УДК 510.64

УНАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

В.В. РУМБЕШТ

Белгородский государственный университет

e-mail: rumbesht@bsu.edu.ru

В работе приводятся различные унарные операции над нечеткими множествами, позволяющие моделировать лингвистические модификаторы, предлагается универсальная параметрическая операция, обобщающая рассмотренные.

Ключевые слова: искусственный интеллект, представление знаний, операции над нечеткими множествами.

В области искусственного интеллекта одной из основных задач является разработка средств представления знаний. Знания экспертов в различных предметных областях, как правило, имеют значительный уровень неопределенности, обусловленный межличностными средствами передачи информации, например, таких, как естественный язык. Одним из средств формализации знаний, представленных на естественном языке является теория нечетких множеств [1] и понятие лингвистической переменной [2].

Теория нечетких множеств ориентирована на математическое моделирование неопределенных понятий, которыми оперирует человек при описании своих представлений о реальной системе, своих желаний, целей и т.п. При этом неопределенные понятия моделируются нечеткими множествами, а другие элементы естественного языка, такие как частица "не", союзы "и", "или" и различные лингвистические модификаторы – операциями над соответствующими нечеткими множествами.

Изначально операции над нечеткими множествами задавались априорно, но затем появился подход [4, 5], при котором эти операции определяются исходя из предварительного указания свойств, которым они должны удовлетворять. Это позволяет объединять различные операции в классы и исследовать свойства не отдельных операций, а целых классов, а также исследовать свойства операций внутри класса.

Этот подход хорош тем, что дает возможность выделять из класса параметризованные операции и использовать их, путем варьирования параметров, для определения остальных. Более того, параметризованные операции служат для выражения степени взаимодействия – невзаимодействия и степени взаимной компенсации при использовании информации, получаемой из нескольких источников.

В настоящее время известны параметризованные бинарные операции в классах t–норм и t–конорм [4], а параметризованных унарных операций нет.

Целью данной статьи является определение универсальной параметризованной операции, обобщающей известные унарные операции над нечеткими множествами.

Содержание статьи следующее: в первом разделе рассмотрим особенности унарных операций теории нечетких множеств; во втором разделе сформулируем обобщенные аксиомы, которым должны удовлетворять данные операции, и определим универсальную параметризованную операцию, так же удовлетворяющую этим аксиомам (данную операцию назовем операцией линейного преобразования); в третьем разделе проведем исследования свойств операции линейного преобразования; и в заключении обобщим результаты исследования и покажем, что операция линейного преобразования покрывает классы рассмотренных унарных операций над нечеткими множествами.

1. Унарные операции в теории нечетких множеств

В теории нечетких множеств существуют несколько унарных операций, позволяющих моделировать различные лингвистические модификаторы (слова "очень", "примерно", "весьма", "более–менее" и т.п.). К таким операциям относятся концентрирование (CON), растяжение (DIL) и контрастная интенсификация (INT) нечетких множеств.

В работах Л. Заде [2, 3] операции концентрирования, растяжения и контрастной интенсификации определяются следующим образом:

$$\forall u \in U,\ \mu_{CON(A)}(u) = \mu_A(u)^2;$$

$$\forall u \in U,\ \mu_{DIL(A)}(u) = \sqrt{\mu_A(u)};$$

$$\forall u \in U,\ \mu_{INT(A)}(U) = \begin{cases} 2 \cdot \mu_A(u)^2, & \text{если } \mu_A(u) \le 0.5 \\ 1 - 2 \cdot (1 - \mu_A(u)^2), & \text{если } \mu_A(u) \ge 0.5 \end{cases},$$

где A – нечеткое множество в универсуме U, μ_A – функция принадлежности этого нечеткого множества.

Графики функций, на основе которых определяются операции *CON*, *DIL* и *INT* представлены на рис. 1. График функции, на основе которой определяется операция *CON* изображен пунктирной линией, *DIL* – штриховой линией, а *INT* – штрих–пунктирной линией.

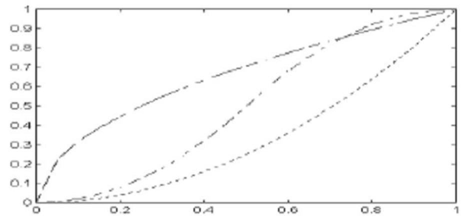

Рис. 1. Графики функций, на основе которых определяются операции концентрирования, растяжения и контрастной интенсификации

Результаты применения этих операций представлены на рис. 2. Все операции применяются к нечеткому множеству с функцией принадлежности, изображенной непрерывной линией. Результат применения операции *CON* изображен пунктирной линией, *DIL* – штриховой линией, а INT – штрих–пунктирной линией.

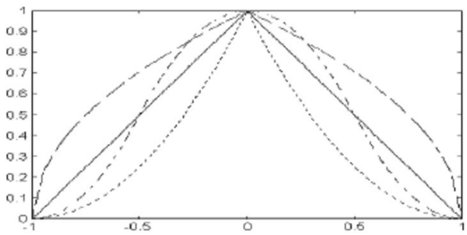

Рис.2. Результаты применения операций концентрирования, растяжения и контрастной интенсификации

Согласно Л. Заде, концентрирование соответствует понятию "очень", растяжение – понятию "примерно", а контрастная интенсификация – понятию "более-менее". Так, если нечеткое множество A выражает смысловое содержание слова "среднее", то ***CON(A), DIL(A), INT(A)*** выражают семантику выражений "очень среднее", "примерно среднее" и "более-менее среднее" соответственно.

Несложно заметить (см. рис. 2), что:

- операция концентрирования в общем случае заключается в уменьшении степени принадлежности элементов нечеткого множества ***A*** нечеткому множеству ***CON(A),*** то есть в нахождении подмножества своего аргумента;
- операция растяжения, наоборот, заключается в увеличении степени принадлежности элементов нечеткого множества ***A*** нечеткому множеству ***DIL(A),*** то есть в нахождении такого нечеткого множества, чтобы аргумент операции был его подмножеством;
- контрастная интенсификация уменьшает значение $\mu_A(u)$, если $\mu_A(u)\leq 0,5$, и увеличивает, если $\mu_A(u)\geq 0,5$, то есть уменьшает "нечеткость" ***A***.

2. Определение универсальной унарной параметризованной операции над нечеткими множествами (операция линейного преобразования)

Анализируя рис. 1, можно заметить, что операция концентрирования определяется на основе непрерывной, строго возрастающей функции $c:[0, 1]\to[0, 1]$, такой, что $\forall x\in[0, 1]$, $c(x)\leq x$, и в частности $c(0)=0$, $c(1)=1$; операция растяжения – на основе непрерывной, строго возрастающей функции $d:[0, 1]\to[0, 1]$, такой, что $\forall x\in[0, 1]$, $d(x)\geq x$, и в частности $d(0)=0$, $d(1)=1$; операция контрастной интенсификации – на основе непрерывной, строго возрастающей функции $i:[0, 1]\to[0, 1]$, такой, что $\forall x,\delta\in[0, 1]$, $i(x)\leq x$, если $x\geq\delta$, и $i(x)\geq x$, если $x\leq\delta$, и в частности $i(0)=0$, $i(1)=1$.

Все это позволяет выделить классы операций концентрирования, растяжения и контрастной интенсификации. Тем не менее, все эти три класса имеют общие свойства – они содержат унарные операции, определенные на основе функции

$$\lambda: [0, 1] \to [0, 1],$$

удовлетворяющей следующим аксиомам:

$\boldsymbol{\lambda 1}$. $\lambda(0)=0$, $\lambda(1)=1$;

$\boldsymbol{\lambda 2}$. λ – непрерывная функция;

$\boldsymbol{\lambda 3}$. λ – строго возрастающая функция.

Выделение аксиом $\boldsymbol{\lambda 1} - \boldsymbol{\lambda 3}$ позволяет рассматривать *CON*, *DIL* и *INT* в рамках одного класса операций и применить вышеописанный подход.

Ослабим систему аксиом $\boldsymbol{\lambda 1} - \boldsymbol{\lambda 3}$: аксиому $\boldsymbol{\lambda 1}$ исключим из рассмотрения, а аксиому $\boldsymbol{\lambda 3}$ сделаем менее строгой:

$\boldsymbol{\lambda 3'}$. λ – неубывающая функция.

Рассмотрим функцию, удовлетворяющую аксиомам $\boldsymbol{\lambda 2}$ и $\boldsymbol{\lambda 3'}$:

$$\lambda_{(k,b)}:[0, 1]\to[0, 1],\ k>0,\ (-k)\leq b\leq 1,$$

где k и b – параметры, такие, что

$$\forall x\in[0, 1],\ \lambda_{(k,b)}\ x = max[0, min(1, k\cdot x+b)].$$

На основе функции $\lambda_{(k,b)}$ определим универсальную параметризованную операцию над нечеткими множествами, которую назовем операций линейного преобразования.

Определение. Операция линейного преобразования определена для любого возможного универсума ***U*** как

$$\Lambda_{(k,b)}: FUZZY(U) \to FUZZY(U),$$

где *FUZZY(U)* – множество всех нечетких подмножеств *U*. Применение операции $\Lambda_{(k,b)}$ к любому нечеткому множеству $A\in FUZZY(U)$ дает нечеткое множество $A'\in FUZZY(U)$ такое, что его функция принадлежности определяется следующим выражением:

$$\forall u\in U,\ \mu_{A'}(u) = \lambda_{(k,b)}\ \mu_A(u).$$

3. Исследование свойств операции линейного преобразования

Поскольку операция $\Lambda_{(k,b)}$ определяется на основе функции $\lambda_{(k,b)}$, преобразование зависит от соотношения параметров k и b, и в конечном итоге, от взаимного положения прямой $y=k{\cdot}x+b$ и единичного квадрата $[0, 1]\times[0, 1]$ (рис. 3).

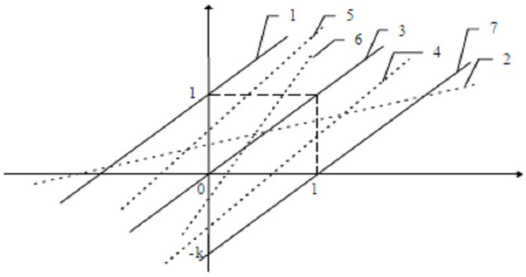

Рис. 3. Возможные случаи взаимного положения прямой $y=k{\cdot}x+b$ и единичного квадрата при $k>0$

Как видно на рис. 3 существуют семь случаев взаимного расположения этой прямой и единичного квадрата. Проведем анализ возможных случаев.

Случай 1 характерен тем, что $\forall k>0,\ b=1$, то есть прямая $y=k{\cdot}x+b$ пересекает единичный квадрат в точке $<0, 1>$ и полностью лежит выше его. В этом случае: $\forall x\in[0, 1]$, $\lambda_{(k,b)}\, x=1$, и как следствие этого, $\forall A \in FUZZY(U)\ \Lambda_{(k,b)}\ A=U$.

Случай 2 представляет ситуацию, в которой $\lambda_{(k,b)}$ является линейной функцией. Необходимое и достаточное условие этого: пересечение прямой $y=k{\cdot}x+b$ и единичного квадрата в бесконечном множестве точек, причем прямая должна проходить через две стороны квадрата, которые определяются вершинами: $<0, 0>$, $<0, 1>$ и $<1, 0>$, $<1, 1>$ соответственно, то есть корни уравнений $k{\cdot}x+b=0$ и $k{\cdot}x+b=1$ не принадлежат интервалу $(0,1)$.

Необходимое и достаточное условие этого случая: $0\le b\le(1-k)$, что возможно только при $k\le 1$. Таким образом, случай 2 полностью характеризуется условием: $0<k\le 1$, $0\le b\le(1-k)$. Пример применения операции $\Lambda_{(k,b)}$ с параметрами $0<k\le 1$ и $0\le b\le(1-k)$ представлен на рис. 4.

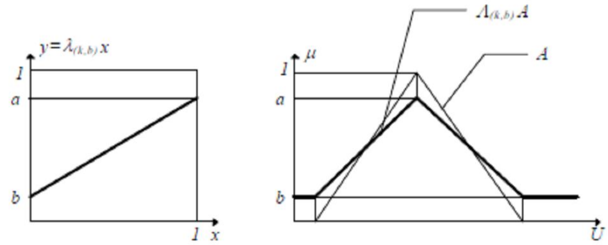

Рис. 4. Применение операции $\Lambda_{(k,b)}$ при $0<k\le 1$ и $0\le b\le(1-k)$

Случай 3 определяется условием $k=1$ и $b=0$ (частный случай случая 2). Несложно заметить, что $\Lambda_{(1,0)}$ является тождественной операцией, то есть $\forall A \in FUZZY(U)\ \Lambda_{(1,0)} A = A$.

Случай 4 представляет ситуацию, в которой $\lambda_{(k,b)}$ можно рассматривать как кусочно-линейную функцию с "зоной нечувствительности". Необходимым и достаточным условием этого является пересечение прямой $y=k{\cdot}x+b$ и единичного квадрата в бесконечном множестве точек, причем прямая должна проходить через две стороны квадрата, определенные вершинами: $<0, 0>$, $<1, 0>$ и $<1, 0>$, $<1, 1>$ соответственно. Это условие можно выразить следующим: во первых, корень уравнения $k{\cdot}x+b=0$ принадлежит интервалу $(0, 1)$, то есть $(-k)<b<0$; во вторых, корень уравнения $k{\cdot}x+b=1$ не принадлежит интервалу $(0, 1)$, то есть $b\leq(1-k)$. Таким образом, случай 4 полностью характеризуется условием: $(-k)<b\leq(1-k)$, если $k>1$, и $(-k)<b<0$, если $0<k<1$. Пример применения операции $\Lambda_{(k,b)}$ при $k>1$ и $b=1-k$ представлен на рис. 5.

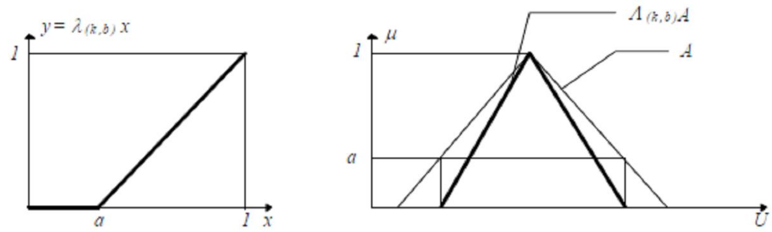

Рис. 5. Применение операции $\Lambda_{(k,b)}$ при $k>1$ и $b=1-k$

Случай 5 представляет ситуацию, в которой $\lambda_{(k,b)}$ можно рассматривать как кусочно-линейную функцию с "насыщением". Необходимым и достаточным условием этого является пересечение прямой $y=k{\cdot}x+b$ и единичного квадрата в бесконечном множестве точек, причем прямая должна проходить через две стороны квадрата, определенные вершинами: $<0, 0>$, $<0, 1>$ и $<0, 1>$, $<1, 1>$ соответственно. Это условие можно выразить следующим: во первых, $0\leq b<1$; во вторых, корень уравнения $k{\cdot}x+b=1$ принадлежит интервалу $(0, 1)$, то есть $(1-k)<b<1$. Таким образом, случай 5 полностью характеризуется условием: $(1-k)<b<1$, если $0<k<1$, и $0\leq b<1$, если $k>1$. Пример применения операции $\Lambda_{(k,b)}$ при $k>1$ и $0\leq b<1$ представлен на рис. 6.

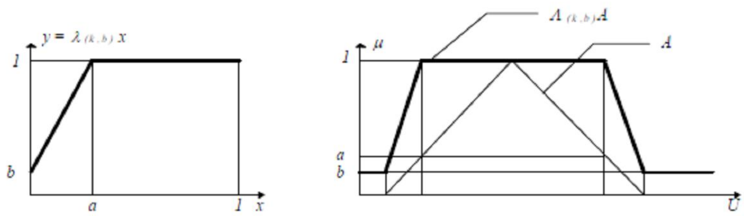

Рис. 6. Применение операции $\Lambda_{(k,b)}$ при $k>1$ и $0\leq b<1$

Случай 6 иллюстрирует ситуацию, в которой $\lambda_{(k,b)}$ можно рассматривать как кусочно-линейную функцию с "зоной нечувствительности" и с "насыщением". Необходимым и достаточным условием этого является пересечение прямой $y=k{\cdot}x+b$ и единичного квадрата в бесконечном множестве точек, причем прямая должна проходить через две стороны квадрата, определенные вершинами: $<0, 0>$, $<0, 1>$ и $<1, 0>$, $<1, 1>$ соответственно. Это условие можно выразить следующим: во первых, корень уравнения $k{\cdot}x+b=0$ принадлежит интервалу $(0, 1)$, то есть $(-k)<b<0$; во вторых, корень уравнения $k{\cdot}x+b=1$ также принадлежит интервалу $(0, 1)$, то есть $(1-k)<b<1$. Одновременное выполнение этих условий возможно только при $k>1$. Таким образом, случай 6 полностью характеризуется условием: $k>1$, $(1-k)<b<0$. Пример применения операции $\Lambda_{(k,b)}$ при $k>1$ и $(1-k)<b<0$ представлен на рис. 7.

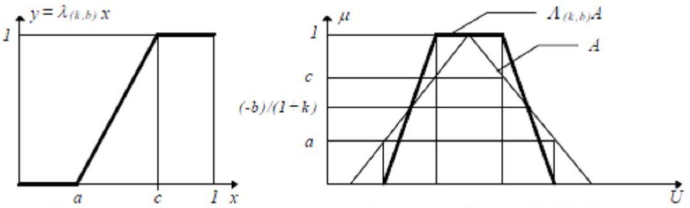

Рис. 7. Применение операции $\Lambda_{(k,b)}$ при ***k>1*** и ***(1-k)<b<0***

Случай 7 характерен тем, что ***k>0, b=(-k),*** то есть прямая ***y=k·x+b*** пересекает единичный квадрат в точке ***<1, 0>*** и полностью лежит ниже его. Тогда, $\forall x \in [0, 1]$, $\lambda_{(k,b)}$ ***x=0***, и как следствие этого, $\forall A \in FUZZY(U)$ $\Lambda_{(k,b)}$ ***A=***$\varnothing$.

Таким образом, в зависимости от параметров $\lambda_{(k,b)}$ может быть константой; линейной функцией; иметь зону нечувствительности и (или) зону насыщения. На рис. 8 отражена зависимость вида $\lambda_{(k,b)}$ от параметра ***b*** при ***k>1, k=1*** и ***0<k<1,*** соответственно.

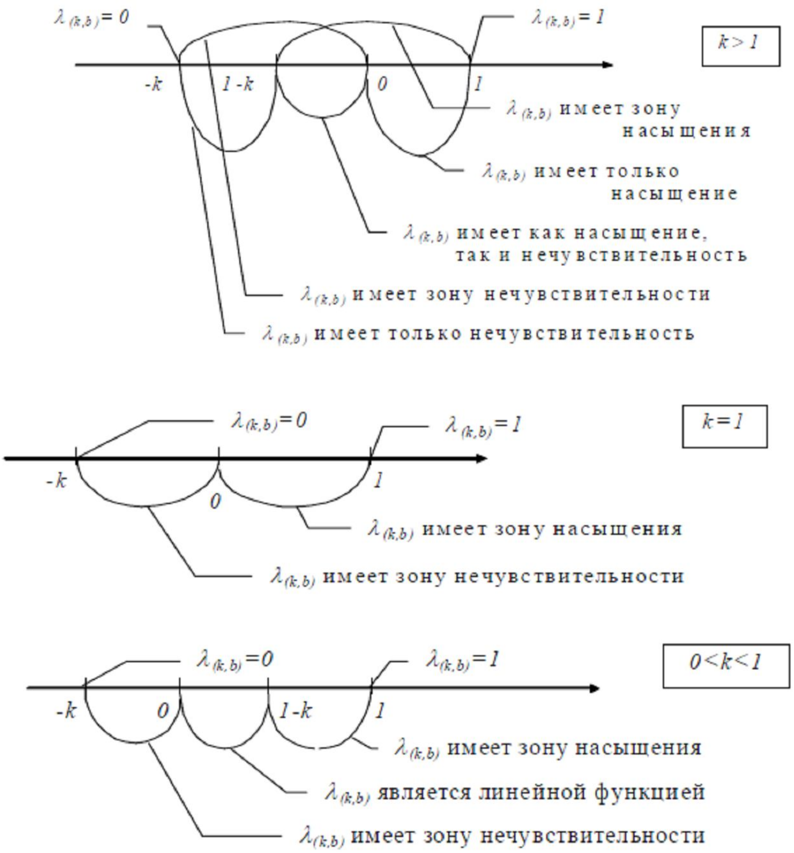

Рис. 8. Зависимость функции $\lambda_{(k,b)}$ от параметра ***b*** при различных значениях ***k***

4. Заключение

Обобщая рассмотренные случаи взаимного положения прямой $y=k{\cdot}x+b$ и единичного квадрата, можно отметить, что параметры k и b влияют на результат операции $\Lambda_{(k,b)}$ не только количественно, но и качественно. В этом смысле особый интерес представляют случай 2, когда $\lambda_{(k,b)}$ является строго линейной функцией; случай 4, когда $\lambda_{(k,b)}$ имеет зону нечувствительности; случай 5, когда $\lambda_{(k,b)}$ имеет зону насыщения; и случай 6, когда $\lambda_{(k,b)}$ имеет как нечувствительность, так и насыщение.

При значении параметров k и b, удовлетворяющих случаю 2, в результате применения операции $\Lambda_{(k,b)}$ к любому нечеткому множеству A получается нечеткое множество A', у которого значения функция принадлежности меньше чем $\mu_A(u)$, если $\mu_A(u) > b/(1-k)$, и больше чем $\mu_A(u)$, если $\mu_A(u) < b/(1-k)$. Аналогов этой операции в теории нечетких множеств нет. Однако ее можно охарактеризовать как нечто противоположное контрастной интенсификации, и назвать "сплющиванием".

При значении параметров k и b, удовлетворяющих случаю 4, в результате применения операции $\Lambda_{(k,b)}$ к любому нечеткому множеству A получается нечеткое множество A', которое является подмножеством A, то есть $\forall u \in U,\ \mu_{A'}(u) \le \mu_A(u)$. В этом смысле операцию линейного преобразования можно рассматривать как разновидность операции концентрирования.

При значении параметров k и b, удовлетворяющих случаю 5, в результате применения операции $\Lambda_{(k,b)}$ к любому нечеткому множеству A получается нечеткое множество A', которое включается в A, то есть $\forall u \in U,\ \mu_{A'}(u) \ge \mu_A(u)$. В этом смысле операцию линейного преобразования можно рассматривать как разновидность операции растяжения.

При значениях параметров k и b, удовлетворяющих случаю 6, $\Lambda_{(k,b)}$ может рассматриваться как разновидность операции контрастной интенсификации, поскольку она увеличивает те значения принадлежности, которые больше чем ***b/(1-k),*** и уменьшает те, которые меньше чем ***b/(1-k).***

Таким образом, операция линейного преобразования покрывает классы операций концентрирования, растяжения и контрастной интенсификации, и, даже, оказывается "шире". Это обусловлено тем, что при выборе функции $\lambda_{(k,b)}$ мы приняли ослабленную систему аксиом ***{λ2, λ3'},*** которая по смысловому содержанию включает в себя систему аксиом ***{λ1, λ2, λ3}***.

В частности, операции концентрирования, растяжения и контрастной интенсификации могут быть определены через операцию линейного преобразования следующим образом:

$$CON = \Lambda_{(2,-1)};$$

$$DIL = \Lambda_{(2,0)};$$

$$INT = \Lambda_{(4,-1.5)}.$$

Несложно убедиться, что при таком определении *CON*, *DIL* и *INT* выполняются все условия, обусловленные семантикой этих операций.

Литература

1. Zadeh L.A. Fuzzy set // Information and Control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338-353.

2. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.

3. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня. – М.: Знание, 1974. – С. 5-49.

4. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.

5. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др.; под. ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.

THE ONE ARGUMENT OPERATIONS IN FUZZY SETS THEORY AND THEIR GENERALIZATION

V.V. RUMBESHT

Belgorod State University

e-mail: rumbesht@bsu.edu.ru

In the article propose the universal parameter operation, witch surpassing classes of known one argument fuzzy set operations, and analyse of its properties.

Key words: the artificial intelligence, performance of knowledge, operations above fuzzy sets.