгеброй.

Исходя из весовой функции (10), пространство $C_\lambda^\mu(\overline{D}) = C_\lambda^\mu(\overline{D}; \tau_1, \ldots \tau_m)$ определим как класс функций $\varphi = \rho_\lambda \varphi_0$ с $\varphi_0 \in C_0^\mu$, оно снабжается "перенесеннной" нормой

$$|\varphi| = |\varphi_0|_{C_0^\mu}\,.$$

С возрастанием λ это пространство убывает по вложению, так что можно положить

$$C_{\lambda+0}^\mu = \bigcup_{\varepsilon>0} C_{\lambda+\varepsilon}^\mu, \quad C_{\lambda-0}^\mu = \bigcap_{\varepsilon>0} C_{\lambda-\varepsilon}^\mu\,.$$

Положим ещё $C^{\mu+0} = \bigcup_{\varepsilon>0} C^{\mu+\varepsilon}$ и пусть запись $\Gamma_j \in C^{1,\,\mu+0}$ означает, что $\gamma_j' \in C^{\,\mu+0}[0,1]$. В дальнейшем в дополнение к нормальному типу на дуги Γ_j, матрицу- функцию a и растворы θ_j секторов S_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, накладываем условия

$$\Gamma_j \in C^{1,\,\mu+0}, \quad a(t) \in C^{\mu+0}[0,1], \quad 0 < \theta_j < 2\pi\,. \tag{11}$$

Сформулируем основные результаты [?, ?] о фредгольмовой разрешимости задачи Римана в пространстве $C_\lambda^\mu(\overline{D})$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\det X(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda\,. \tag{12}$$

Тогда

1) однородная задача (2) в пространстве $C_\lambda^\mu(\overline{D})$ имеет конечное число n линейно независимых решений $\phi_1, \ldots, \phi_n$, которые содержатся в классе $C_{\lambda+0}^\mu$;

2) существуют такие линейно независимые вещественные m- вектор-функции $g_1, \ldots, g_{n'} \in C_{-\lambda+0}^\mu$, что условие

$$\int_0^1 f(t) g_i(t) \frac{dt}{t(t-1)} = 0\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n'\,,$$

необходимо и достаточно для разрешимости задачи в пространстве $C_\lambda^\mu(\overline{D})$;

3) индекс задачи $æ(\lambda) = n - n'$ *дается формулой*

$$æ(\lambda) = æ_0 + s(\lambda) + 2 - d\,, \tag{13}$$

где $s(\lambda)$ *есть число нулей функции* $\det X(\zeta)$ *в замкнутой полосе между прямыми* $\operatorname{Re}\zeta = 0$ *и* $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$, *взятое с учетом кратности и знаком "+" при* $\lambda < 0$ *и знак "−" при* $\lambda > 0$, *а* d *есть число связных компонент контура* $\Gamma = \partial D$;

4) если $\det X(\zeta) \neq 0$ *всюду в полосе* $\lambda' < \operatorname{Re}\zeta < \lambda''$, *то числа* n, n' *и функции* $\phi_1, \dots, \phi_n$ *и* $g_1, \dots, g_{n'}$ *не зависят от* λ, $\lambda' < \lambda < \lambda''$.

Из теоремы 1 следует, что при выполнении условия (12) любое решение $\phi \in C^\mu_{\lambda-0}$ задачи с правой частью $f \in C^\mu_{\lambda+0}$ в действительности принадлежит классу $C^\mu_{\lambda+0}$. Рассмотрим случай, когда это условие нарушено.

Теорема 2. *Пусть функция* $\det X(\zeta)$ *допускает на прямой* $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$ *нули* $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ *и* r_k *есть порядок полюса матрицы- функции* $X^{-1}(\zeta)$ *в точке* ζ_k. *Пусть* $\phi \in C^\mu_{\lambda-0}(;\tau_1, \dots, \tau_m)$ *есть решение задачи с правой частью* $f \in C^\mu_{\lambda+0}([0,1]; 0, 1)$. *Тогда в каждом секторе* $S = S_j$ *с вершиной* $\tau = \tau_j$ *функция* ϕ *представима в виде*

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{r_k - 1} c_{kr} [\ln(z-\tau)]^r (z-\tau)^{\zeta_k} + \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C^\mu_{\lambda+0}(\overline{S}; \tau)\,, \tag{14}$$

с некоторыми $c_{kr} \in \mathbb{C}$.

Особо остановимся на частном случае этой теоремы, когда $\lambda = 0$, в этом случае классы $C^\mu_{\lambda\pm0}$ обозначаем кратко $C^\mu_{\pm0}$. Пусть в условиях теоремы $\lambda = 0$, $l = 1$ и $\zeta_1 = 0$. Если порядок полюса r_1 в точке $\zeta = 0$ равен 1, то (14) переходит в представление

$$\phi(z) = c + \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C^\mu_{+0}(\overline{S}; \tau) \tag{15}$$

с некоторой постоянной $c \in \mathbb{C}$. Другими словам, функция ϕ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. В этой связи удобно ввести конечномерное расширение $C^\mu_{(+0)}(\overline{D})$ класса C^μ_{+0}, которое состоит из функций $\phi \in C^\mu_{-0}$, которые в каждом секторе $S = S_j$ допускают разложение вида (15). Отмеченный частный случай теоремы 2 можно сформулировать следующим образом.

Следствие. *Пусть* $\det X(\zeta) \neq 0$ *при* $\operatorname{Re}\zeta = 0$, $\zeta \neq 0$ *и матрица- функция* $[u + v(\zeta)]^{-1}$ *в точке* $\zeta = 0$ *может допускать полюс первого порядка. Тогда любое решение* $\phi \in C^\mu_{-0}$ *с правой частью* $f \in C^\mu_{+0}$ *принадлежит классу* $C^\mu_{(+0)}$. *В частности, целое число* $æ_0$ *является индексом задачи в этом классе.*

Теоремы 1 и 2 можно дополнить соответствующими утверждениями о гладкости. Обозначим $C^{1,\mu}_\lambda(\overline{D}; \tau_1, \dots, \tau_m)$ класс аналитических в D функций $\phi \in C^\mu_\lambda$, производная которых принадлежит $C^\mu_{\lambda-1}$. Аналогичным образом определяются и класс $C^{1,\mu}_\lambda([0,1]; 0, 1)$. Ясно также, как понимать классы $C^{1,\mu}_{\lambda\pm0}$ и $C^{1,\mu+0}$.

Теорема 3. *Пусть в дополнение к (11) функция* $A \in C^{1,\mu+0}[0,1]$. *Тогда в условиях теоремы 1 любое решение* $\phi \in C^\mu_\lambda$ *задачи (2) с правой частью* $f \in C^{1,\mu}_\lambda$ *принадлежит* *классу $C^{1,\mu}_{\lambda}$. Аналогично если в условиях теоремы 2 функция $f \in C^{1,\mu}_{\lambda+0}$, то в разложении (14) функция $\phi_0 \in C^{1,\mu}_{\lambda+0}(\overline{S};\tau)$.*

Вычисления, связанные с матричным концевым символом значительно упрощаются, если последний имеет блочно-диагональную структуру. Пусть задано разбиение E множества $\{1,2,\ldots,2m\}$ на попарно непересекающиеся подмножества $E_1,\ldots,E_n$. Тогда по определению $2m\times 2m-$матрица $X=(X_{kr})_1^{2m}$ блочно-диагональна относительно этого разбиения, если $E_{kr}=0$ при $k\in E_i, r\in E_j$, $i\neq j$. Ясно, что умножение таких матриц можно осуществлять поблочно по отношению к диагональным блокам $X(E_i)=(X_kr)$, $k,r\in E_i$. Точно также $\det X$ равен произведению определителей этих блоков. Зависимость от ζ диагональных блоков указываем обозначением $X(\zeta,E_i)$.

Из определений (7), (8) видно, что матрицы U и V блочно-диагональны относительно разбиений Q и P, определяемых следующим образом. Первое из них состоит из двух элементов $Q^p=\{k|\,\Gamma_{(k)}=\Gamma_i^p,\ 1\leqslant i\leqslant m\}$, $p=0,1$, а второе разбиение составлено из m пар

$$P_i=\{k|\,\Gamma_{(k)}=\Gamma_i^p,\ p=0,1\}\,,\quad 1\leqslant i\leqslant m\,. \tag{16}$$

Однако в общем случае матрица $X=U+V$ не допускает какой-либо блочно-диагональной структуры.

Положение меняется, если исходная матрица A блочно-диагонально относительно некоторого разбиения $I=(I_j)$ множества $\{1,\ldots,m\}$. В этом случае можем ввести более мелкое разбиение Q с элементами

$$Q_j^p=\{k|\,\Gamma_{(k)}=\Gamma_i^p,\ i\in I_j\}\,,\quad p=0,1\,. \tag{17}$$

Если теперь оба разбиения P и Q являются измельчением E, т.е. каждое E_i представляется обьединением как целых элементов P, так и Q, то матрицы U и V, а вместе с ними и $X=U+V$ блочно-диагональны относительно E. Данное свойство позволяет расширить класс весовых пространств, для которых сохраняются теоремы 1-3.

Исходя из набора $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ вещественных чисел, аналогично (10) введем весовую функцию

$$\rho_\lambda(z)=|z-\tau_1|^{\lambda_1}\cdots|z-\tau_m|^{\lambda_m}\,. \tag{18}$$

При $\lambda_1=\ldots=\lambda_m$ весовой порядок λ отождествляем с $\lambda_1\in\mathbb{R}$, в этом случае (18) переходит в (10). По отношению к данной весовой функции пространство $C^\mu_\lambda(\overline{D};\tau_1,\ldots,\tau_m)$ определяется аналогично предыдущему. Это же верно и применительно к пространству $C^\mu_\lambda([0,1];0,1)$ с весовым порядком $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1)$ и весовой функцией $\rho_\lambda(t)=t^{\lambda_0}(1-t)^{\lambda_1}$ на отрезке $[0,1]$.

С весовым порядком $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, фигурирующем в (18), свяжем семейство весовых порядков $\lambda^j=(\lambda^j_0,\lambda^j_1)$, $1\leqslant j\leqslant m$, полагая $\lambda^j_p=\lambda_i$, если дуга Γ^p_j служит боковой стороной сектора S_i. Обозначая аналогичным образом τ^j_0 и τ^j_1 концы дуги Γ_j, легко видеть, что для $\phi\in C^\mu_\lambda(\overline{D};\tau_1,\ldots,\tau_m)$ граничная функция $\phi_{\Gamma,j}$ принадлежит $C^\mu_{\lambda^j}(\Gamma_j;\tau^j_0,\tau^j_1)$ и отображение $\phi\to\phi_{\Gamma,j}$ ограничено в этих пространствах. В частности, отображение $\phi\to\phi_{\gamma,j}$ ограничено $C^\mu_\lambda(\overline{D})\to C^\mu_{\lambda^j}[0,1]$.

Удобно с λ также связать $2m-$ вектор $(\lambda_{(1)},\ldots,\lambda_{(2m)}$, который также обозначаем λ, полагая $\lambda_{(k)}=\lambda_i$, если дуга $\Gamma_{(k)}$ служит боковой стороной сектора S_i. Очевидно, его компненты составлены из чисел λ_p^j. По аналогии с матричными диагональными блоками под $\lambda(E_i)$ условимся понимать вектор с компонентами $\lambda_{(k)}$, $k \in E_i$. В частности, двухкомонентные вектора $\lambda(P_j)$ принадлежат $\mathbb{R}$, т.е. их компоненты совпадают. Если разбиения P и Q служат измельчением разбиения E и вектора $\lambda(E_i)$ принадлежат $\mathbb{R}$ для всех i, то диагональный блок $X(\zeta, E_i)$ можно рассматривать на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda(E_i)$.

Теорема 4. *Пусть разбиения P и Q являются измельчением E и задача Римана рассматривается в семействе весовых пространств с $\lambda(E_i) \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда с незначительными изменениями теоремы 1-3 сохраняют свою силу и в этом случае. Более точно, условие (12) теоремы 1 заменяется на*

$$\det X(\zeta, E_i) \neq 0\,, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda(E_i)\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n\,, \tag{18}$$

а формула индекса (13) переходит в

$$æ_\lambda = æ_0 + \sum_1^n s_i(\lambda) + 2 - d\,, \tag{20}$$

где s_i определяется по отношению к $X(\zeta, E_i)$ как в теореме 1.

Что касается теоремы 2, то пусть ζ_i и r_i определяются как в этой теореме по отношению к $X(\zeta, E_i)$. Тогда ее утверждение справедливо в каждом секторе S_j, для которого $P_j \subseteq E_i$.

Отметим, что теоремы 1-4 справедливы и в случае, когда в постановке (2) под ϕ понимается аналитическая $l-$ вектор-функция. Соответственно элементами A_{ij} в свою очередь служат $l \times l-$ матрицы-функции. Очевидно, это же верно и по отношению к элементам матричного концевого символа. Единственное изменение, которое нужно ввести в предыдущих теоремах, это последнее слагаемое в формулах индекса (13) и (20) заменить на $l(2-d)$.

Проиллюстрируем эти результаты на примере двух задач Римана-Гильберта (3) и Карлемана (4).

Задача Римана-Гильберта.

Рассмотрим задачу (1) с обратимой кусочно непрерывной $l \times l-$ матрицей-функцией G, для которой в соответствии с (11) функции $A_i = G \circ \gamma_i \in C^{\mu+0}[0,1]$. Очевидно, для этой задачи $A = (A_i\delta_{ij})_1^m$, $\quad A_i = G \circ \gamma_i$, и

$$U = (U_k\delta_{kr})_1^{2m}, \quad U_k = \begin{cases} (A_i^{-1}\overline{A}_i)^{\sigma_i}(1)\,, & \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^1\,, \\ (A_i^{-1}\overline{A}_i)^{-\sigma_i}(0)\,, & \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^0\,. \end{cases}$$

В частности, её концевой символ блочно-диагонален относительно разбиения P и задачу можно рассматривать в весовом пространстве с произвольным весовым порядком $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\tau_{(k)}$ есть конец дуги $\Gamma_{(k)}$, расположенный на контуре Γ, и $\hat{G}_k = \lim G(t)$ при $z \to \tau_{(k)}$, $z \in \Gamma_{(k)}$. Тогда $\hat{G}_k = A_i(p)$ при $\Gamma_{(k)} = \Gamma_i^p$ и предыдущее соотношение можно переписать в форме

$$U_k = \begin{cases} [(G^{-1}\overline{G})\widehat{\ }_k]^{\sigma_i}\,, & \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^1\,, \\ ((G^{-1}\overline{G})\widehat{\ }_k]^{-\sigma_i}\,, & \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^0\,. \end{cases}$$

Если боковая сторона сектора S_j совпадает с Γ_i^p, то значения $\sigma_i = \pm 1$ и $p = 0,1$ между собой определенным образом связаны:

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & \partial^0 S_j = \Gamma_i^0, \\ -1, & \partial^0 S_j = \Gamma_i^1, \end{cases} \qquad \sigma_i = \begin{cases} -1, & \partial^1 S_j = \Gamma_i^0, \\ 1, & \partial^1 S_j = \Gamma_i^1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$U_k = \begin{cases} (G^{-1}\overline{G})\widehat{\ }_k, & \Gamma_{(k)} = \partial^1 S_j, \\ (\overline{G}^{-1}G)\widehat{\ }_k, & \Gamma_{(k)} = \partial^0 S_j. \end{cases} \tag{21}$$

Если границу сектора S_j с вершиной τ_j ориентировать против часовой стрелки, то предельные значения $\hat{G}_k$ на дуге $\Gamma_{(k)} = \partial^p S_j$ функции G в точке τ_j можно обозначить $G(\tau_j + 0)$ для $\Gamma_{(k)} = \partial^0 S_j$ и $G(\tau_j - 0)$ для $\Gamma_{(k)} = \partial^1 S_j$. В этих обозначениях с учетом (21) для диагонального блока концевого символа имеем следующее выражение:

$$X(\zeta, P_j) = \begin{pmatrix} (\overline{G}^{-1}G)(\tau_j + 0) & e^{i\theta_j\zeta} \\ e^{i\theta_j\zeta} & (G^{-1}\overline{G})(\tau_j - 0) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Таким образом, условие фредгольмовости задачи Римана-Гильберта в пространстве $C_\lambda^\mu(\hat{D}; \tau_1, \ldots, \tau_m)$ выразится условием

$$\det X(\zeta, P_j) \neq 0, \quad \mathrm{Re}\,\zeta = \lambda_j,$$

и при его выполнении индекс задачи дается формулой

$$æ(\lambda) = -\frac{1}{\pi}\sum_1^m \sigma_j (\arg\det G)\big|_{\Gamma_j} + æ_0 + \sum_1^m s_j(\lambda_j) + l(2-d).$$

Здесь учтено, что

$$\arg(\det A_j^{\sigma_j})\big|_0^1 = \sigma_j \arg(\det G)\big|_{\Gamma_j},$$

где приращение на дуге Γ_j берется в соответствии с ее ориентацией. Ясно, что эта величина не зависит от выбора ориентации. Аналогичное свойство справедливо и по отношению к концевому символу (22).

Вычисления, связанные с определителем матрицы (22) и порядков полюсов обратной матрицы можно несколько упростить. С этой целью в классе целых $n_j \times n_j$-матриц-функций $X_j(\zeta)$, $j = 1,2$, удобно ввести следующее отношение эквивалентности: $X_1 \sim X_2$, если существуют такие целые $n_1 \times n_1-$ матрицы-функции $Y(\zeta), Z(\zeta)$, что определитель их произведения постоянен и отличен от нуля и имеет место равенство $YX_1Z = \mathrm{diag}(1, X_2)$, где для определенности $n_1 \geq n_2$ и 1 означает единичную $(n_1 - n_2) \times (n_1 - n_2)$ – матрицу (при $n_1 = n_2$ правую часть этого соотношения следует заменить на X_2). Если A, B – заданные $n \times n-$ матрицы и $z = e^{i\theta\zeta}$ – скалярная матрица того же порядка, то в этих обозначениях

$$\begin{pmatrix} A & z \\ z & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z^{-1}A \\ B & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z - z^{-1}BA \end{pmatrix}.$$

Применительно к матрице (22) отсюда приходим к соотношению

$$X(\zeta, P_j) \sim \operatorname{diag}(e^{i\theta_j\zeta},\ e^{i\theta_j\zeta})\operatorname{diag}(1,\ e^{2i\theta_j\zeta} - x_j) \tag{23}$$

с $l \times l-$ матрицей $x_j = (G^{-1}\overline{G})(\tau_j - 0)(\overline{G}^{-1}G)(\tau_j + 0)$. В частности, нули концевого символа $\det X(\zeta, P_j)$ и порядки полюсов матрицы $X^{-1}(\zeta, P_j)$ целиком определяются через собственные значения (включая их кратности и порядки) матрицы x_j.

Задача Карлемана.

Рассмотрим задачу (3) с обратимой кусочно непрерывной $l\times l-$ матрицей-функцией G, для которой $G\circ\gamma_1 \in C^{\mu+0}[0,1]$. Полагая $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, для матрицы A^σ имеем выражение (6). Пусть дуги Γ_j ориентированы от τ_1 к τ_2 и выбрана следующая нумерация концевых дуг:

$$\begin{array}{cccc} \Gamma_{(1)} & \Gamma_{(2)} & \Gamma_{(3)} & \Gamma_{(4)} \\ \Gamma_1^0 & \Gamma_2^0 & \Gamma_2^1 & \Gamma_2^0 \end{array}.$$

В этой нумерации

$$\begin{array}{cccc} \Gamma_{(1)} & \Gamma_{(2)} & \Gamma_{(3)} & \Gamma_{(4)} \\ \partial^0 S_1 & \partial^1 S_1 & \partial^0 S_2 & \partial^1 S_2 \end{array},$$

так что $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2$ и матрица X блочно диагональна относительно P. Согласно (6)

$$(A^\sigma)^{-1}A^{-\sigma} = (2ix)^{-1}\begin{pmatrix} i\bar{x} & \bar{x} \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ -i & -ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ -\bar{x}^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad x = G\circ\gamma_1 .$$

Следовательно, по отношению к $x_j = G(\tau_j)$, $j = 1,2$ имеем:

$$X(\zeta, P_1) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1\zeta} - x_1 \\ e^{i\theta_1\zeta} - \bar{x}_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(\zeta, P_2) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_2\zeta} - \bar{x}_2 \\ e^{i\theta_2\zeta} - x_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому как и в случае предыдущей задачи нули концевого символа $\det X(\zeta, P_j)$ и порядки полюсов матрицы $X^{-1}(\zeta, P_j)$ целиком определяются через собственные значения (включая их кратности и порядки) матрицы x_j. Соответственно формула индекса (13) принимает следующий вид

$$æ(\lambda) = -\frac{1}{\pi}(\arg\det G)\big|_{\Gamma_1} + æ_0 + \sum_1^2 s_j(\lambda_j) + l\,.$$

Теоремы 1-4 сохраняют свою силу и тогда, когда граничные дуги Γ_i области D в своих общих концах могут касаться друг друга внешним образом, т.е. когда условие (11) на растворы θ_j секторов S_j расширено до $0 < \theta_j \leqslant 2\pi$. Эти теоремы остаются справедливыми и в случае, когда границей области D служит произвольная кусочно-гладкая кривая Γ. Под последней понимается обьединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. Эти дуги разбиваются на два класса – простые дуги, относительно которых область лежит по одну сторону, и разрезы. Занумеруем эти дуги в виде Γ_j, $1 \leqslant m \leqslant m$, считая разрезы дважды, и рассмотрим семейство попарно непересекающихся областей $\Delta_i \subseteq D$, $1 \leqslant m \leqslant m$, со свойством $\Gamma \cap \partial\Delta_i = \Gamma_i$ для всех i. Тогда граничное значение аналитической в D функции ϕ можем задать в виде семейства функций

$$\phi_{\Gamma,i}(t) = \lim_{z \to t,\, z \in \Delta_i} \phi(z), \qquad t \in \Gamma_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\,,$$

по отношению к которому можем поставить задачу (2). Все дальнейшие обозначения остаются неизменными с той разницей, что некоторые из криволинейных секторов представляют собой круги с разрезом вдоль "криволинейного" радиуса, т.е. дуги, соединяющей центр круга с его границей. Сигнатура ориентации σ_i определяется как выше по отношению к области Δ_i, прилегающей к дуге Γ_i. Ясно также, как понимать пространство C^μ_λ для аналитических в области D функций.

Постановку обобщенной задачи Римана (2) можно распространить на случай нескольких областей D_i, $1 \le i \le n$, между собой никак не связанных. Пусть как и выше область D_i ограничена кусочно-гладкой кривой ∂D_i, составленной из гладких дуг Γ_{ij} $1 \le j \le m_i$, где разрезы встречаются дважды. Аналогичный смысл имеет и сигнатура ориентации σ_{ij}, криволинейные сектора S_{ij} с вершинами τ_{ij} и боковыми сторонами $\partial^0 S_{ij}, \partial^1 S_{ij}$, $1 \le j \le m_i$. Пусть функция ϕ_i аналитична в области D_i, $1 \le i \le n$. Функции ϕ_i ставится в соответствие семейство $\phi_{\Gamma,ij}$, $1 \le j \le m_i$ аналогично предыдущему.

Положим $m = m_1 + \ldots + m_n$ и множество $\{1, \ldots, m\}$ разобьем на n непересекающихся подмножеств O_i, $1 \le i \le n$, состоящих из m_i элементов. В соответствии с этим дуги Γ_{ij}, секторы S_{ij}, граничные значения $\phi_{\Gamma,ij}$ и сигнатуры σ_{ij}, $1 \le j \le m_i$, можем занумеровать элементами множества O_i, в результате получаем соответствующие семейства из m элементов. Тогда по отношению к $m-$ вектору $\phi_\gamma = (\phi_{\gamma,j})_1^m$ можем поставить задачу (2), которая рассматривается в классе

$$\prod_{i=1}^{n} C^\mu_{(\lambda_{ij})}(D_i; \tau_{ij}, 1 \leqslant j \leqslant m_i).$$

Все приведенные выше результаты остаются справедливыми и в этом более общем случае.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968.

2. Риман Б. Сочинения / Б. Риман Б. – М.: Гостехиздат, 1948.

3. Солдатов А.П. Краевые задачи теории функций в областях с кусочно-гладкой границей. Ч.II / А.П. Солдатов. – Тбилиси: Изд-во ТГУ, Ин-т прикл. матем. им. И.Н.Векуа., 1991. – 274 с.

4. Солдатов А.П. Обобщённая задача Римана на римановой поверхности // Докл.РАН. – 1998. – 362;6. – С.735-738.

NONLOCAL RIEMANN PROBLEM OF FUNCTION THEORY

A.P. Soldatov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: soldatov48@bsu.edu.ru

Abstract. The general nonlocal Riemann problem is investigated for analytic functions in weighted Holder's spaces. The Fredholm solvability of this problem is studied and the index formula is obtained. The solution asymptotics in corner points of the domain border is also found.

Key words: Riemann's problem, end symbol, Fredholm's solvability, index, asymptotics.