УДК 511.35

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ, РАЗНОСТЬ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ СТЕПЕНЬЮ ФИКСИРОВАННОГО ПРОСТОГО ЧИСЛА

С.А. Гриценко, М.В. Шевцова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, shevtsova@bsu.edu.ru

Аннотация. Получена асимптотическая формула для числа простых чисел, не превосходящих X и лежащих в арифметической прогрессии с разностью $D = p_0^m$, где $p_0 \geqslant 3$ – фиксированное простое число и $D \leqslant X^{\frac{3}{8}} e^{-(\ln\ln X)^2}$.

Ключевые слова: арифметическая прогрессия, простые числа, оценки.

1. Введение. В теории чисел важную роль играет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть при $(l, D) = 1$ $\pi(X, D, l)$ означает число простых чисел, не превосходящих X и сравнимых с l по модулю D. Из расширенной гипотезы Римана следует, что

$$\pi(X, D, l) = \frac{\mathrm{Li}(X)}{\varphi(D)}\left(1 + O\left(\ln^{-M} X\right)\right),$$

где $D \leqslant X^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, $M > 0$ – константа.

Известная к настоящему времени граница изменения D гораздо меньше: при $D \leqslant (\ln X)^A$, где $A > 0$ — константа, $c = c(A) > 0$, справедлива формула:

$$\pi(X, D, l) = \frac{\mathrm{Li}(X)}{\varphi(D)} + O\left(X e^{-c\sqrt{\ln X}}\right),$$

которая известна в литературе как формула Зигеля-Вальфиша [1].

В случае $D = p_0^m$, $p_0 \geqslant 3$ – фиксированное простое число, можно получить асимптотическую формулу для $\pi(X, D, l)$ при гораздо больших D. В 1955 году А.Г. Постников обнаружил [2], что сумма значений неглавного характера по модулю D, равному степени нечетного простого числа, представляет собой сумму Вейля специального вида. Это открытие замечательно тем, что суммы Вейля, даже очень короткие (а вместе с ними и очень короткие суммы значений характера), допускают нетривиальные оценки.

Идея А.Г. Постникова позволила решить некоторые проблемы теории чисел, к которым в общем случае не было никаких подходов.

В 1964 году Ю.В. Линник, М.Б. Барбан и Н.Г. Чудаков [3] доказали следующий асимптотический закон, справедливый при $D = p_0^m \leqslant X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, $M > 0$ – произвольно большое число):

$$\pi(X, D, l) = \frac{\mathrm{Li}(X)}{\varphi(D)}\left(1 + O\left(\ln^{-M} X\right)\right).$$

Доказательство этой теоремы основано на плотностной технике, и поэтому для него требуется информация о распределении нулей L-функции Дирихле в критической полосе.

В 1979 году М.М. Петечук [4] применил идею А.Г. Постникова к проблеме делителей Дирихле в коротких арифметических прогрессиях и получил асимптотическую формулу:

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{XQ_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X^{1-\varkappa}}{\varphi(D)}\right),$$

где $D = p_0^m \leqslant X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$, $(l,D)=1$, $Q_{k-1}(\ln X)$ – многочлен степени $k-1$ с коэффициентами, зависящими от k и p_0, $\varkappa = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{16}, \dfrac{\beta}{k^3}\right\}$, $\beta > 0$ – константа, зависящая от p_0.

Доказательство этой формулы основано на идее работы А.А.Карацубы [5], позволяющей оценивать ее остаточный член по схеме решения тернарной аддитивной задачи. При этом оно «элементарно», то есть не использует средств комплексного анализа.

В настоящей статье методами работ [4] и [5] выводится асимптотическая формула для $\pi(X,D,l)$ при $D = p_0^m$. Однако наряду с этими методами мы применяем метод контурного интегрирования, поскольку нам необходимо оценивать не только суммы значений характера, но и суммы значений характера по простым числам.

По сравнению с теоремой Ю.В. Линника, М.Б. Барбана и Н.Г. Чудакова получено незначительное уточнение остаточного члена и верхней границы изменения D. Наше доказательство существенно отличается тем, что не использует информации о распределении нулей L-функции Дирихле в критической полосе, а использует лишь теорему о границе нулей, принадлежащую В.Н. Чубарикову [6], доказательство которой элементарно.

Сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема. *При* $(l,D)=1$, $D = p_0^m \leqslant X^{\frac{3}{8}}e^{-(\ln\ln X)^2}$ *справедлива формула*

$$\pi(X,D,l) = \frac{\mathrm{Li}(X)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X}{\varphi(D)}e^{-\varkappa(\ln\ln X)^2}\right),$$

где $0 < \varkappa < 1$ *– константа.*

2. Вспомогательные результаты. Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Для любого неглавного характера* χ *по модулю* $D = p_0^m$ *справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{\nu\leqslant a}\chi(\nu)\right| \ll a^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{6}}\ln D\,.$$

Лемма 2. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$. Тогда выполняется оценка:*

$$\left|\sum_{\nu\leqslant a}\chi(\nu)\right| \ll a^{1-\frac{\gamma}{\rho^2}} ,$$

где $\rho = \frac{\ln D}{\ln a}$, $1 \leqslant \rho \leqslant 0,5m$, $0 < \gamma < 1$ – константа.

Лемма 3. *Пусть χ – произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$, $a \gg D^\eta$, $\eta > 0$ – константа. Справедлива оценка:*

$$\sum_{n\leqslant a}\mu(n)\chi(n) \ll ae^{-b(\ln\ln D)^2} ,$$

где $0 < b < \dfrac{1}{10}$ – константа.

2. Схема доказательства теоремы. Рассмотрим сумму

$$\psi(X,D,l) = \sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\equiv l \pmod D}}\Lambda(n) .$$

Используя свойство ортогональности характеров и выделяя слагаемое с χ_0, получим

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\equiv l \pmod D}}\Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\substack{n\leqslant X\\ (n,D)=1}}\Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\chi(n) .$$

Первая сумма справа даст нам главный член асимптотической формулы, а вторая – остаток R.

Применим формулу типа малого решета и разобьем R на $(\ln X)^{2k}$ сумм вида:

$$S = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{\substack{N_1<n_1\leqslant 2N_1\\ n_1\cdots n_{2k}\leqslant X}}\cdots\sum_{N_{2k}<n_{2k}\leqslant 2N_{2k}} c_1(n_1)\ldots c_{2k}(n_{2k})\chi(n_1\ldots n_{2k}),$$

где $c_j(n_j)$ – либо 1, либо $\ln n_j$, либо $\mu(n_j)$, $j = 1,\ldots,2k$. Если $c_j(n_j) = \mu(n_j)$, то $n_j \leqslant X^{1/K}$. Без ограничения общности, положим: $N_1 \geqslant N_2 \geqslant \ldots \geqslant N_{2k}$.

Будем оценивать сумму S сверху, сравнивая полученные оценки с величиной $\dfrac{X^{1-\varepsilon}}{\varphi(D)}$. Возможны следующие случаи.

1. Если $N_1 > X^{1-\varepsilon}D^{-1}$ (ε – произвольно малое число), то $c_1(n_1)$ равно либо 1, либо $\ln n_1$, и $N_2\ldots N_{2k} \leqslant DX^\varepsilon$. Применяя оценку Виноградова-Пойа, имеем:

$$S \ll \sqrt{D}N_2\ldots N_{2k}\ln^2 D \ll D^{3/2}X^{2\varepsilon} \leqslant \frac{X^{1-\varepsilon}}{\varphi(D)}$$

при $D \leqslant X^{\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\varepsilon}$. Следовательно, для этого случая утверждение теоремы выполняется.

2. Если $N_1 \leqslant X^{1-\varepsilon}D^{-1}$, то применим известный прием, позволяющий заменить суммирование по криволинейной области суммированием по прямоугольной области с приемлемой точностью. Получим суммы вида:

$$S_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{N<n\leqslant 2N} c(n)\chi(n) \sum_{U<u\leqslant 2U} a(u)\chi(u) \sum_{V<v\leqslant 2V} b(v)\chi(v),$$

где $|a(u)| \ll \tau_k(u)$, $|b(v)| \ll \tau_{k-1}(v)$, $c(n) = 1$, либо $\ln n$, либо $\mu(n)$, $UVN \leqslant X$. Это означает, что мы выделили наибольший промежуток суммирования N, а остальные – объединили в U и V таким образом, что выполняются неравенства $V \leqslant U \leqslant NV$.

Пусть $V > X^\varepsilon$. Тогда, применяя неравенство Коши, имеем:

$$S_1 \ll \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{N<n\leqslant 2N} c(n)\chi(n) \right| \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{U<u\leqslant 2U} a(u)\chi(u) \right|^2 \right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{V<v\leqslant 2V} b(v)\chi(v) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Заметим, что $\sigma_1 = \dfrac{1}{\varphi(D)} \displaystyle\sum_{\chi (\mathrm{mod}\ D)} \left| \sum_{U<u\leqslant 2U} a(u)\chi(u) \right|^2$ равняется числу решений сравнения

$$x_1x_2\ldots x_k \equiv x_1'x_2'\ldots x_k' \pmod D.$$

Число решений этого сравнения оценивается различным образом, в зависимости от длины промежутка суммирования U.

При $U \leqslant DX^\varepsilon$ мы оценим его следующим образом:

$$\sum_{U<u\leqslant 2U} \tau_k(u) \sum_{\substack{U<u'\leqslant 2U \\ u'\equiv u \pmod D}} \tau_k(u') \ll \sum_{U<u\leqslant 2U} u^{\varepsilon/10} \sum_{\frac{U-u}{D}<d\leqslant \frac{2U-u}{D}} (u+dD)^{\varepsilon/10} \ll \tag{4.1}$$

$$\ll X^{\varepsilon/5} \sum_{U<u\leqslant 2U} \left(\frac{U}{D} + 1 \right) \ll X^{\varepsilon/5} \left(\frac{U^2}{D} + U \right).$$

Если же $U > DX^\varepsilon$, то поскольку промежуток суммирования по u – длинный, мы можем для оценки внутренней суммы в (4.1) применить лемму А.И. Виноградова и Ю.В. Линника [1, с. 30], а для оценки внешней суммы – ту же лемму, положив в ней $D = 1$. В результате, получим:

$$\sigma_1 \ll \left(\frac{U^2}{D} + U \right) (\ln U)^{2A(k)},$$

$A(k)$ – положительная константа, зависящая от k.

Аналогично оценивается сумма $\dfrac{1}{\varphi(D)}\sum\limits_{\chi(\mathrm{mod}\ D)}\left|\sum\limits_{V<v\leqslant 2V} b(v)\chi(v)\right|^2$. Следовательно, для остатка R имеем оценку:

$$R \ll (\ln X)^{4K}\max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{N<n\leqslant 2N} c(n)\chi(n)\right|\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{D}}+\sqrt{V}\right).$$

Далее оценка суммы $\sum\limits_{N<n\leqslant 2N} c(n)\chi(n)$ зависит от коэффициентов $c(n)$. И здесь заключается основное отличие нашего доказательства от доказательства теоремы работы [4].

Если $c(n)=1$, либо $\ln n$, то мы имеем сумму значений характера и, аналогично схеме статьи [4], оценивая соответствующую сумму согласно лемме 1, получим:

$$\max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{N<n\leqslant 2N}\chi(n)\right|\left(\frac{U\sqrt{V}+\sqrt{U}V}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right)(\ln X)^{4K} \ll$$
$$\ll \sqrt{N}D^{1/6}(\ln X)^{4K}\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right) \ll$$
$$\ll (\ln X)^{4K}\left(X^{3/4}D^{-1/3}+X^{1/2}D^{1/6}\right) \ll X^{3/4}D^{-1/3}(\ln X)^{4K}.$$

Более короткую сумму значений характера мы оценим согласно лемме 2:

$$\max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{N<n\leqslant 2N}\chi(n)\right|\frac{UV}{D}(\ln X)^{4K} \ll \frac{X^{1-\frac{\gamma}{9K^3}}}{D}.$$

Если же $c(n)=\mu(n)$, то мы имеем сумму $\sum\limits_{N<n\leqslant 2N}\mu(n)\chi(n)$, которую мы сводим к сумме значений характера по простым числам $\sum\limits_{N'<p\leqslant 2N'}\chi(p)$. Для оценки сумм такого вида применяется метод контурного интегрирования.

С помощью леммы 3, получим:

$$\max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{N<n\leqslant 2N}\mu(n)\chi(n)\right|\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}+\frac{UV}{D}\right)(\ln X)^{4K} \ll$$
$$\ll Ne^{-0{,}9b(\ln\ln X)^2}\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}+\frac{UV}{D}\right) \ll$$
$$\ll \frac{NUV}{D}e^{-0{,}9b(\ln\ln X)^2} \ll \frac{X}{D}e^{-0{,}9b(\ln\ln X)^2}.$$

Осталось заметить, что в случае $V \leqslant X^{\varepsilon}$, если $N \leqslant X^{1/K}$, то мы оцениваем сумму S_1 тривиально и приходим к утверждению теоремы. Если же $N > X^{1/K}$, то $c(n)$ равно либо 1, либо $\ln n$. Применяя к сумме значений характера оценку Виноградова-Пойа, а сумму по переменной u оценивая аналогично рассуждениям предыдущего случая, мы имеем оценку $R \ll \dfrac{X^{1-\varepsilon}}{\varphi(D)}$ уже при $D \leqslant X^{\frac{1}{2}-4\varepsilon}$.

Теперь утверждение теоремы получается преобразованием Абеля.

Литература

1. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах / Ю.В. Линник. – Издательство ЛГУ, 1961. — 208 с.
2. Постников А.Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. — 1955. — 19;1. — С.11-16.
3. Линник Ю.В., Барбан М.Б., Чудаков Н.Г. О простых числах в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа // Acta arithm. J. – 1964. — 9;4. – С.375-390.
4. Петечук М.М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью,равной степени простого нечетного числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. – 1979. – 43;4. – С.892-908.
5. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР. –1970. – 192;4. – С.724-727.
6. *Чубариков В.Н.* Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник Московского университета. – 1973. – 2. – С.46-52.

ON DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS IN ARITHMETIC PROGRESSION WITH PRIME-POWER DIFFERENCE

S.A. Gritsenko, M.V. Shevtsova

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia,
e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, shevtsova@bsu.edu.ru

Abstract. The problem of asymptotic formula for number of primes not exceeding X and lying in arithmetic progression with difference $D = p_0^n$ where $p_0 \geqslant 3$ is the fixed prime number and $D \leqslant X^{3/8}e^{-(\ln\ln X)^2}$ is studied.

Key words: arithmetic progression, primes, estimates.