УДК 621.397

МЕТОД АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ЗАДАННЫМ ЧАСТОТНЫМ ИНТЕРВАЛАМ

А.А. ЧЕРНОМОРЕЦ
О.Н. ИВАНОВ

Белгородский государственный университет

e-mail: chernomorets @bsu.edu.ru

В работе изложен метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам, который основывается на вычислениях точных значений соответствующих долей энергий.

Ключевые слова: изображения, частотные интервалы, доли энергии, субполосные матрицы.

Использование частотных представлений в задачах цифровой обработки изображений позволяет естественным образом сформулировать задачу анализа свойств изображений на основе соотнесения их с выделенными, исходя из тех или иных соображений, частотными интервалами специального вида. Одной из наиболее важных и часто определяемых характеристик является доля энергии изображения, попадающей в заданный частотный интервал. В частотной области традиционно обработка изображений предполагает применение дискретного преобразования Фурье (ДПФ) или быстрого преобразования Фурье (БПФ). Следует отметить, что получаемые оценки долей энергий затем используются для принятия тех или иных решений. Достижение максимально возможной обоснованности возможно только тогда, когда минимальны погрешности вычислений. Вместе с тем, применение алгоритма БПФ приводит к большим погрешностям при оценивании попадающей в выбранный частотный интервал доли энергии анализируемых изображений, особенно в случае интервала малой ширины. Поэтому целесообразно вычислять точные значения долей энергий, при этом время получения результата можно уменьшить при использовании распараллеливания вычислений при применении соответствующих архитектур вычислителей, что без особых проблем позволяют осуществить современные технические средства.

1. Частотные представления в задачах анализа изображений.

Возможность проведения анализа изображений на основе частотных представлений определяется тем, что в визуальных данных зачастую наблюдается периодичность или квазипериодичность отображаемых процессов. На изображении могут присутствовать повторяющиеся объекты, которые задают некоторую периодичность изменению яркости изображения.

В процессе преобразований изображение можно определить как двумерную функцию $f(x,y)$ на плоскости. Известно, что любая функция, периодически воспроизводящая свои значения и удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена в виде суммы синусов и/или косинусов различных частот, умноженных на некоторые коэффициенты. В этом случае рассматривается преобразование Фурье [1].

Пусть $f(x,y)$ – некоторая функция с конечной или неограниченной областью определения. Тогда при выполнении указанных условий [2, 3] справедливо следующее представление:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{jux} e^{jvy} dx dy . \qquad (1)$$

Равенства

$$e^{jux} = \cos(ux) + j\sin(ux) \quad \text{и} \quad e^{jvy} = \cos(vy) + j\sin(vy)$$

определяют набор базисных функций, с помощью которых представляется функция (функция $f(x,y)$ представляется в базисе Фурье).

Таким образом, функция $f(x,y)$, описывающая некоторое изображение, определяется через множество базисных функций, являющихся функциями синус и косинус различных аргументов. Каждая синусоидальная базисная функция характеризуется своей частотой, что позволяет говорить о частотных представлениях функций, задающих различные изображения.

Значение трансформанты Фурье $F(u,v)$ функции $f(x,y)$ определяется выражением [1, 4]:

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-jux}e^{-jvy}dxdy\,. \tag{2}$$

В содержательном отношении указанным соотношениям (1) и (2) можно придать разный смысл, который и определяет роль частотных представлений в задачах анализа и обработки изображений. В частности, представление (1) является выражением принципа суперпозиции в общем случае бесконечного количества периодических компонент, на которые может быть, согласно (2), разложена исходная функция. При этом справедливо равенство Парсеваля [2, 4, 5]:

$$\int_a^b\int_c^d f^2(x,y)dxdy=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |F(u,v)|^2\, dudv,$$

которое можно преобразовать к виду

$$\int_a^b\int_c^d f^2(x,y)dxdy=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\iint_{(u,v)\in\Omega_{r_1r_2}} |F(u,v)|^2\, dudv,$$

где интервалы $\Omega_{r_1r_2}$ определяют разделение частотной области на непересекающиеся интервалы.

Таким образом, оказывается возможным осуществить анализ энергетических характеристик исследуемой функции на основе частотных представлений, так как интегралы

$$S_{r_1r_2}=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{(u,v)\in\Omega_{r_1r_2}}\left|F(u,v)\right|^2 dudv \tag{3}$$

определяют части энергии, попадающие в выбранные частотные интервалы. В частности, можно выделить частотные интервалы, в которых сосредоточена подавляющая доля энергии, или выделить квазипериодические компоненты исходной функции, энергии которых сосредоточены в разных интервалах.

В настоящее время для нахождения энергетических характеристик в большинстве случаев используется традиционный подход, основанный на использовании преобразования Фурье, а именно: пусть $\Phi=(f_{ik})$ – некоторое изображение, заданное матрицей яркости точек изображения (пикселей) размерностью MxN, $i=1,2,...,M$, $k=1,2,...,N$, $F(u,v)$ – его Фурье-образ.

Тогда дискретное преобразование Фурье определяется следующим выражением [1, 4]:

$$F(u,v)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f_{ik}e^{-j\frac{2\pi}{M}(i-1)(u-1)}e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-1)(v-1)},$$

$$u=1,2,...,M,\quad v=1,2,...,N\,.$$

Энергетический спектр [1] преобразования Фурье для дискретных значений частот u,v, $u=1,2,...,M$, $v=1,2,...,N$ определяется как

$$P(u,v)=\left|F(u,v)\right|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v)\,, \tag{4}$$

где величины $R(u,v)$ и $I(u,v)$ обозначают действительную и мнимую части величины $F(u,v)$ соответственно.

Подход, основанный на использовании выражения (4) для нахождения энергетического спектра преобразования Фурье, обладает существенной вычислительной сложностью (трудоемкостью). В настоящее время для построения энергетического спектра традиционно используют быстрое преобразование Фурье (БПФ). Исследования [6, 7] показали, что алгоритмы, использующие преобразование Фурье и БПФ, не позволяют находить точные значения энергетического спектра одномерного сигнала в заданных частотных диапазонах. Одна из проблем ДПФ – приближенное нахождение части энергии в некотором частотном интервале. В данном случае оно строится как сумма дискретных значений, попадающих в интервал, что приводит к неточным результатам.

2. Метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам.

Для нахождения точных значений доли энергии P_Ω изображения Φ в заданном частотном интервале Ω предлагается использовать выражение

$$P_\Omega = \frac{E_\Omega}{E_0}, \tag{5}$$

где E_Ω – часть энергии изображения Φ, соответствующая частотному интервалу Ω, E_0 – энергия изображения Φ.

Частотный интервал, в котором предлагается определять точные значения долей энергий, является симметричной двумерной частотной областью Ω (субинтервал), задаваемой следующим выражением:

$$\Omega : \{\Omega(u,v) \,|\, (u \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad v \in [\beta_1, \beta_2]) \cup \quad \cup (u \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad v \in [-\beta_2, -\beta_1]) \cup \\ \cup (u \in [-\alpha_2, -\alpha_1], \quad v \in [-\beta_2, -\beta_1]) \cup \cup (u \in [-\alpha_2, -\alpha_1], \quad v \in [\beta_1, \beta_2])\}, \tag{6}$$

где $0 \le \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \le \pi$.

Изображение будем рассматривать в виде непрерывной двумерной функции $f(x,y)$. Обозначим $F(u,v)$ – Фурье-преобразование функции $f(x,y)$, то есть имеем

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-jux} e^{-jvy} dx dy .$$

Из выражения (3) следует, что точное значение части энергии E_Ω изображения $f(x,y)$ в частотной области Ω при известном Фурье-образе $F(u,v)$ определяется выражением

$$E_\Omega = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(u,v)\in\Omega} |F(u,v)|^2 du dv . \tag{7}$$

Значение энергии функции $f(x,y)$ на всей области определения задается соотношениями

$$E_0 = \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x,y) dx dy .$$

Можно показать, что соотношение для вычисления точного значения доли энергии функции $f(x,y)$ в выбранном частотном интервале Ω (6) имеет следующий вид

$$P_{\Omega} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)A_{\alpha}(x_1,x_2)A_{\beta}(y_1,y_2)dx_1dy_1dx_2dy_2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x,y)dxdy}, \quad (8)$$

где

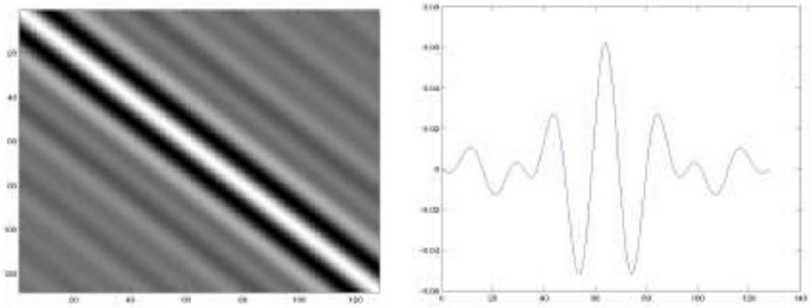
$$A_{\alpha}(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{2Cos\dfrac{(\alpha_2+\alpha_1)(x_1-x_2)}{2}Sin\dfrac{(\alpha_2-\alpha_1)(x_1-x_2)}{2}}{\pi(x_1-x_2)}, & x_1 \neq x_2, \\ \dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\pi}, & x_1 = x_2 \end{cases} \quad (9)$$

$$A_{\beta}(y_1,y_2) = \begin{cases} \dfrac{2Cos\dfrac{(\beta_2+\beta_1)(y_1-y_2)}{2}Sin\dfrac{(\beta_2-\beta_1)(y_1-y_2)}{2}}{\pi(y_1-y_2)}, & y_1 \neq y_2 \\ \dfrac{\beta_2-\beta_1}{\pi}, & y_1 = y_2 \end{cases}. \quad (10)$$

Следует отметить, что функции $A_{\alpha}(x_1,x_2)$ и $A_{\beta}(y_1,y_2)$ обладают свойством

$$A_{\alpha}(x_1,x_2) = A_{\alpha}(-x_1,-x_2), \quad (11)$$
$$A_{\beta}(y_1,y_2) = A_{\beta}(-y_1,-y_2)$$

и при конкретных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ представляют собой волну (рис. 1)



а б

Рис. 1. Графическое представление функции $A_{\alpha}(x_1,x_2)$:
а – функция в виде изображения, б – значения функции при конкретном значении x_1

Рассмотрим далее дискретный случай. Дискретную конечную двумерную функцию будем задавать в виде матрицы, что соответствует форме описания изображений в цифровом виде.

Рассмотрим некоторое изображение Ф в виде матрицы $\Phi = (f_{ik}), \quad i = 1,2,...,M, k = 1,2,...,N$, элементы которой представляют собой значения яркости в равноотстоящих точках пространственной области изображения.

В дискретном случае непрерывным переменным x_1, y_1 и x_2, y_2 в выражениях (8, 9, 10) соответствуют порядковые номера i_1, k_1 и i_2, k_2 элементов матрицы Ф. Функциям $A_{\alpha}(x_1,x_2)$ и $A_{\beta}(y_1,y_2)$ (9, 10) соответствуют матрицы $A = (a_{i_1 i_2})$ и $A_{\beta} = (a^{\beta}{}_{k_1 k_2})$, размерности MxM и NxN (называемые субполосными матрицами [2]), элементы которых задаются следующими соотношениями:

$$a^{\alpha}{}_{i_1 i_2} = \begin{cases} \dfrac{2Cos\dfrac{(\alpha_2+\alpha_1)(i_1-i_2)}{2}Sin\dfrac{(\alpha_2-\alpha_1)(i_1-i_2)}{2}}{\pi(i_1-i_2)}, & i_1 \neq i_2, \\ \dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\pi}, & i_1 = i_2, \end{cases} \quad (12)$$

$$a^{\beta}{}_{k_1 k_2} = \begin{cases} \dfrac{2Cos\dfrac{(\beta_2+\beta_1)(k_1-k_2)}{2}Sin\dfrac{(\beta_2-\beta_1)(k_1-k_2)}{2}}{\pi(k_1-k_2)}, & k_1 \neq k_2, \\ \dfrac{\beta_2-\beta_1}{\pi}, & k_1 = k_2. \end{cases} \quad (13)$$

Данное представление элементов субполосных матриц позволяет разработать быструю процедуру приближенного вычисления значений элементов матриц.

Таким образом, для определения точного значения доли энергии изображения $\Phi = (f_{ik})$ в частотном субинтервале Ω (6), используя выражения (12, 13), можем указать следующее соотношение:

$$P_{\Omega} = \frac{tr(A_{\alpha}{}^{T} \cdot \Phi \cdot A_{\beta} \cdot \Phi^{T})}{tr(\Phi\Phi^{T})}, \quad (14)$$

где Φ – матрица исходного изображения, A_{α} и A_{β} – субполосные матрицы, значения элементов которых определяются на основании выражения (12, 13), функция «tr» – след матрицы.

Представление (14) определяет метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам на основе частотных представлений и позволяет разработать вычислительный алгоритм нахождения доли энергии P_{Ω} дискретного изображения Φ в частотном двумерном субинтервале Ω, не вычисляя при этом трансформанту Фурье.

Выводы

Возможность вычисления точных значений указанных долей энергий без перехода в пространство трансформант Фурье определяет основное преимущество предложенного метода перед используемыми в настоящее время методами, основанными на вычислении ДПФ. Значимость такой возможности определяется тем, что эти доли являются одними из важнейших физических характеристик, и интерес к ним проявляется почти всегда, когда для анализа изображений используются частотные представления.

С целью проверки работоспособности разработанного метода был проведен ряд вычислительных экспериментов, результаты которых показали, что данный метод анализа распределений энергий изображений по заданным частотным интервалам является инвариантным к повороту изображений на 90° и к изменениям яркости; данный факт позволяет применять разработанный метод в качестве эффективного инструмента выявления частотных свойств различных изображений.

Метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам может быть использован при создании алгоритмов и программ, позволяющих решать проблему выделения квазициклических компонент, соответствующих частотным субинтервалам, в которых сосредоточена подавляющая доля энергии изображения, в задачах сжатия при хранении, передаче и повышении скрытности визуальной информации.

Литература

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2006. – 1072 с.

2. Жиляков Е. Г. Методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений / Е. Г. Жиляков. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.

3. Хургин Я. И. Финитные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М.: Либроком, 2010. – 414 с.

4. Сойфер В. А. Методы компьютерной обработки изображений / В. А. Сойфер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 784 с.

5. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М.: Мир, 1978. – 327 с.

6. Жиляков Е. Г. Вариационные алгоритмы анализа и обработки изображений на основе частотных представлений / Е. Г. Жиляков, А.А. Черноморец. – Белгород: Изд-во «ООО ГиК», 2009. – 146 с.

7. Жиляков Е.Г. Об эффективности метода оценивания значений долей энергии изображений на основе частотных представлений / Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец, А.Н. Заливин // Известия ОрелГТУ. Информационные системы и технологии. – 2009. – № 2/52 (563). С. 12-22.

METHOD OF ANALYSIS OF IMAGE ENERGY DISTRIBUTION IN SPECIFIED FREQUENCY INTERVALS

A.A. CHERNOMORETS
O.N. IVANOV

Belgorod State University

e-mail :
chernomorets@bsu.edu.ru

In this work we propose a method of analysis of image energy distribution in specified frequency intervals based on calculation of exact values of corresponding energy parts.

Key words: image, frequency interval, energy parts, subband matrices.