УДК 004.9

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

В.И. ЛОМАЗОВА

Белгородский государственный университет

e-mail: vlomazova@yandex.ru;

Рассмотрено аддитивное модельное представление взаимодействующих друг с другом процессов. Предложено информационное описание математических моделей. Исследованы теоретико-множественные свойства информационных описаний.

Ключевые слова: сложные системы, взаимосвязанные процессы, математические модели, информационные модели.

Широкая распространенность взаимосвязанных процессов в различных областях науки и практической деятельности [1-3] привела к необходимости изучения особенностей и общих закономерностей этих процессов. Одним из наиболее эффективных способов научного исследования является абстрактное (формальное) моделирование изучаемого объекта (прототипа), которое сводится к замене в ходе исследования прототипа на его упрощенное (но сохраняющее все необходимые с точки зрения цели исследования свойства) описание. Математическое моделирование, предполагающее описание прототипа на языке математических соотношений, наряду с несомненными достоинствами обладает рядом недостатков, одним из которых является невозможность ее непосредственного использования при решении задач на ЭВМ. Указанная проблема частично решается переходом от математической модели к компьютерной модели, состоящей из совокупности алгоритмов и совокупности входных данных для этих алгоритмов. Однако, прежде чем осуществлять этот переход необходимо решить ряд задач, связанных с анализом и выбором наиболее подходящей математической модели[4,5]. Решение этих задач основывается на использовании таких алгоритмов обработки информации, как сортировки, выборки, проекции и т.д., что предполагает предварительное информационное описание математических моделей. Целью настоящей работы является построение и исследование информационных описаний математических моделей взаимосвязанных процессов.

Построение информационных представлений. Математических моделей взаимосвязанных процессов

Будем предполагать, что исследуемые взаимосвязанные процессы $Z_1(t)=(z_1, z_2, \dots, z_{N1}), \dots, Z_K(t)=(z_1, z_2, \dots, z_{NK})$, рассматриваемые во временном интервале $t_{нач} \le t \le t_{кон}$, опускают аддитивное математическое описание

$$\begin{gathered} Z_1(t)=f_{11}(t,Z_1(t-1))+f_{12}(t,Z_2(t-1))+\dots+f_{1K}(t,Z_2(t-1), \\ Z_2(t)=f_{21}(t,Z_1(t-1))+f_{22}(t,Z_2(t-1))+\dots+f_{2K}(t,Z_2(t-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z_K(t)=f_{K1}(t,Z_1(t-1))+f_{K2}(t,Z_2(t-1))+\dots+f_{KK}(t,Z_2(t-1), \end{gathered} \quad (1)$$

где диагональные слагаемые отражают «эффект памяти» (зависимость значений текущих параметров процесса от предыдущих значений), а остальные слагаемые отражают взаимные влияния процессов.

Математическая модель совокупности взаимосвязанных процессов может быть представлена в виде:

$$MatMod=\langle Conf, Restr\rangle, \quad (2)$$

где *Conf* – конфигурация модели, учитывающая вид и взаимосвязи между входящими в модель математическими соотношениями, описывающими взаимосвязанные процессы, а *Restr* – ограничения на величины, входящие в соотношения модели. Будем полагать, конфигурация математической модели может быть описана бинарными коэффициентами матрицы связанности ***StrQuan*** =(***StrQuan*** $_1$, ***StrQuan*** $_2$,..., ***StrQuan*** $_K$), а ограничения – интервалами возможного изменения величин z_n, входящих в математические соотношения модели ***Intz***$_n$ =[***minz***$_n$, ***maxz***$_n$]. Тогда математической модели ***MatMod*** может быть поставлено в соответствие ее информационное описание

$$InfMod=< StrQuan, Quan >, \quad (3)$$

представляющее собой кортеж из бинарных структурных атрибутов

StrQuan =(***StrQuan***$_1$, ***StrQuan***$_2$,..., ***StrQuan*** $_K$)

и вещественных параметрических атрибутов

Quan =< ***minz***$_1$, ***maxz***$_1$, , ***minz***$_2$, ***maxz***$_2$,..., ***minz***$_n$, ***maxz***$_n$>.

Это позволяет свести задачу выбора математической модели к задаче структурного и параметрического синтеза информационного описания этой модели.
Информационная модель (3), представляя собой упрощенное описание математической модели (2), по транзитивности может рассматриваться в качестве модели взаимосвязанных процессов ***Z***$_1$***(t)***, ***Z(t)***$_2$, ..., ***Z(t)***$_N$. Схема такого иерархического подхода к формальному моделированию процессов предметной области показана на рис. 1.

Рис. 1. Схема иерархического подхода к формальному моделированию процессов предметной области

Понимаемая таким образом модель (3) не позволяет решать традиционные задачи предметной области рассматриваемых процессов (например, физики связанных полей), такие как прогнозирование развития процессов или управление процессами. Соответствуя другому уровню иерархии моделирования, модель (3) может служить решению «вспомогательных» задач, связанных с исследованием математических моделей вида (2) и последующим выбором наиболее подходящей математической модели для исследования взаимосвязанных процессов.

Отношения и операции над математическими моделями.

Рассмотрим совокупность задач предметной области, для решения которых могут быть использованы рассматриваемые модели: ***Tasks = { Task***$_1$***, Task***$_2$***,..., Task***$_n$***,..., Task***$_N$***}***. Используемое предположение о конечности множества ***Tasks*** в практическом плане не является существенным ограничением.

В рамках конкретной предметной области множество ***Tasks*** соответствует понятию универсума. Обозначим ***TaskMatMod*** – множество задач, решаемых с использованием конкретной модели ***MatMod***, которое назовем множеством (областью) применимости модели ***MatMod***. Тогда ***TaskMatMod*** $\subseteq$***Tasks,*** т.е. множество применимости конкретной модели является подмножеством всей совокупности задач предметной области.

Рассмотрим два выделенных частных случая:

1. *TaskMatModU =Tasks.*

В этом случае математическую модель ***MatMod*** будем называть универсальной моделью.

2. *TaskMatMod0 =* $\varnothing$.

В этом случае математическую модель ***MatMod*** будем называть пустой моделью.

Будем считать множество задач предметной области полным относительно совокупности моделей предметной области, т.е. будем полагать, что различным моделям соответствуют несовпадающие множества применимости:

$MatMod1 \neq MatMod2 \quad \Rightarrow \quad TaskMatMod1 \neq TaskMatMod2.$

Введем отношение применимости на множестве математических моделей, полагая модель ***MatMod1*** не более применимой, чем модель ***MatMod2***, т.е:

$$MatMod1 \angle MatMod2 \text{ , если } TaskMatMod1 \subseteq TaskMatMod2 \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что так введенное отношение применимости будет отношением частичного порядка, т.к. для него будут выполнены следующие свойства:

1. Рефлексивность ($MatMod1 \angle MatMod1$)

2. Антисимметричность

($MatMod1 \angle MatMod2,\ MatMod2 \angle MatMod1 \quad \Rightarrow \quad MatMod1 = MatMod2$)

3. Транзитивность

($MatMod1 \angle MatMod2,\ MatMod2 \angle MatMod3 \quad \Rightarrow \quad MatMod1 \angle MatMod3$)

Непосредственно из определения следует, что для любой математической модели ***MatMod*** выполняются отношения:

$\boldsymbol{MatMod0 \angle MatMod \angle MatModU}$

Основываясь на множествах применимости математических моделей естественно ввести операции над моделями. Будем считать множество моделей полным относительно множества задач, т.е. каждому множеству применимости (каждому набору задач) соответствует некоторая математическая модель, применимая для решения этих задач.

Пусть ***MatMod1*** и ***MatMod2*** – две математические модели, которым соответствуют области применимости ***TaskMatMod1*** и ***TaskMatMod2***. Тогда:

1. Объединение математических моделей.

Результат операции:

$MatMod = MatMod1 \cup MatMod2$:

$TaskMatMod = TaskMatMod1 \cup TaskMatMod2$

Семантика операции: Модель, являющаяся результатом объединения двух математических моделей применима в случае применимость хотя бы одной из объединяемых моделей.

2. Пересечение математических моделей.

Результат операции:

$MatMod = MatMod1 \cap MatMod2$:

$TaskMatMod = TaskMatMod1 \cap TaskMatMod2$

Семантика операции: Модель, являющаяся результатом пересечения двух математических моделей применима только в случаях общей применимость этих моделей.

3. Разность математических моделей.

Результат операции:

$MatMod = MatMod1 \setminus MatMod2$:

$TaskMatMod = TaskMatMod1 \setminus TaskMatMod2$

Семантика операции: Модель, являющаяся результатом вычитания двух математических моделей применима в случаях, когда применима уменьшаемая модель, но неприменима вычитаемая модель.

4. Симметрическая разность математических моделей.

Результат операции:

$MatMod = MatMod1 \mid MatMod2$:

$TaskMatMod = TaskMatMod1 \mid TaskMatMod2$

Семантика операции: Модель, являющаяся результатом симметрической разности двух математических моделей применима в случаях, когда применима одна из моделей, но неприменима другая модель.

Отношения и операции над информационными моделями.

Сложность работы с математическими моделями, а также необходимость решения таких информационных задач, как сортировки и выборки математических моделей, обуславливает целесообразность их представления в виде информационных моделей ***InfMod*=< *StrQuan, Quan* >**. При этом особым математическим моделям соответствуют их информационные аналоги:

1. Универсальной математической модели ***MatModU*** соответствует универсальная информационная модель ***InfModU***, такая что

$$StrQu_i=1\ ,\qquad Quan1_{2i-1}=-\infty,\qquad Quan_{2i}=\infty\qquad \forall i$$

2. Пустой математической модели ***MatMod0*** соответствует пустая информационная модель ***InfMod0***, такая что

либо $StrQu_i=0\ ,\ \forall i$

либо $\exists\ i$: $Quan1_{2i-1} > Quan_{2i}$

Несколько условий, приводящих к пустой информационной модели, приводит к нескольким возможностям представления этой модели. Но все эти формы представлений определяют одну и ту же пустую информационную модель, которая соответствует пустой математической модели, не применимой ни для одной задачи предметной области.

Отношения и операции на множестве математических моделей естественным образом порождают соответствующие отношения и операции на множестве информационных моделей.

Будем полагать, что учет дополнительного эффекта и расширение интервала возможных изменений величин, входящих в соотношения математической модели, может только расширить область применимости (привести к большей по применимости информационной модели).

Тогда отношение применимости на множестве информационных моделей примет вид

$$InfMod1\angle\ InfMod2\ ,\qquad \text{если}\quad StrQuan1\leq StrQuan2\ ,\ Quan1\leq Quan2, \tag{5}$$

где неравенство для структурных компонентов поэлементно: ***StrQuan1≤ StrQuan2***, если $\boldsymbol{StrQu1_i\leq StrQu2_i}$, а неравенство для параметрических компонентов понимается в прямую сторону для элементов с четными номерами (правых концов интервалов возможных изменений величин) и в обратную сторону – для элементов с нечетными номерами (левых концов интервалов возможных изменений величин): ***Quan1≤ Quan2*** ,

если $\boldsymbol{Quan1_{2i}\leq Quan2_{2i}\ ,\ Quan1_{2i-1}\geq Quan2_{2i-1}}$.

Нетрудно видеть, что введенное таким образом отношение применимости на множестве информационных моделей является отношением частичного порядка.

Непосредственно из определения следует, что для любой информационной модели ***InfMod*** выполняются отношения: ***InfMod0 ∠InfMod ∠InfModU.***

Операции над информационными моделями являются отражениями соответствующих операций над математическими моделями:

Пусть ***InfMod1*=< *StrQuan1, Quan1* >** и ***InfMod2*=< *StrQuan2, Quan2* >** – две информационные модели. Тогда:

1. Объединение информационных моделей.

Результат операции:

$$InfMod = InfMod1 \cup InfMod2\ :$$

$StrQu_i=\max\{\ StrQu1_i,\ StrQu2_i\}$,

$Quan_{2i}\ =\max\{\ Quan1_{2i},\ Quan2_{2i}\ \}$

$Quan_{2i-1}=\min\{\ Quan1_{2i-1},\ Quan2_{2i-1}\ \}$.

Семантика операции: Модель, являющаяся результатом объединения двух информационных моделей применима в случае применимость хотя бы одной из объединяемых моделей.

2. Пересечение информационных моделей.

Результат операции:

$InfMod = InfMod1 \cap InfMod2$:

$StrQu_i = \min\{ StrQu1_i, StrQu2_i \}$,

$Quan_{2i} = \min\{ Quan1_{2i}, Quan2_{2i} \}$

$Quan_{2i-1} = \max\{ Quan1_{2i-1}, Quan2_{2i-1} \}$

Семантика операции: Модель, являющаяся результатом пересечения двух информационных моделей применима только в случаях общей применимость этих моделей.

Операции разности (симметрической разности) математических моделей не имеют своих аналогов на множестве информационных моделей, т.к. результатами разности (симметрической разности) интервалов изменения величин не всегда являются интервалы, что может привести к невозможности сохранения принятого формата информационной модели.

Отношения и операции над классами информационных моделей.

Назовем шаблоном информационной модели кортеж ***ShInfMod=< ShStrQuan, ShQuan >***, компоненты которого могут принимать значения: ***ShStrQuan*** – из множества {0,1,*}, ***ShQuan*** из множества ***{R,*}***, где ***R*** – множество действительных чисел, * – произвольное бинарное или действительное число в зависимости от типа компоненты. Частным случаем шаблона, в котором отсутствуют «свободные» значения *, является информационная модель.

Назовем классом моделей ***ClassInfMod*** совокупность математических (информационных) моделей, соответствующих определенному «классифицирующему» шаблону ***ShInfMod***. При этом несвободные (имеющие фиксированные значения) компоненты шаблона соответствуют классификационным признакам. В частном случае, когда «классифицирующий» шаблон не содержит «свободных» значений * (является информационной моделью), класс моделей состоит из одного элемента – конкретной модели. Таким образом, каждый шаблон информационной модели порождает на множестве информационных моделей отношение эквиваленции.

Будем называть две информационные модели ***InfMod1*** и ***InfMod2*** эквивалентными (относящимися к одному классу) по шаблону *ShInfMod* : $InfMod1 \sim InfMod2$, если они имеют одинаковые с шаблоном значения несвободных атрибутов.

Нетрудно видеть, что определенное таким образом отношение действительно является эквивалентностью, т.е. для него выполняются условия:

- рефлексивность: $InfMod \sim InfMod$,
- симметричность: $InfMod1 \sim InfMod2 \quad \Rightarrow \quad InfMod2 \sim InfMod1$
- транзитивность: $InfMod1 \sim InfMod2, InfMod1 \sim InfMod2 \Rightarrow \quad InfMod1 \sim InfMod2$

Определим отношение общности на множестве шаблонов информационных моделей.

Рассмотрим шаблоны ***ShInfMod1*** и ***ShInfMod2***. Шаблон ***ShInfMod2*** назовем не менее общим, чем шаблон ***ShInfMod1***, если все информационные модели, соответствующие шаблону ***ShInfMod1***, соответствуют также шаблону ***ShInfMod2***, т.е.

$ShInfMod1 \angle ShInfMod2$, если $ClassInfMod1 \subseteq ClassInfMod2$.

Среди шаблонов информационных моделей естественно выделить два особых случая:

1. Универсальный шаблон, которому соответствуют все модели:

$$ShInfModU: \quad ShInfMod \angle ShInfModU$$

Класс моделей, соответствующих универсальному шаблону ***ClassInfModU*** составляют все модели предметной области

2. Пустой шаблон, которому не соответствует ни одна модель

$$ShInfMod0: ShInfMod0 \angle ShInfMod$$

Выделим три типа шаблонов:

- Структурные шаблоны – шаблоны информационных моделей, не имеющие несвободных атрибутов среди параметрических атрибутов.

- Параметрические шаблоны – шаблоны информационных моделей, не имеющие несвободных атрибутов среди структурных атрибутов.
- Гибридные шаблоны – шаблоны информационных моделей, имеющие несвободные атрибуты и среди структурных атрибутов, и среди параметрических атрибутов.

Определим операции над классами моделей как операции над соответствующими шаблонами.

Пусть классы моделей ***ClassInfMod1*** и ***ClassInfMod2*** соответствуют шаблонам ***ShInfMod1=<ShStrQuan1, ShQuan1 >*** и ***ShInfMod2=< ShStrQuan2, ShQuan2 >***. Тогда введем операции:

1. Объединение классов информационных моделей.

Результат операции:

$ClassInfMod = ClassInfMod1 \cup ClassInfMod2$:

$ShInfMod = < ShStrQuan, ShQuan >$

$$ShStrQu_i = \begin{cases} StrQu1_i, \text{при } StrQu1_i = StrQu2_i, \\ *, \text{при } StrQu1_i \neq StrQu2_i \vee StrQu1_i = * \vee StrQu2_i = * \end{cases},$$

$$Quan_i = \begin{cases} Quan1_i, \text{при } Quan1_i = Quan2_i \\ *, \text{при } Quan1_i \neq Quan2_i \vee Quan1_i = * \vee Quan2_i = * \end{cases}$$

Семантика операции: Класс моделей, являющийся результатом объединения двух информационных классов моделей, содержит модели, соответствующие объединенному шаблону моделей.

2. Пересечение классов информационных моделей.

Результат операции:

$InfMod = InfMod1 \cap InfMod2$:

1) $InfMod = \varnothing$

если $\exists i$: $StrQu1_i \neq StrQu2_i$, $Quan1_i \neq Quan2_i$ для несвободных атрибутов

2) $ShInfMod = < ShStrQuan, ShQuan >$

$$ShStrQu_i = \begin{cases} \mathrm{StrQu1}_i, \text{при } \mathrm{StrQu2}_i = * \\ \mathrm{StrQu2}_i, \text{при } \mathrm{StrQu1}_i = * \\ *, \text{при } \mathrm{StrQu1}_i = \mathrm{StrQu2}_i = * \end{cases}, \qquad Quan_i = \begin{cases} Quan1_i, \text{при } Quan2_i = * \\ Quan2_i, \text{при } Quan1_i = * \\ *, \text{при } Quan1_i = Quan2_i = * \end{cases}.$$

Семантика операции: Класс моделей, являющийся результатом пересечения двух информационных классов моделей, содержит модели, соответствующие и первому, и второму шаблону моделей.

В рамках конкретной предметной области наряду с однозначность перехода от математической модели к информационной модели выполняется однозначность обратного перехода (от информационной модели к математической модели). Тем самым классы информационных моделей ***ClassInfMod*** порождают классы математических моделей ***ClassMatMod***.

Мера сложности математических моделей взаимосвязанных процессов

Для анализа математических моделей взаимосвязанных процессов целесообразно ввести понятие меры сложности математической модели, понимаемой как отображение множества всех моделей предметной области в отрезок ***[0,1]***: *MesDif: ClassMatModU* $\rightarrow$*[0,1]*

Будем считать, что математическая модель тем сложнее, чем больше различных эффектов (эффектов памяти и эффектов взаимосвязи) она учитывает. При этом, поскольку учет различных эффектов при решении конкретных задач в рамках математических моделей может быть не одинаков по трудоемкости в качестве меры сложности естественно взять не количество учитываемых эффектов, а их взвешенную сумму. Весовые коэффициенты должны выбираться для конкретной задачи (класса задач) и должны отражать относительную трудоемкость учета эффектов при решении конкретной задачи.

Рассмотрим класс задач ***TaskMatMod***. Оценим сложность модели ***MatMod*** на задаче ***Task$_i$*** из этого класса. Для этого построим информационную модель ***InfMod***, соответствующую рассматриваемой математической модели. Структурная компонента модели ***StrQuan*** представляет собой бинарный кортеж, каждый элемент которого определяет учет или неучет соответствующего эффекта, поэтому

$$MesDif(MatMod,\ Task_i) = (\alpha_1 StrQu_1 + \alpha_2 StrQu_2 + \ldots + \alpha_N StrQu_N)/N, \qquad (6)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ – весовые коэффициенты, для которых должны выполняться условия неотрицательности и нормировки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N = 1$.

При любой конкретной задаче ***Task$_i$*** максимальное значение меры сложности, равное 1, достигается на универсальной математической модели ***MatModU***, т.к. в этом случае ***StrQu$_1$*** = ***StrQu$_2$*** =...= ***StrQu$_N$*** =1, а минимальное значение меры сложности, равное 0, достигается на пустой математической модели ***MatMod0***, т.к. в этом случае ***StrQu$_1$*** = ***StrQu$_2$*** =...= ***StrQu$_N$*** = 0.

Необходимо отметить, что предлагаемое понимание сложности математической модели не учитывает метода (алгоритма), которым решается задача. Тем самым предполагается, что используемый метод включен в понятие задачи: например, в качестве задачи здесь может рассматриваться – «решение транспортной задачи линейного программирования методом потенциалов». Более детальное рассмотрение, разделяющее постановку задачи и используемый алгоритм и учитывающее, например, временную сложность алгоритма, в рамках настоящей работы не используется.

Предлагаемая мера сложности математических моделей может быть расширена до понятия меры сложности класса моделей. При этом естественно рассматривать в качестве меры сложности класса моделей максимальную из сложностей всех моделей, входящих в класс ***ClassMatMod***, т.е.

$$MesDif(ClassMatMod,\ Task_i) = \max_{MatMod \in ClassMatMod}\{\ MesDif(MatMod,\ Task_i)\ \}.$$

Нетрудно видеть, что это значение меры сложности достигается на математической модели, соответствующей информационной модели, которая получается заменой в свободном атрибуте структурной компоненты шаблона ***ShStrQuan*** значения * на значение 1.

Построенная мера сложности математических моделей и классов математических моделей естественным образом переносится на информационные модели и классы моделей, а также может служить основой для построения отношения сложности на множестве математических (информационных) моделей (классов моделей). При этом более сложной считается модель, имеющая большую меру сложности. Очевидно, что построенное таким образом отношение сложности является частичным порядком.

Предложенные операции, отношения и меры (4)-(6) на множествах математических и информационных моделей взаимосвязанных процессов позволяют производить их анализ с целью выбора наилучших (для решения конкретных задач конкретной предметной области) моделей.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. государственный контракт № 02.740.11.5128 от 09 марта 2010 г.

Литература

1. Бусленко Н. П. К теории сложных систем. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1963, № 5. С. 3-11.

2. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сеник Н.А., Фильштинский М.Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т.I: Введение в теорию термопьезоэлектричества. М.: URSS, 2010. – 312 с.

3. Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник/ Под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Высш.шк., 2004. – 616 с.

4. Жиляков Е.Г., Ломазова, В.И., Ломазов В.А. Селекция аддитивных функциональных моделей сложных систем// Информационные системы и технологии, 2010, № 6, с. 166-170.

5. Ломазов В.А., Ломазова, В.И. Формализация выбора математических моделей связанных полей при автоматизации исследований. Информационные системы и технологии, 2010, № 3, с. 101-106.

THE DECISION OF THE PROBLEM THE ECONOMIC MULTICRETERIAL CHOICE BASED ON THE METHOD OF THE ANALYSIS OF HIERARCHIES

V.I. Lomazova

Belgorod State University

e-mail: vlomazova@yandex.ru

Additional model representation of interacting processes is considered. Informatics' description of mathematical models is suggested. The theoretic-set properties of descriptions are investigated.

Key words: hierarchy analyzing, multicriterial choice, profitability, testing, personal, staff, recruitment.