УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ОБ ОДНОМ ПРИНЦИПЕ КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР[1)]

А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин

Белгородский государственный университет,
308007, г.Белгород, ул.Студенческая, 14, e-mail: Meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. Доказывается принцип сильной компактности в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ последовательности функций $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t);\varepsilon>0\}$, ограниченной в пространстве $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, при выполнении условия ограниченности последовательности $\{\partial(\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\,c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t))/\partial t;\varepsilon>0\}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2\left((0,T);\,\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)\right)$.

Ключевые слова: компактность, слабая компактность, ограниченная последовательность, двухмасштабная сходимость.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей Γ, $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, $\varepsilon>0$ – малый параметр. Настоящая работа посвящена доказательству нового принципа сильной компактности в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ последовательности функций $\{c^{(\varepsilon)}\}$, ограниченной в пространстве $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, где $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)}=\int_{\Omega_T}(uv+\nabla u\cdot\nabla v)\,d\boldsymbol{x}\,dt\,.$$

До настоящего времени были известны результаты о такой компактности, при дополнительном требовании гладкости по переменной $t\in(0,T)$.

Примером такого условия может послужить следующее: последовательность производных $\{\partial c^{(\varepsilon)}/\partial t\}$, $\varepsilon\to0$ ограничена в негативном пространстве $\boldsymbol{L}_2\left((0,T);\,\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)\right)$, сопряженном пространству $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$. Здесь, согласно [1],

$$\boldsymbol{L}_p(0,T;X)=\Big\{f:f-\text{измеримое отображение }[0,T]\to X,\ \Big(\int_0^T\|f(t)\|_X^p\,dt\Big)^{1/p}<\infty$$

$$\text{при }1\leqslant p<\infty,\ \sup_{t\in(0,T)}\ \mathrm{ess}\|f(t)\|_X<\infty\text{ при }p=\infty\Big\},$$

X – банахово пространство, а норма пространства $\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)$ определяется следующим образом

$$\|v\|_{\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)}=\sup_{u\in W:\,\|u\|_{\mathbb{W}_2^1(\Omega)}\leq1}|(u,\,v)|\,,$$

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 годы (госконтракт ќ 02.740.11.0613).

где в правой части для простоты записи под W мы подразумеваем $\overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^1_2(\Omega)$ – подпространство $\mathbb{W}^1_2(\Omega)$, состоящее из тех его элементов, которые обращаются в нуль на границе $\partial\Omega$.

В задачах усреднения такое условие зачастую невыполнимо, но, как правило, всегда выполнено более слабое условие ограниченности в этом пространстве последовательности $\{\partial(\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t))/\partial t; \varepsilon > 0\}$, где $\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ и $\chi(\boldsymbol{y})$ – 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$, $y \in \mathbb{R}^n$ функция. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t); \varepsilon > 0\}$ ограничена в пространстве $\boldsymbol{L}_\infty((0,T);\boldsymbol{L}_2(\Omega)) \cap \mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$, а последовательность $\{\partial(\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t))/\partial t; \varepsilon > 0\}$ ограничена в пространстве $\boldsymbol{L}_2\left((0,T);\ \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^{-1}_2(\Omega)\right)$, где $\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\chi(\boldsymbol{y})$ – 1-периодическая по $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ функция такая, что*

$$\langle\, \chi \,\rangle_Y = \int_Y \chi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = m \neq 0\,,$$

Y – единичный куб в $\mathbb{R}^n$. Тогда из последовательности $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t); \varepsilon > 0\}$ можно выделить ограниченную подпоследовательность, сильно сходящуюся в $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$.

□ Согласно [2] (переходя, если это необходимо, к подпоследовательности) можно считать, что последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t); \varepsilon > 0\}$ сходится двухмасштабно и слабо в $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t)$. То есть, для произвольной 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ гладкой функции $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$

$$\int\limits_{\Omega_T} c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)d\boldsymbol{x}dt \to \int\limits_{\Omega_T}\int\limits_{Y} c(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt = \int\limits_{\Omega_T} c(\boldsymbol{x},t)\langle\, \varphi \,\rangle_Y d\boldsymbol{x}dt\,. \qquad (1)$$

Более того, можно считать что последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t); \varepsilon > 0\}$ сходится слабо в $\mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$ к той же самой функции $c(\boldsymbol{x},t)$ и $c(\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$.

Если функция $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t) = \chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\eta(t)\psi(\boldsymbol{x})$, то условия гладкости можно ослабить и считать, что $\chi(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{L}^2(Y)$, $\eta \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^1_2(0,T)$ и $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^1_2(\Omega)$. Полагая в (1)

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t) = \chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\eta(t)\psi(\boldsymbol{x})$$

имеем

$$\int_{\Omega_T} c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\eta(t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}dt \to \int_{\Omega_T} m\, c(\boldsymbol{x},t)\eta(t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}dt\,.$$

Пусть

$$f^{(\varepsilon)}_\psi(t) = \int_\Omega \chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\,,$$

$$f_\psi(t) = \int_\Omega m\, c(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\,.$$

Тогда последнее соотношение означает, что

$$\int_0^T \eta(t) f_\psi^{(\varepsilon)}(t)\,dt \to \int_0^T \eta(t) f_\psi(t)\,dt, \tag{2}$$

для произвольных функций $\eta \in \boldsymbol{L}_2(0,T)$ и $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$.

Лемма 1. *Для почти всех $t \in (0,T)$ имеет место*

$$f_\psi^{(\varepsilon)}(t) \to f_\psi(t) \text{ при } \varepsilon \to 0\,.$$

□ По условию теоремы

$$\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \in \boldsymbol{L}_2\left((0,T);\overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^{-1}(\Omega)\right),$$

что означает выполнение равенства

$$\int_{\Omega_T} \frac{d\varphi(t)}{dt}\,\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\,c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\,\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T}\varphi(t)\,\boldsymbol{F}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}dt \tag{3}$$

для произвольных функций $\varphi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(0,T)$ и $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$, где функции $\boldsymbol{F}^{(\varepsilon)}$ равномерно ограничены по малому параметру ε в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$:

$$\int_{\Omega_T}|\boldsymbol{F}^{(\varepsilon)}|^2 d\boldsymbol{x}dt \leqslant F_0^2\,.$$

Если положить

$$g^{(\varepsilon)}(t) = -\int_\Omega \boldsymbol{F}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\,,$$

$$\int_0^T |g^{(\varepsilon)}|^2 dt \leqslant F_0^2\,\|\psi\|_{2,\Omega}^2 = M_\psi^2\,,$$

то тождество (3) примет вид

$$\int_0^T \left(f_\psi^{(\varepsilon)}(t)\frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t)g^{(\varepsilon)}(t)\right)dt = 0\,. \tag{4}$$

Следовательно, согласно [3], функции $f_\psi^{(\varepsilon)}(t)$ обладают обобщенными производными по времени $g^{(\varepsilon)}(t)$ и справедливо представление

$$f_\psi^{(\varepsilon)}(t) = f_\psi^{(\varepsilon)}(0) + \int_0^t g^{(\varepsilon)}(\tau)d\tau\,.$$

В частности,

$$|f_\psi^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant M_\psi\,, \quad |f_\psi^{(\varepsilon)}(t_1) - f_\psi^{(\varepsilon)}(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} g^{(\varepsilon)}(\tau)d\tau\right| \leqslant M_\psi\,|t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}\,. \tag{5}$$

Пусть $Q = \{t_1, \ldots, t_k, \ldots\}$ счётное всюду плотное множество на [0,T]. Диагональным процессом выбираем подпоследовательность $\{f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t); m \in \mathbb{N}\}$ такую, что

$$f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k) \to \widehat{f}_\psi(t_k)\,, \quad \text{при} \quad t_k \in Q\,.$$

В силу неравенства (5)

$$\begin{gathered} |\widehat{f}_\psi(t_k)| \leqslant M_\psi, \\ |\widehat{f}_\psi(t_k) - \widehat{f}_\psi(t_m)| \leqslant M_\psi\, |t_k - t_m|^{\frac{1}{2}}\,, \end{gathered} \tag{6}$$

для произвольных t_k, $t_m \in Q$. То есть, существует функция $\overline{f}_\psi(t)$ – продолжение функции $\widehat{f}_\psi(t)$ на весь отрезок [0,T], такая что

$$\begin{gathered} \overline{f}_\psi(t_k) = \widehat{f}_\psi(t_k), \quad \text{при} \quad t_k \in Q\,, \\ |\overline{f}_\psi(t)| \leqslant M_\psi\,, \\ |\,\overline{f}_\psi(t) - \overline{f}_\psi(\tau)| \leqslant M_\psi\, |\, t - \tau|^{\frac{1}{2}}\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Покажем теперь, что последовательность $\{f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t); m \in \mathbb{N}\}$ сходится поточечно к функции $\overline{f}_\psi(t)$ при всех $t \in (0,T)$:

$$f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t) \to \overline{f}_\psi(t), \qquad \forall\, t \in (0,T)\,. \tag{8}$$

Пусть $t_0 \in (0,T)$. Тогда для произвольного $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_0) - \overline{f}_\psi(t_0)| \leqslant |\, f_\psi^{\varepsilon_m}(t_0) - f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k)| + |\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k) - \overline{f}_\psi(t_k)| \,+& \\ + |\,\overline{f}_\psi(t_k) - \overline{f}_\psi(t_0)| \leqslant 2\, M_\psi\, |\, t_0 - t_k|^{\frac{1}{2}} + |\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k) - \overline{f}_\psi(t_k)|\,.& \end{aligned}$$

Выбирая t_k из условия

$$2\, M_\psi\, |\, t_0 - t_k|^{\frac{1}{2}} < \frac{\delta}{2}\,,$$

и уже для фиксированного k выбирая ε_0 из условия

$$|\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_k) - \overline{f}_\psi(t_k)| < \frac{\delta}{2}, \quad \text{при} \quad \varepsilon_m < \varepsilon_0\,,$$

приходим к неравенству

$$|\, f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t_0) - \overline{f}_\psi(t_0)| < \delta\,, \quad \text{при} \quad \varepsilon_m < \varepsilon_0\,,$$

доказывающему наше утверждение.

Таким образом,

$$\int_0^T \eta(t) f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t)\, dt \to \int_0^T \eta(t)\overline{f}_\psi(t) dt\,.$$

С другой стороны, согласно (2),

$$\int_0^T \eta(t) f_\psi^{(\varepsilon_m)}(t)\,dt \to \int_0^T \eta(t) f_\psi(t)\,dt\,.$$

В силу произвольного выбора функции $\eta(t)$ получим, что

$$f_\psi(t) = \overline{f}_\psi(t), \quad \text{для почти всех } t \in [0,T]\,.$$

Следовательно, (8) можно переписать как предельное соотношение

$$\int_\Omega \chi^{(\varepsilon_m)}(\boldsymbol{x}) c^{(\varepsilon_m)}(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \to \int_\Omega m\, c(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\,,$$

которое выполняется при почти всех $t \in (0,T)$ и при всех $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$. В силу единственности предела, последнее соотношение выполняется для всей последовательности $\{c^{(\varepsilon)}\}$:

$$f_\psi^{(\varepsilon)}(t) = \int_\Omega \chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \to \int_\Omega m\, c(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = f_\psi(t)\,. \quad \blacksquare \tag{9}$$

Покажем теперь, что последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0);\varepsilon>0\}$ (с точностью до некоторой подпоследовательности) сходится слабо в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ при почти всех $t_0 \in (0,T)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t_0)$. Для этого воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2. *Из последовательности $\{\varepsilon>0\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_k; k\in\mathbb{N}\}$ такую, что*

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0} \varepsilon_k^2 \int_\Omega |\nabla c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x},t_0)|^2 d\boldsymbol{x} = 0\,, \quad \text{для почти всех } t_0 \in (0,T)\,. \tag{10}$$

□ В самом деле, из ограниченности последовательности $\{\nabla c^{(\varepsilon)};\varepsilon>0\}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_T} |\nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x}dt = 0\,. \tag{11}$$

Положим

$$u^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x}\,.$$

Тогда равенство (11) означает, что последовательность $\{u^{(\varepsilon)};\varepsilon>0\}$ сходится сильно к нулю в пространстве $\boldsymbol{L}_1(0,T)$. В силу известных теорем анализа [4], существует подпоследовательность $\{\varepsilon_k; k\in\mathbb{N}\}$ из $\{\varepsilon>0\}$ такая, что последовательность $\{u^{(\varepsilon_k)}(t_0); k\in\mathbb{N}\}$ сходится к нулю (поточечно) при почти всех $t_0 \in (0,T)$,

$$u^{(\varepsilon_k)}(t_0) \to 0 \quad \text{при почти всех} \quad t_0 \in (0,T)\,. \quad \blacksquare \tag{12}$$

Пусть $G \subset (0,T)$ – множество полной меры в $(0,T)$, для которого выполнены условия (9), (12) и условие

$$\int_\Omega |\nabla c(\boldsymbol{x}, t_0)|^2 dx \leqslant N(t_0) < \infty, \ t_0 \in G. \tag{13}$$

Такой выбор множества G возможен в силу известных свойств суммируемых функций [4], [5].

Рассмотрим теперь последовательность $\{c^{(\varepsilon)}; \varepsilon > 0\}$ на сечении $t = t_0 \in G$. По условию теоремы эта последовательность ограничена в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Следовательно существует подпоследовательность $\{c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x}, t_0); k \in \mathbb{N}\}$, сходящаяся двухмасштабно в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к 1 – периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\overline{C}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_0)$. Далее воспользуемся определением двухмасштабной сходимости. Имеем

$$\varepsilon_k \int_\Omega \nabla c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x}, t_0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}/\varepsilon_k)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} =$$

$$= -\varepsilon_k \int_\Omega c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x}, t_0)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}/\varepsilon_k) \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x}, t_0)\big(\nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}/\varepsilon_k)\big)\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

для произвольной периодической функции $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{W}_2^1(Y)$ и произвольной функции $\psi \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$.

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon_k \to 0$ имеем с учетом (10):

$$\int_\Omega \psi(\boldsymbol{x})\Big(\int_Y \overline{C}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_0)\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\Big)d\boldsymbol{x} = 0,$$

что эквивалентно равенству

$$\overline{C}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t_0) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, t_0). \tag{14}$$

Таким образом, подпоследовательность $\{c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x}, t_0); k \in \mathbb{N}\}$ сходится двухмасштабно в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $\overline{c}(\boldsymbol{x}, t_0)$. В частности, подпоследовательность $\{\chi^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x})\, c^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x}, t_0); k \in \mathbb{N}\}$, где $\chi^{(\varepsilon_k)}(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon_k)$, сходится слабо в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $m\,\overline{c}(\boldsymbol{x}, t_0)$. С другой стороны, эта же самая подпоследовательность в силу соотношений (9) сходится слабо в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $m\, c(\boldsymbol{x}, t_0)$. Единственность слабого предела влечет равенство

$$\overline{c}(\boldsymbol{x}, t_0) = c(\boldsymbol{x}, t_0)\,.$$

Более того, это же равенство показывает, что вся последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t_0); \varepsilon > 0\}$ сходится слабо в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $c(\boldsymbol{x}, t_0)$.

Нам осталось показать, что данная последовательность $\{c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t_0); \varepsilon > 0\}$ сходится сильно в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $c(\boldsymbol{x}, t_0)$. Для этого покажем, что последовательность $\{\nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0);\varepsilon>0\}$ ограничена в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. В самом деле, имеем

$$\int_\Omega \nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0)\big(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)d\boldsymbol{x}\to$$

$$-\int_\Omega c(\boldsymbol{x},t_0)\big(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big)d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla c(\boldsymbol{x},t_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

Это значит, что последовательность $\{\nabla c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t_0);\varepsilon>0\}$ сходится слабо в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ к функции $\nabla c(\boldsymbol{x},t_0)$ и, следовательно, ограничена в этом пространстве [4]. Последний факт и вполне непрерывное вложение пространства $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$ в пространство $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ (см. [1]) доказывает наше утверждение. ■

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
2. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20. – с.608-623.
3. Adams R.A. Sobolev spaces / R. A. Adams. – N.Y.: Academic press, 1975.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной // И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974.

SOME COMPACTNESS RESULT FOR PERIODIC STRUCTURES

A.M. Meirmanov, R.N. Zimin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. The strong compactness principle of the function sequence $\{c^{(\varepsilon)};\varepsilon>0\}$ in the space $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$, being bounded in the space $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ is proved when the sequence $\{\partial(\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})c^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t))/\partial t;\ \varepsilon>0\}$ is bounded in the space $\boldsymbol{L}_2\left((0,T);\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)\right)$.

Key words: compactness, weak compactness, bounded sequence, two-scale convergence.