УДК 517.518.32

О КОНСТАНТАХ РИССА ДЛЯ СИСТЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СДВИГОВ ФУНКЦИИ ГАУССА

М.В. Журавлев

Воронежский государственный университет,
Воронеж, Россия, e-mail: soracul@bk.ru

Аннотация. В работе показано, что отношение верхней и нижней констант Рисса для системы целочисленных сдвигов функции Гаусса быстро растёт при стремлении дисперсии к бесконечности. При переходе от функции Гаусса к интерполяционной функции Лагранжа отношение констант Рисса стремится к двум, хотя система целочисленных сдвигов этой функции в этом пределе становится ортонормированной.

Ключевые слова: константы Рисса, функция Лагранжа, функция Гаусса, тета-функция Якоби.

1. Обозначения и определения

Пусть даны функции $\varphi_k(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 1. *Функции $\varphi_k(x)$ образуют систему Рисса с константами A и B, если для любого $c \in l_2$ выполнена двусторонняя оценка* [1, 2]

$$A\|c\|_{l_2}^2 \le \| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\varphi_k(x)\|_{L_2}^2 \le B\|c\|_{l_2}^2 \,, \tag{1}$$

где нормы задаются обычным образом:

$$\|c\|_{l_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \quad \|f\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\,.$$

Величина A в двойном неравенстве (1) *называется нижней, а B – верхней константами Рисса. Если система функций ортонормирована, то A и B равны* 1.

Пусть $\varphi_k(x)$ представляют собой целочисленные сдвиги одной функции $\varphi(x)$, т.е.

$$\varphi_k(x) = \varphi(x-k), \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Определение 2. *Функция $g(x)$, являющаяся линейной комбинацией $\varphi_k(x)$, называется функцией Лагранжа (узловой функцией), если для нее выполняются равенства*

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\varphi(x-k), \quad g(m) = \delta_{0m}, \qquad m \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

В дальнейшем нам понадобится тета-функция Якоби

$$\Theta_3(t,q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikt}, \qquad |q| < 1,$$

и связанное с ней преобразование Пуассона [3, 4]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-a(x+\pi m)^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{a}\right) e^{2imx}. \tag{3}$$

2. Формулировка основных результатов

В случае целочисленных сдвигов функции Гаусса константы Рисса могут быть найдены аналитически с помощью тета-функции Якоби.

Теорема 1. *Для системы функций $\varphi_k(x) = \exp(-(x-k)^2/2\sigma^2)$ константы Рисса вычисляются по формулам:*

$$A = \sigma\sqrt{\pi}\ \Theta_3(\pi/2; q_1), \qquad B = \sigma\sqrt{\pi}\ \Theta_3(0; q_1), \qquad q_1 = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\right). \tag{4}$$

Заметим, что константы Рисса зависят от параметра σ, причем нижняя константа очень быстро убывает с ростом σ. Например, при $\sigma = 2$ она имеет порядок 10^{-16}. Если же перейти от функции Гаусса к функции Лагранжа $g(x)$, то справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Для системы функций $g_k(x) = g(x-k)$ константы Рисса задаются формулами:*

$$A = \min_{0\le\xi\le 2\pi} P(\xi), \qquad B = \max_{0\le\xi\le 2\pi} P(\xi), \tag{5}$$

где 2π-периодическая функция $P(\xi)$ задается формулой

$$P(\xi) = \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi m)^2)}{\left[\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(\xi+2\pi k)^2\right)\right]^2}.$$

Известно, что при $\sigma \to +\infty$ система функций $g_k(x)$ переходит в ортонормированную систему $\sin c(\pi(x-k))$ [5]. Но естественное предположение о стремлении констант Рисса к общему пределу оказывается неверным.

Теорема 3. *Пусть величины $A = A(\sigma)$ и $B = B(\sigma)$ заданы формулами* (5). *Тогда*

В таблице 1 приведены значения констант Рисса при разных σ. В случае функции Лагранжа значения A и B при $\sigma \geq 2$ фактически стабилизируются на пределе точности вычислений (например, в случае использования переменных типа extended в языке Delphi, одинаковыми оказываются первые 17 значащих цифр). Сами расчеты проводились с помощью преобразования Пуассона (3).

Таблица 1

Значения констант Рисса

σ	Функции Гаусса			Функции Лагранжа		
	A	B	B/A	A	B	B/A
0.2	0.353	0.356	1.01	0.353	0.356	1.008
0.4	0.415	1.009	2.43	0.498	0.852	1.711
0.6	0.130	2.262	17.46	0.499	0.997	1.998
1.0	$6.450 \cdot 10^{-4}$	6.283	$9.67 \cdot 10^{3}$	0.499	0.999	2
2.0	$3.597 \cdot 10^{-16}$	25.132	$6.98 \cdot 10^{16}$	0.500	1.000	2
3.0	$2.996 \cdot 10^{-37}$	56.548	$1.88 \cdot 10^{38}$	0.500	1.000	2
4.0	$5.276 \cdot 10^{-67}$	100.53	$1.91 \cdot 10^{68}$	0.500	1.000	2
5.0	$2.184 \cdot 10^{-105}$	157.08	$7.19 \cdot 10^{106}$	0.500	1.000	2

Аналогичные численные результаты для коэффициентов функции Лагранжа, построенной с помощью функции Гаусса, были описаны ранее в работе [6].

3. Доказательства теорем

Для доказательства теоремы 1 применим преобразование Фурье, задаваемое формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \,,$$

к линейной комбинации функций

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k) \,, \qquad \varphi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) .$$

В силу равенства Парсеваля $\|\widehat{f}\|^2_{L_2} = \|f\|^2_{L_2}$ и соотношения $\widehat{\varphi}(\xi) = \sigma \exp(-\sigma^2\xi^2/2)$ имеем:

$$\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k) \|^2_{L_2} = \| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sigma \exp(-\sigma^2\xi^2/2) e^{-ik\xi} \|^2_{L_2} =$$

$$= \| \sigma \exp(-\sigma^2\xi^2/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} \|^2_{L_2} =$$

$$= \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2\xi^2) \, | \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} |^2 d\xi \,.$$

Разбив интеграл по всей оси на сумму интегралов по отрезкам $[2\pi m, 2\pi m + 1]$, $m \in \mathbb{Z}$, и сделав замену $\xi = 2\pi m + t$, получим, что

$$\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k) \|^2_{L_2} = \sigma^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \exp(-\sigma^2\xi^2) \, | \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} |^2 d\xi =$$

$$= \sigma^2 \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(t+2\pi m)^2) \, | \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 dt \,.$$

Возможность перестановки порядка суммирования и интегрирования в этой и последующих выкладках обусловлена быстрой сходимостью рядов с функциями Гаусса. Применив преобразование Пуассона (3), где $a = 4\sigma^2$ и $x = \frac{t}{2}$, получим, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(t+2\pi m)^2) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt} \,.$$

Таким образом:

$$\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k) \|_{L_2}^2 = \sigma^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) \, e^{imt} \, | \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 dt =$$

$$= \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \Theta_3\left(\frac{t}{2}; q_1\right) \, | \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 dt \,,$$

где параметр тета-функции $q_1 = \exp\left(-(4\sigma^2)^{-1}\right)$. Своего максимума тета-функция достигает при $t = 0$, а минимума – при $t = \pi$. С учетом того, что

$$\int_0^{2\pi} | \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 dt = 2\pi \|c\|_{l_2}^2 \,, \tag{6}$$

получим оценки

$$\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k) \|_{L_2}^2 \le \sigma\sqrt{\pi} \, \Theta_3(0; q_1) \, \|c\|_{l_2}^2 \,,$$

$$\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k) \|_{L_2}^2 \ge \sigma\sqrt{\pi} \, \Theta_3\left(\frac{\pi}{2}; q_1\right) \|c\|_{l_2}^2 \,.$$

Отсюда следует справедливость формул (4). Теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Выпишем образ Фурье функции Лагранжа (2)

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \varphi(x-k) e^{-ix\xi} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}\right) e^{-ix\xi} dx =$$

$$= \sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-ik\xi} \,.$$

Снова воспользуемся равенством Парсеваля

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 = \|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-il\xi} e^{-ik\xi}\|_{L_2}^2 =$$

$$= \|\sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-il\xi}\|_{L_2}^2 =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2\xi^2) \,|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-il\xi}|^2 d\xi\,.$$

Разбив, как и при доказательстве теоремы 1, интеграл на сумму интегралов по отрезкам $[2\pi m, 2\pi m+1]$, сделав замену $\xi = 2\pi m + t$ и применив преобразование Пуассона, получим, что

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 = \sigma^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \exp(-\sigma^2\xi^2) \,|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-il\xi}|^2 d\xi =$$

$$= \sigma^2 \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(t+2\pi m)^2) \,|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-ilt}|^2 dt =$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt} \,|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{-ilt}|^2 dt\,.$$

Введем вспомогательные ряды Фурье (в литературе используются также термины символ или маска [1, с. 23], [2, с. 10]):

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-ikt}\,,$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) e^{-ikt} = \Theta_3\left(\frac{t}{2}; q_2\right)\,, \quad q_2 = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\,,$$

для которых равенство (2) может быть записано в следующем виде [2, с. 168], [7, с. 152]:

$$\Phi(t)G(t) = 1\,.$$

Выражая $G(t)$ через $\Phi(t)$, получим:

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt} \,|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 \,|G(t)|^2 dt =$$

$$= \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt} \,|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}|^2 \,|\Phi(t)|^{-2} dt =$$

$$= \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{4\sigma^2}\right) e^{imt}}{\left|\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) e^{-ikt}\right|^2} \left|\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikt}\right|^2 dt\,.$$

Снова используем преобразование Пуассона (3):

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 =$$

$$= \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} (2\sigma\sqrt{\pi}) \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi m)^2)}{2\pi\sigma^2 \left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\xi+2\pi k)^2}{2}\right)\right)^2} \left|\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}\right|^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi m)^2)}{\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(\xi+2\pi k)^2\right)\right)^2} \left|\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\xi}\right|^2 d\xi\,.$$

Если ввести обозначение

$$P(\xi) = \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi m)^2)}{\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2(\xi+2\pi k)^2)/2\right)^2},$$

то с учетом (6), получим следующую двустороннюю оценку

$$\min_{0\le\xi\le 2\pi} P(\xi)\ \|c\|_{l_2}^2 \le \|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(x)\|_{L_2}^2 \le \max_{0\le\xi\le 2\pi} P(\xi)\ \|c\|_{l_2}^2\,,$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 обозначим

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(\xi+2\pi k)^2\right) = \alpha_k\,.$$

Тогда

$$P(\xi) = \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} (\alpha_m)^2}{\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\right)^2}\,.$$

Оценка сверху $P(\xi) < 1$ следует из положительности α_k и очевидного неравенства

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m\right)^2 > \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k)^2 .$$

Покажем теперь, что $\lim\limits_{\sigma\to\infty} P(0) = 1$. Для этого достаточно заметить, что $\alpha_0 \gg \alpha_k$ при всех $k \neq 0$. Следовательно, верхняя константа Рисса стремится к единице.

Так как функция $P(\xi)$ – чётная, 2π-периодическая и монотонно убывает по ξ на отрезке $[0, \pi]$, то

$$\min_{[0,\,2\pi]} P(\xi) = P(\pi) .$$

В этом случае $\alpha_0 = \alpha_{-1}$, а все другие $\alpha_k \ll \alpha_0$. Поэтому

$$P(\pi) \approx \frac{\alpha_0^2 + \alpha_{-1}^2}{(\alpha_0 + \alpha_{-1})^2} = \frac{2\alpha_0^2}{4\alpha_0^2} = \frac{1}{2} ,$$

что дает предельное значение нижней константы Рисса. Таким образом, теорема 3 доказана.

Литература

1. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков / И.Я. Новиков. – М.: Физматлит, 2005. – 616 с.

2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты / Ч. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

3. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Часть вторая: трансцендентные функции / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 516 с.

4. Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях / Д. Мамфорд. – М.: Мир, 1988. – 448 с.

5. Shclumprecht Th., Sivakumar N. On the sapling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian // arXiv:0803.4344v1 [math.CA] 30 Mar 2008. – 29 p.

6. Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2009. – 13(68); Выпуск 17/2. – С.89-99.

7. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / AMS Mathematical Surveys and Monographs. vol. 141 / V. Maz'ya, G. Schmidt. – 2007. – 350 p.

ON RIESZ CONSTANTS FOR SYSTEMS OF INTEGER SHIFTS OF GAUSS FUNCTIONS

M.V. Zhuravlev

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: vnukov@bsu.edu.ru
Voronezh State University,
Voronezh, Russsia, e-mail: soracul@bk.ru

Abstract. It is proved that ratio of upper and lower Riesz constants for a system of integer shifts of Gauss function increases fast, if dispersion tends to infinity. For Lagrange function the limit of ratio of Riesz constants is equal to two, although a system of integer shifts becomes almost orthogonal.

Key words: Riesz constants, Lagrange function, Gaussian function, Jacobi Theta-function.