



## О ЧАСТОТНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭНЕРГИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

**А.А. ЧЕРНОМОРЕЦ**  
**В.А. ГОЛОЩАПОВА**  
**И.В. ЛЫСЕНКО**  
**Е.В. БОЛГОВА**

*Белгородский  
государственный  
университет*

*e-mail:*  
*Chernomorets@bsu.edu.ru*

В работе исследовано свойство сосредоточенности энергии изображения в ограниченном множестве частотных интервалов. На основе вычислительных экспериментов показано, что энергия изображений сосредоточена в узком частотном диапазоне.

Ключевые слова: изображение, доли энергии, частотный интервал, частотная концентрация энергии.

При решении задач повышения эффективности информационного обмена в информационно-телекоммуникационных системах существенную роль играет разработка новых методов цифровой обработки изображений [1]. Так, методы анализа свойства сосредоточенности энергий изображений земной поверхности в некотором, относительно малом подмножестве частотных субинтервалов [2] и возможности пренебречь малоэнергетическими частотными субинтервалами имеют практическую значимость для решения проблем обработки изображений, в первую очередь, задачи их сжатия. Изложенный в работе [3] метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным субинтервалам позволяет в рамках настоящей работы разработать метод определения границ одного или нескольких разнесенных частотных субинтервалов таких, что при наименьшей суммарной площади в них была бы сосредоточена подавляющая доля энергии анализируемого изображения.

### **1. Вычисление долей энергии изображений.**

Метод вычисления долей энергии изображений в заданных частотных субинтервалах, предложенный в работе [3], позволяет в отличие от традиционных методов частотного анализа изображений (дискретного преобразования Фурье и быстрого преобразования Фурье) получить точные значения долей энергии и заключается в следующем.

Изображение задано в виде матрицы  $\Phi = (f_{ik})$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , элементы которой представляют собой значения яркости в равноотстоящих точках пространственной области изображения. Симметричная двумерная частотная область  $\Omega$  (субинтервал), задана следующим выражением,

$$\Omega : \{ \Omega(u, v) \mid (u \in [\alpha_1, \alpha_2], v \in [\beta_1, \beta_2]) \cup (u \in [\alpha_1, \alpha_2], v \in [-\beta_2, -\beta_1]) \cup (u \in [-\alpha_2, -\alpha_1], v \in [-\beta_2, -\beta_1]) \cup (u \in [-\alpha_2, -\alpha_1], v \in [\beta_1, \beta_2]) \}, \quad (1)$$

где  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leq \pi$ .

Для определения точного значения доли энергии изображения  $\Phi = (f_{ik})$  в частотном субинтервале  $\Omega$  используется следующее выражение

$$P_{\Omega} = \frac{\text{tr}(A_{\alpha}^T \cdot \Phi \cdot A_{\beta} \cdot \Phi^T)}{\text{tr}(\Phi \Phi^T)}, \quad (2)$$

где функция «tr» – след матрицы [4],  $A_{\alpha}$  и  $A_{\beta}$  – субполосные матрицы, значения элементов которых определяются на основании соотношений (3, 4),



$$a^{\alpha_{i_1 i_2}} = \begin{cases} \frac{2 \cos \frac{(\alpha_2 + \alpha_1)(i_1 - i_2)}{2} \sin \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(i_1 - i_2)}{2}}{\pi(i_1 - i_2)}, & i_1 \neq i_2, \\ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi}, & i_1 = i_2, \end{cases} \quad (3)$$

$$a^{\beta_{k_1 k_2}} = \begin{cases} \frac{2 \cos \frac{(\beta_2 + \beta_1)(k_1 - k_2)}{2} \sin \frac{(\beta_2 - \beta_1)(k_1 - k_2)}{2}}{\pi(k_1 - k_2)}, & k_1 \neq k_2, \\ \frac{\beta_2 - \beta_1}{\pi}, & k_1 = k_2. \end{cases} \quad (4)$$

**2. Вычисление частотной концентрации энергии изображения.**

Введем понятие частотной концентрации энергии изображения, характеризующей сосредоточенность его энергии в некотором множестве частотных интервалов, позволяющая указать наименьшую суммарную площадь выбранных частотных субинтервалов, в которых сосредоточена подавляющая доля энергии анализируемого изображения.

Рассмотрим изображение  $\Phi$ , представленное в виде матрицы  $M \times N$  пикселей, при этом будем считать, что частотная область разбита на  $R_1 \times R_2$  равновеликих частотных интервалов. Предположим, что известно минимальное количество  $l_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}$  частотных субинтервалов, в которых сосредоточена доля  $m$  энергии изображения. Тогда под частотной концентрацией  $C_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}$  (характеристикой сосредоточенности энергии) будем понимать следующее значение

$$C_{MN R_1 R_2}^{\Phi m} = l_{MN R_1 R_2}^{\Phi m} / (R_1 R_2). \quad (5)$$

Частотный субинтервал, входящий в подмножество  $M_{i_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}}$ , соответствующее частотной концентрации  $C_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}$  (5), будем называть информационным частотным субинтервалом. Субинтервалы, не включенные в подмножество  $M_{i_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}}$ , естественно, называть неинформационными.

Для определения значения  $l_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}$  необходимо решить задачу

$$l_{MN R_1 R_2}^{\Phi m} = \min d_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}, \quad (6)$$

где  $d_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}$  – количество субинтервалов, в которых сосредоточена доля энергии  $m$  изображения  $\Phi$  при заданных значениях  $M, N, R_1$  и  $R_2$ . Значение  $d_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}$  определяется на основании количества частотных субинтервалов, для которых выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{d_{MN R_1 R_2}^{\Phi m}} P_{(i_{R_2}) MN} \geq m \|\Phi\|^2 = m \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N f_{ik}^2, \quad (7)$$

где  $P_{(i_{R_2}) MN}$  – элемент упорядоченного по убыванию множества значений долей энергий исследуемого изображения,  $m$  – задаваемая доля общей энергии, которая должна быть сосредоточена в указанном минимальном количестве частотных субинтервалов.

В качестве типичного примера определения указанного выше минимального количества частотных субинтервалов на рис. 1 приведено распределение энергии некоторого изображения (рис. 2) по частотным субинтервалам (рисунок 1а) и количество частотных субинтервалов, соответствующее различным значениям  $m$  (рисунок 1б). В данном примере  $R_1=R_2=4$ . Здесь для удобства представления дана сквозная нумера-

ция частотных субинтервалов и не отображено «подавляющее» значение доли энергии в частотном субинтервале (1,1).

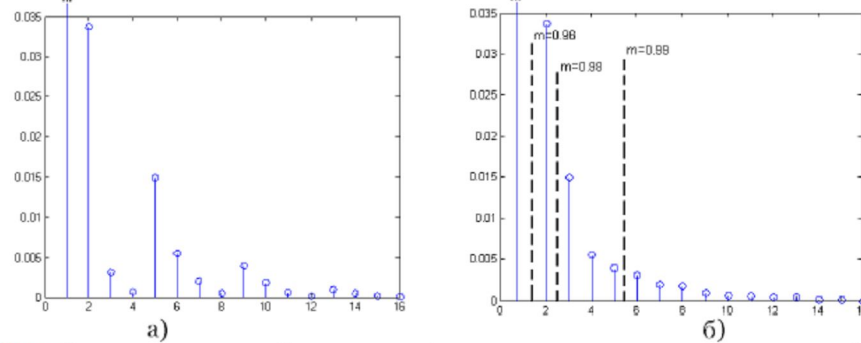


Рис. 1. Распределение долей энергии изображения по частотным субинтервалам (а) и количеству частотных субинтервалов, соответствующих различным значениям  $m$  (б), при  $R_1=R_2=4$

Как видно из рис. 1, основная доля (99%) энергии изображения, сосредоточена менее чем в 1/3 частотных интервалов, т.е. ее частотная концентрация около 0.3.

Пример множества информационных интервалов при  $R_1=R_2=4$  и суммарной доли энергии  $m=0.98$  изображения, при анализе которого получены распределения на рисунке 1, приведен на рис. 2в. На рис. 2а и рис. 2б приведено анализируемое изображение и распределение значений его долей энергии по частотным субинтервалам (для наглядности значение доли энергии в субинтервале (1,1) не отображено).

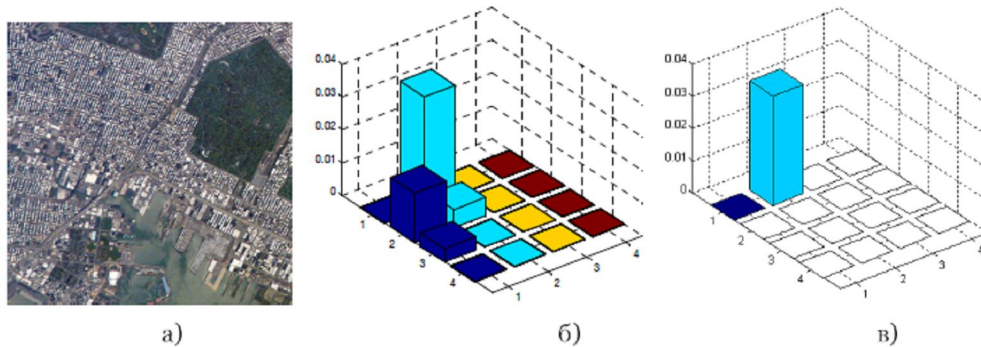


Рис. 2. Построение информационных частотных субинтервалов: а) изображение, б) распределение его долей энергии при  $R_1=R_2=4$ , в) доли энергии, соответствующие информационным частотным субинтервалам при  $m=0.98$  (для наглядности значение доли энергии в субинтервале (1,1) не отображено)

### 3. Разработка вычислительного алгоритма определения величины частотной концентрации изображения.

Для определения величины частотной концентрации изображения, соответствующих заданной доле  $m$  энергии изображения, разработан алгоритм, основанный на вычислении такого наименьшего количества частотных субинтервалов, в которых сосредоточено не менее  $m*100\%$  энергии:

1) Предварительные вычисления:



1) Ввести  $R_1$  и  $R_2$  – количество частотных субинтервалов вдоль осей абсцисс и ординат частотного пространства, что соответствует разбиению частотной области на  $R_1 \times R_2$  частотных субинтервалов  $\Omega_{r_1 r_2}$  (1),  $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$ ,  $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$ , имеющих равные размеры

$$\alpha_{2,r_1} - \alpha_{1,r_1} = \frac{\pi}{R_1}, \quad r_1 = 1, 2, \dots, R_1,$$

$$\beta_{2,r_2} - \beta_{1,r_2} = \frac{\pi}{R_2}, \quad r_2 = 1, 2, \dots, R_2.$$

2) Ввести значения размерности обрабатываемого изображения  $M, N$ ;

3) Вычислить значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{R_1}, \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{R_2};$$

4) Для всех частотных интервалов  $\Omega_{r_1 r_2}$ ,  $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$ ,  $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$ , вычислить субполосные матрицы  $A_{r_1} = (a_{i_1 i_2}^{r_1})$ ,  $i_1, i_2 = 1, \dots, M$ , и  $A_{r_2} = (a_{k_1 k_2}^{r_2})$ ,  $k_1, k_2 = 1, \dots, N$ , где

$$a_{i_1 i_2}^{r_1} = \begin{cases} \frac{2 \cos \frac{\sigma_1 (2i_1 - 1)(i_1 - i_2)}{2} \sin \frac{\sigma_1 (i_1 - i_2)}{2}}{\pi (i_1 - i_2)}, & i_1 \neq i_2, \\ \frac{\sigma_1}{\pi}, & i_1 = i_2, \end{cases}$$

$$a_{k_1 k_2}^{r_2} = \begin{cases} \frac{2 \cos \frac{\sigma_2 (2r_2 - 1)(k_1 - k_2)}{2} \sin \frac{\sigma_2 (k_1 - k_2)}{2}}{\pi (k_1 - k_2)}, & k_1 \neq k_2, \\ \frac{\sigma_2}{\pi}, & k_1 = k_2. \end{cases}$$

II) Вычисление частотной концентрации изображения:

1) Ввести матрицу обрабатываемого изображения  $\Phi$ ,

$$\Phi = (f_{ik}), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

2) Вычислить точные значения долей энергии  $P_{r_1 r_2}$  изображения  $\Phi$ ,  $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$ ,  $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$ , в частотных субинтервалах  $\Omega_{r_1 r_2}$ , и сохранить вычисленные значения в виде матрицы  $P$ ,

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1R_2} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2R_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{R_1 1} & P_{R_1 2} & \dots & P_{R_1 R_2} \end{pmatrix},$$

где точное значение  $P_{r_1 r_2}$  доли энергии изображения  $\Phi$  в субинтервале  $\Omega_{r_1 r_2}$  может быть вычислено без перехода в частотную область на основании выражения

$$P_{r_1 r_2} = \frac{\text{tr}(A_{r_1}^T \cdot \Phi \cdot A_{r_2} \cdot \Phi^T)}{\text{tr}(\Phi \Phi^T)};$$

3) Упорядочить значения долей энергий  $P_{r_1 r_2}$ ,  $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$ ,  $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$ , по убыванию, упорядоченные значения сохранить в вектор  $Z = \{z_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, R_1 R_2$ ,

$$z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_{R_1 R_2};$$

4) Найти минимальное количество  $l^m$  частотных субинтервалов, в которых сосредоточена заданная доля  $m$  энергии изображения  $\Phi$ , то есть



$$\sum_{i=1}^{l^m} z_i \leq m,$$

$$\sum_{i=1}^{l^m+1} z_i > m;$$

5) Положить

$$T^m = z_{l^m};$$

6) Вычислить матрицу-маску  $P^{Mask}$ , элементы которой определяются на основании соотношения

$$P_{r_1 r_2}^{Mask} = \begin{cases} 1, & P_{r_1 r_2} \geq T^m, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$r_1 = 1, 2, \dots, R_1, \quad r_2 = 1, 2, \dots, R_2;$$

7) Частотный субинтервал  $\Omega_{r_1 r_2}$ ,  $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$ ,  $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$ , является информационным при заданной доле  $m$  энергии изображения, если

$$P_{r_1 r_2}^{Mask} = 1;$$

в противном случае – неинформационным частотным субинтервалом;

8) Вычислить частотную концентрацию

$$C_{MNR_1 R_2}^{\Phi m} = l^m / (R_1 R_2);$$

9) Конец.

#### 4. Вычислительные эксперименты.

Экспериментальные исследования распределения долей энергии изображений, приведенных на рисунке 8.1, в зависимости от количества частотных субинтервалов проведены с целью определения значений частотной концентрации  $C_{MNR_1 R_2}^{\Phi m}$  (5) при различных заданных долях  $m$  энергии.

Для различных изображений частотная концентрация (табл. 1) определялась при значениях доли энергии  $m=0,93 \div 0,99$ .

В ходе проведения вычислительных экспериментов были выполнены аналогичные эксперименты с различными изображениями.

Рассмотренные понятия частотной концентрации и информационных частотных субинтервалов изображения являются новыми инструментами для анализа его частотных свойств.

Из табл. 1 видно, что значение частотной концентрации не превышает 32%, увеличение числа  $R_1$ ,  $R_2$  частотных субинтервалов, на которые разбивается частотная область позволяет точнее определить долю частотных субинтервалов, в которых сосредоточена заданная доля энергии. Увеличение количества  $R_1$ ,  $R_2$  частотных субинтервалов от 4 до 8 приводит к некоторому увеличению точности определения доли частотных субинтервалов, в которых сосредоточено заданная доля энергии, особенно это проявляется для большого значения доли энергии. При увеличении количества  $R_1$ ,  $R_2$  частотных субинтервалов от 8 до 16 значительно увеличивается точность определения доли частотных субинтервалов. Увеличение числа  $R_1$ ,  $R_2$  частотных субинтервалов от 16 до 32 приводит к незначительному увеличению точности определения доли  $C_{MNR_1 R_2}^{\Phi m}$  информационных частотных субинтервалов.

#### Выводы.

Результаты экспериментов показали, что доля частотных субинтервалов, в которых сосредоточено подавляющая величина энергии изображения (частотная концентрация), не превышает 32%. Таким образом, можно говорить о сосредоточенности энергии изображений в узком частотном диапазоне.



Таблица 1

**Распределение доли частотных субинтервалов (частотная концентрация), в которых сосредоточено заданное значение доли энергии  $m$  изображения**

$m$	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
субинтервалы							
Изображение 1							
$R_1=R_2=4$	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.1250	0.1250	0.3125
$R_1=R_2=8$	0.0313	0.0469	0.0625	0.0938	0.1406	0.1719	0.2969
$R_1=R_2=16$	0.0352	0.0508	0.0703	0.0977	0.1250	0.1797	0.3047
$R_1=R_2=32$	0.0342	0.0498	0.0664	0.0928	0.1299	0.1846	0.3223
Изображение 2							
$R_1=R_2=4$	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.1250
$R_1=R_2=8$	0.0156	0.0156	0.0156	0.0156	0.0313	0.0469	0.0938
$R_1=R_2=16$	0.0039	0.0078	0.0078	0.0156	0.0234	0.0391	0.0859
$R_1=R_2=32$	0.0059	0.0068	0.0098	0.0146	0.0234	0.0391	0.0889
Изображение 3							
$R_1=R_2=4$	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625
$R_1=R_2=8$	0.0156	0.0156	0.0156	0.0156	0.0156	0.0156	0.0781
$R_1=R_2=16$	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0078	0.0156	0.0586
$R_1=R_2=32$	0.0010	0.0010	0.0020	0.0029	0.0059	0.0166	0.0596
Изображение 4							
$R_1=R_2=4$	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.1250
$R_1=R_2=8$	0.0156	0.0156	0.0156	0.0156	0.0313	0.0625	0.1250
$R_1=R_2=16$	0.0039	0.0039	0.0078	0.0156	0.0313	0.0586	0.1367
$R_1=R_2=32$	0.0029	0.0049	0.0088	0.0156	0.0303	0.0586	0.1436

**Литература**

1. Жилияков, Е.Г. Вариационные методы анализа сигналов на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков, С.П. Белов, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники, Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 10-25.
2. Черноморец, А.А. Метод удаления полосовых помех на космических снимках земной поверхности [Текст] / А.А. Черноморец // Информационные системы и технологии. – № 3 (59). – 2010. – С. 50-58.
3. Черноморец, А.А. Метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам [Текст] / А.А. Черноморец, О.Н. Иванов // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2010. – № 19 (90). – Вып. 16/1. – С. 161-166.
4. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Лань, 2009. – 608 с.

**ON FREQUENCY CONCENTRATION OF IMAGE ENERGY**

**A.A. CHERNOMORETS  
V.A. GOLOSCHAPOVA  
I.V. LYSENKO  
E.V. BOLGOVA**

*Belgorod State University*

*e-mail:  
chernomorets@bsu.edu.ru*

In this work the property of image energy concentration in the subset of frequency intervals. Based on calculation experiments it's shown that image energy concentrated in narrow frequency range.

Key words: image, energy parts, frequency interval, frequency concentration of energy.