УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ МОИСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ [8)]

В.А. Полунин, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: soldatov@bsu.edu.ru, polunin@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе получено новое интегральное представление общего решения системы Моисила-Теодореску в ограниченной области.

Ключевые слова: система Моисила-Теодореску, задача Римана-Гильберта, интеграл типа Коши, уравнение Фредгольма.

Пусть область $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью S. В этой области рассмотрим эллиптическую систему Моисила-Теодереску [1]

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0, \quad M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

для четырехкомпонентного вектора $u(x) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Напомним [1], что фундаментальным решением дифференциального оператора $M(\partial/\partial x)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ является матрица-функция $M^\top(x)/|x|^3$, где $\top$ – символ матричного транспонирования. Поэтому для непрерывной вектор-функции ψ, заданной на поверхности S, интеграл типа Коши

$$(I\psi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{M^\top(y-x)}{|y-x|^3} M[n(y)]\psi(y)ds_y, \quad x \notin S, \tag{2}$$

где ds_y – элемент площади на поверхности S и $n(y)$ – единичная внешняя (по отношению к области D) нормаль, определяет вне этой поверхности решение системы (1).

К оператору I в (2) можно применить результаты [2], согласно которым в предположении $S \in C^{1,\mu+0}$ он ограничен $C^\mu(S) \to C^\mu(\overline{D^\pm})$, где для единообразия введены обозначения $D^+ = D$, $D^- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, и для предельных значений

$$u^\pm(y_0) = \lim_{x \to y_0, x \in D^\pm} u(x)\,, \quad y_0 \in S\,,$$

функции $u = I\psi$ справедлив аналог формулы Сохоцкого—Племеля

$$u^\pm = \pm\psi + u^*, \tag{3}$$

[8]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракты № П19, № П693, № 02.740.11.0613)

где $u^* = I^*\psi$ определяется сингулярным интегралом

$$(I^*\psi)(y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{M^\top(y-y_0)}{|y-y_0|^3} M[n(y)]\psi(y)ds_y\,,$$

который понимается как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $S \cap \{|y-y_0| \geq \varepsilon\}$.

Для любого решения $u \in C(\overline{D})$ системы (1) справедлива формула Коши

$$2u(x) = (Iu^+)(x), \quad x \in D.$$

В частности, оператор I переводит класс $C^\mu(S)$ на все пространство $C^\mu(\overline{D})$ решений системы (1). Однако в представлении $u = I\psi$ плотность ψ определяется, конечно, неединственным образом. Ситуация здесь вполне аналогична с классическими интегралами типа Коши, определяющих аналитические функции, где согласно теореме Н.И. Мусхелишвили соответствующее представление единственно для вещественных плотностей. Аналогичная проблема для системы (1) тесно связана с задачей Римана-Гильберта

$$H(y)u^+(y) = f(y), \quad H(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

в классе $C(\overline{D}) \cap C^1(D)$.

Систему (1) по отношению к вектор-функции $u = (u_1, v)$, $v = (u_2, u_3, u_4)$, можно переписать в форме

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{rot} v + \operatorname{grad} u_1 = 0. \tag{5}$$

Соответственно, краевое условие (4) примет вид

$$u_1^+ = f_1\,, \quad v^+ n = f_2\,, \tag{6}$$

где f_j, $j = 1, 2$ означают компоненты вектор-функции f. Из соотношений (6), (7), в силу формулы Гаусса-Остроградского, следует, что условие ортогональности

$$\int_S f_2(y)ds_y = 0 \tag{7}$$

необходимо для разрешимости неоднородной задачи (4).

Задачу (4) ниже будем исследовать в классе $C^\mu(\overline{D})$. Для ее решения рассмотрим интегральный оператор $I_0\varphi = I(H^\top\varphi)$ с 2- вектор-функцией $\varphi(y) = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^\mu(S)$. С учетом (3) подстановка $u = I_0\varphi$ в (4) приводит к системе интегральных уравнений

$$HH^\top\varphi + HI^*(H^\top\varphi) = f$$

для неизвестной плотности φ. Легко видеть, что $HH^\top = 1$, и, следовательно, эта система примет вид

$$\varphi + K\varphi = f\,, \tag{8}$$

где интегральный оператор

$$(K\varphi)(y_0) = \int_S k(y_0, y)\varphi(y)ds_y\,, \quad y_0 \in S$$

определяется матричным ядром

$$k(y_0, y) = \frac{H(y_0)}{2\pi|y - y_0|^3} M^\top(y - y_0)M[n(y)]H^\top(y)\,.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$H(y_0)M^\top(\xi)M[n(y)]H^\top(y) = \begin{pmatrix} n(y)\xi & 0 \\ n(y)[\xi, n(y_0)] & n(y_0)\xi \end{pmatrix},$$

где квадратные скобки означают векторное произведение, а произведение без скобок – скалярное. Поэтому в явном виде

$$k(y_0, y) = \frac{1}{2\pi|y - y_0|^3} \begin{pmatrix} n(y)(y - y_0) & 0 \\ n(y)[y - y_0, n(y_0)] & n(y_0)(y - y_0) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Можно показать, что в принятом предположении $S \in C^{1,\mu+0}$ это ядро имеет слабую особенность. Более точно, справедливо следующее предложение.

Лемма 1. *Пусть $S \in C^{1,\mu}$, $0 < \mu < 1$. Тогда функция*

$$k_0(y_0, y) = |y - y_0|^2 k(y_0, y) \in C^\mu(S \times S)\,, \quad k_0(y, y) \equiv 0\,.$$

□ Утверждение леммы достаточно установить локально, т.е. для каждой точки $a \in S$ найдется такая ее окрестность $a \in \Gamma \subseteq S$, что $k^0 \in C^\mu(\Gamma \times \Gamma)$. Не ограничивая общности можно считать, что Γ гомеоморфна замкнутой плоской выпуклой области $G \subseteq \mathbb{R}^2$, причем гомеоморфизм $f:\ G \to \Gamma$ устанавливает гладкая параметризация класса $C^{1,\mu+0}(G)$. Таким образом, по определению параметризации частные производные $\partial f/\partial s_j$, $j = 1, 2$, вектор- функции $y = f(s)$ линейно независимы в каждой точке $s = (s_1, s_2) \in G$. Нетрудно убедиться [2], что в этом случае отображение f липшицево, т.е. найдутся такие положительные постоянные m и M, что выполнена двусторонняя оценка

$$m|s - s_0| \leqslant |f(s) - f(s_0)| \leqslant M|s - s_0|\,. \tag{10}$$

В частности, условие $k_0 \in C^\mu(\Gamma \times \Gamma)$ равносильно

$$k^0(s, s_0) = k_0[f(s), f(s_0)] \in C^\mu(G \times G)\,.$$

Доказательство последнего включения проведем по отношению к первому элементу k^0_{11} матрицы k^0, для остальных элементов рассуждения аналогичны. Согласно (9), (10) имеем:

$$k^0_{11}(s, s_0) = \frac{1}{2\pi} n[f(s)]\omega(s, s_0)\,, \quad \omega(s, s_0) = \frac{f(s) - f(s_0)}{|f(s) - f(s_0)|}\,.$$

Поскольку единичная нормаль

$$n[f(s)] = \frac{[p_1(s), p_2(s)]}{|[p_1(s), p_2(s)]|}\,, \qquad p_j = \frac{\partial f}{\partial s_j}\,,$$

и функция $|[p_1(s), p_2(s)]| \in C^\mu(G\times G)$, достаточно убедиться, что смешанное произведение

$$(p_1, p_2, \omega) = [p_1, p_2]\omega \in C^\mu(G\times G)\,. \tag{11}$$

Поскольку область G является выпуклой, можем записать

$$f(s) - f(s_0) = g_1(s, s_0)(s-s_0)_1 + g_2(s, s_0)(s-s_0)_2\,,$$

где

$$g_k(s, s_0) = \int_0^1 p_k[s_0 + u(s-s_0)]\,du \in C^\mu(G\times G)$$

и $(s-s_0)_j$ означает j-ю компоненту вектора $(s-s_0)$. Поэтому смешанное произведение $v = (p_1, p_2, \omega)$ можно переписать в виде

$$v(s, s_0) = \frac{h_1(s, s_0)(s-s_0)_1 + h_2(s, s_0)(s-s_0)_2}{|f(s)-f(s_0)|}\,,$$

где $h_k = (p_1, p_2, g_k)$. Очевидно, $h_k \in C^\mu(G\times G)$ и $h_k(s,s) = 0$. Последнее свойство вытекает из того, что $g_k(s,s) = p_k(s)$.

Далее зафиксируем $s_0\in G$ и в области $E = \{s - s_0, s\in G\}$ рассмотрим функции

$$a_k(t) = h_k(t+s_0, s_0)\,, \qquad q(t) = f(t+s_0) - f(s_0)\,.$$

Тогда для функции $w(t) = v(t+s_0, s_0)$ имеем выражение

$$w(t) = \frac{a_1(t)t_1 + a_2(t)t_2}{|q(t)|}\,.$$

и неравенство (10) приводит к оценкам

$$|q(t)| \geqslant m|t|\,, \qquad |q(t_1) - q(t_2)| \leqslant M|t_1 - t_2|\,. \tag{12}$$

Утверждается, что в этих обозначениях для полунормы Гельдера функции w справедлива оценка

$$[w]_\mu = \sup_{t\neq t'} \frac{|w(t) - w(t')|}{|t-t'|^\mu} \leqslant C[a]_\mu \tag{13}$$

с некоторой постоянной $C > 0$, зависящей только от m, M. Для доказательства рассмотрим вектор-функцию $\varphi(t) = t/|q(t)|$ на $E\setminus 0$ и покажем, что

$$\Delta = |t|^\mu \frac{|\varphi(t) - \varphi(t')|}{|t-t'|^\mu} \leqslant 4\left(\frac{1}{m} + \frac{M}{m^2}\right)\,, \qquad t\neq t'\neq 0\,. \tag{14}$$

Действительно, пусть сначала $|t|/2 \leqslant |t'| \leqslant 2|t|$, тогда $|t-t'|/|t| \leqslant 3$. С учетом (12) имеем

$$\Delta = |t|^\mu \frac{|t|q(t')| - t'|q(t)||}{|t-t'|^\mu |q(t)||q(t')|} \leqslant |t|^\mu \left[\frac{|t-t'|^{1-\mu}}{|q(t)|} + \frac{|t'||q(t)-q(t')|}{|t-t'|^\mu |q(t)||q(t')|}\right] \leqslant 3\left(\frac{1}{m} + \frac{M}{m^2}\right).$$

Если $2|t'| \leqslant |t|$ или $2|t| \leqslant |t'|$, то

$$\frac{|t|}{|t-t'|} \leqslant \frac{|t|}{||t|-|t'||} \leqslant 2\,,$$

и, следовательно,

$$\Delta \leqslant \frac{|t|^\mu}{|t-t'|^\mu}(|\varphi(t)| + |\varphi(t')|) \leqslant \frac{2^{\mu+1}}{m}\,,$$

где учтено, что $|\varphi(t)| \leqslant 1/m$. Обьединяя оба случая, приходим к справедливости (14).

Обратимся к выводу оценки (13). Записывая $w = a\varphi$, $a = (a_1, a_2)$, с учетом (12) имеем:

$$\frac{|w(t)-w(t')|}{|t-t'|^\mu} \leqslant \frac{|a(t)-a(t')||\varphi(t')|}{|t-t'|^\mu} + \frac{|a(t)||\varphi(t)-\varphi(t')|}{|t-t'|^\mu} \leqslant \frac{[a]_\mu}{m} + [a]_\mu \Delta\,.$$

Совместно с (14) отсюда следует (13) с постоянной $C = (5m+4M)/m^2$.

Вспоминая определение w, имеем, таким образом, оценку

$$\frac{|k^0(s,s_0) - k^0(s',s_0)|}{|s-s_0|^\mu} \leqslant C[a]_\mu\,, \qquad a = (a_1, a_2)\,.$$

где C зависит только от m, M. Аналогично убеждаемся, что и

$$\frac{|k^0(s,s_0) - k^0(s,s_0')|}{|s-s_0|^\mu} \leqslant C[a]_\mu\,.$$

Обе эти оценки завершают доказательство леммы. ■

Теорема 1. *Для системы (1) в односвязной области D с границей $S \in C^{2,+0}$ задача (4) однозначно разрешима, причем условие ортогональности (7) необходимо и достаточно для ее разрешимости в классе $C^\mu(\overline{D})$.*

□ Пусть $u = (u_1, v)$, $v = (u_2, u_3, u_4)$, есть решение однородной задачи (4). В силу (6) это решение удовлетворяет условиям

$$u_1^+ = 0\,, \quad v^+ n = 0\,. \tag{15}$$

Поскольку $M(\xi)M^\top(\xi) = |\xi|^2$, компоненты этого решения являются гармоническими функциями. Тогда $u_1 = 0$ в области D и система (5) принимает вид

$$\operatorname{div} v = 0\,, \quad \operatorname{rot} v = 0\,. \tag{16}$$

Поскольку область D односвязна, в соответствии с формулой Стокса из (16) следует, что $v = \operatorname{grad} h$ для некоторой функции h. В силу первого равенства в (16) функция h

должна быть гармонической. По отношению к ней второе краевое условие в (15) переходит в условие Неймана, так что функция h должна быть постоянной и, следовательно, $v = 0$. В силу фредгольмовости задачи (4) последнее доказывает ее однозначную разрешимость.

Покажем теперь достаточность условия (7) для разрешимости задачи (4). Убедимся сначала, что пространство решений однородного уравнения (8) одномерно. Пусть $\varphi + K\varphi = 0$, тогда функция $u = I(H^\top\varphi)$, рассматриваемая в D, является решением однородной задачи (4), так что по свойству единственности $u = 0$.

Рассмотрим во внешней области $D_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ функцию $w = I(H^\top\varphi)$, которая, очевидно, имеет поведение

$$w(x) = O(|x|^{-2}) \quad \text{при} \quad |x| \to \infty\,. \tag{17}$$

Согласно (3) для нее имеем соотношение

$$-w^- = 2H^\top\varphi\,. \tag{18}$$

Рассмотрим на поверхности S односвязную область Γ с гладким краем $\partial\Gamma$. Так как по предположению $S \in C^{2,+0}$, на Γ можно выбрать пару неколлинеарных касательных векторов $p, q \in C^{1,+0}(\Gamma)$, которые определяют 2×4 - матрицу

$$G = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

умножение которой на матрицу $H^\top$ из (4) приводит к нулевой матрице. В силу соотношения (18) функция w, заданная в области D_1, удовлетворяет на Γ однородному краевому условию

$$Gw^- = 0\,. \tag{19}$$

Покажем, что матрица G удовлетворяет условию дополнительности [3]. А именно, пусть g^{kr} означает минор второго порядка, составленной из $k-$го и $r-$го столбцов матрицы G. В силу [3] это условие заключается в том, что вектор $s = (s_1, s_2, s_3)$ с компонентами

$$s_1 = g^{12} + g^{34}, \quad s_2 = g^{13} - g^{24}, \quad s_3 = g^{14} + g^{23},$$

не выходит в касательную плоскость всюду на S. Легко видеть, что в рассматриваемом случае $s = [p, q]$ и поэтому указанное условие выполнено.

Убедимся, что функция w непрерывно дифференцируема вплоть до $\Gamma \setminus \partial\Gamma$. С этой целью рассмотрим подобласть $D_0 \subset D_1$ с гладкой границей $\partial D_0 \in C^{2,+0}$, для которой $S \cap \partial D_0 = \Gamma$. При этом матрица–функция G продолжена с сохранением гладкости на ∂D_0 до матрицы G_0, удовлетворяющей условию дополнительности. Тогда сужение $w_0 = w\big|_{D_0}$ является решением задачи

$$G_0\left(w_0|_{\partial D_0}\right) = f_0$$

с правой частью $f_0 \in C^{\mu}(\partial D_0)$, обращающейся в нуль на Γ. Функцию w можно рассматривать как слабое решение и на основании теоремы о локальном повышении гладкости [4] отсюда заключаем, что $w \in C^{1,+0}(\overline{D_0'})$, где подобласть $D_0' \subseteq D_0$ такова, что пересечение $\partial D_0' \cap \partial D_0$ лежит строго внутри Γ.

Запишем $w = (u_1, v)$, тогда краевое условие (19) для системы (5) можно записать в форме равенства нулю скалярных произведений

$$v^- p = v^- q = 0 \tag{20}$$

на границе S области D_1.

Рассуждения, аналогичные использованным выше показывают, что $u_1 = 0$ в D_1. Действительно, по теореме Стокса

$$\int_\Gamma (\operatorname{rot} v)^-(x) n(x) ds_x = \int_{\partial\Gamma} v^-(y) e(y) dy\,,$$

где $e(y)$ есть единичный касательный вектор к контуру $\partial\Gamma$, ориентированный положительно по отношению к n (т.е. обход этого контура, если смотреть из конца вектора n, осуществляется против часовой стрелки). В соответствии с (20) вектор v^- пропорционален n на Γ и, следовательно, подинтегральное выражение в правой части последнего равенства обращается в нуль. С учетом (5) последнее равенство примет вид

$$\int_\Gamma \frac{\partial u_1^-}{\partial n} ds_x = 0\,.$$

Так как оно верно для любой односвязной области Γ поверхности S, отсюда заключаем, что нормальная производная

$$\frac{\partial u_1^-}{\partial n} = 0\,.$$

Поскольку гармоническая функция u_1, представляющая собой первую компоненту вектора $I(H^\top \varphi)$, исчезает на бесконечности, отсюда $u_1 = 0$ в D_1.

Таким образом, система (5) переходит в (16). Хотя область D_1 не является односвязной, однако с учетом (17) можем воспользоваться теми же рассуждениями, которые использовались выше, и функцию v представить в виде $v = \operatorname{grad} h$ с некоторой гармонической функцией, исчезающей на бесконечности. Краевое условие (20) переходит в

$$\frac{\partial h^-}{\partial p} = \frac{\partial h^-}{\partial q} = 0\,,$$

Эти соотношения равносильны тому, что h^- постоянна на поверхности S. Существует единственная гармоническая функция $h_0 \in C^2(\overline{D_1})$, которая исчезает на бесконечности и граничное значение h_0^- которой тождественно равно 1 на S. Поэтому $h = \lambda h_0$ с некоторым $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким образом, $w = (0, \lambda \operatorname{grad} h_0)$ и (18) принимает вид

$$-(0, \lambda \operatorname{grad} h_0)^- = 2(\varphi_1, \varphi_2 n)\,,$$

откуда $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \lambda\psi$ с функцией

$$\psi = -(\operatorname{grad} h_0)^- n = -\frac{\partial h_0^-}{\partial n}\,. \tag{21}$$

Верно и обратное, функция φ этого типа принадлежит ядру оператора I_0, где $I_0\varphi = I(H^\top\varphi)$ и, значит, является решением однородного уравнения (8).

По теореме Рисса оператор $1+K$ фредгольмов индекса нуль, так что коразмерность его образа равна 1. В частности, условие ортогональности (7) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения (8). ■

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 любое решение $u \in C^\mu(\overline{D})$ системы (1) единственным образом представимо в виде $u = I(H^\top\varphi)$ с некоторой вектор-функцией $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^\mu(S)$, удовлетворяющей условию*

$$\int_S \varphi_2\psi ds_y = 0\,,$$

где ψ фигурирует в (21).

□ Пусть теперь решение $u \in C^\mu(\overline{D})$ системы (1) задано и $\varphi \in C^\mu(S)$ есть решение уравнения (8) с правой частью $f = Hu^+$. Тогда разность $u - I(H^\top\varphi)$ является решением однородной задачи (4) и, следовательно, эта разность равна нулю, что завершает доказательство теоремы. *blacksquare*

На основании теоремы 2 для заданных 2×4 - матрицы $B(y) \in C^\mu(S)$ и 2 - вектор-функции $f(y) \in C^\mu(S)$ рассмотрим вопрос о редукции общей задачи Римана-Гильберта

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0\,, \qquad B(y)u^+(y) = f(y), \qquad y \in S\,, \tag{22}$$

к системе сингулярных интегральных уравнений на границе S области D. Для этого воспользуемся формулой (3), подстановка которой в (22) приводит к системе сингулярных интегральных уравнений

$$G(y_0)\varphi(y_0) + \int_S Q(y_0, y; y-y_0)\varphi(y)ds_y = f(y_0)\,, \quad \int_S \varphi_2\psi\, ds_y = 0\,, \tag{23}$$

где $G(y_0) = (BH^\top)(y_0)$ и

$$Q(y_0, y; \xi) = \frac{1}{2\pi}|y-y_0|^{-3}B(y_0)M^\top(\xi)M(n(y))H^\top(y)\,.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$M^\top(\xi)M(n)H^\top = \begin{pmatrix} n\xi & 0 \\ [n,\xi]_1 & \xi_1 \\ [n,\xi]_2 & \xi_2 \\ [n,\xi]_3 & \xi_3 \end{pmatrix},$$

где $[n, \xi]_k$ – компоненты векторного произведения $[n, \xi]$. Для дальнейшего удобно матрицу $B = (B_{ij})$ задачи (22) рассматривать в виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & e_1 \\ B_{21} & e_2 \end{pmatrix}, \qquad e_k = (B_{k2}, B_{k3}, B_{k4}).$$

С учетом этих обозначений имеем

$$G = \begin{pmatrix} B_{11} & e_1 n \\ B_{21} & e_2 n \end{pmatrix},$$

$$Q(y_0, y; \xi) = \frac{1}{2\pi|\xi|^3} \begin{pmatrix} B_{11}(y_0)n(y)\xi + e_1(y_0)[n(y), \xi] & e_1(y)\xi \\ B_{21}(y_0)n(y)\xi + e_2(y_0)[n(y), \xi] & e_2(y), \xi \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi|\xi|^3} \begin{pmatrix} B_{11}(y_0)\, n(y)\xi + [e_1(y_0), n(y)]\xi & e_1(y)\xi \\ B_{21}(y_0)\, n(y)\xi + [e_2(y_0), n(y)]\xi & e_2(y)\xi \end{pmatrix}.$$

Таким образом задача (22) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений (23). В частности, для задачи Шварца (22) с матрицей $B = H$ имеем аналогичную (23) систему, в которой

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(y_0, y; \xi) = \frac{1}{2\pi|\xi|^3} \begin{pmatrix} n(y)\xi & 0 \\ n(y_0)[n(y), \xi] & n(y_0)\xi \end{pmatrix}.$$

В этом случае ядро $Q(y_0, y; \xi)$ имеет слабую особенность и поэтому матричное уравнение (23) является фредгольмовым и однозначно разрешимым при выполнении условия ортогональности (7).

Литература

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / М.: Наука, 1972.

2. Полунин В.А., Солдатов А.П. Трехмерный аналог интеграла типа Коши // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47;3. – С.366-375.

3. Полунин В.А., Солдатов А.П. Задача Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску в ограниченной области // Неклассические уравнения математической физики / Сб. науч. работ. – Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2010.

4. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. – М.: Наука, 1991.

ON INTEGRAL REPRESENTATION OF MOISIL-TEODORESKU's SYSTEM SOLUTIONS

V.A. Polunin, A.P. Soldatov

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: soldatov@bsu.edu.ru, polunin@bsu.edu.ru

Abstract. The new integral representation of general solution of the Moisil-Teodorescu system in bounded domain is performed.

Key words: Moisil-Teodorescu's system, Riemann-Gilbert's problem, Cauchy's type integral, Fredholm's integral equation.