УДК 511.3

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Е. Коротков, О.А.Матвеева

Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410026, Россия, e-mail:korotkovae@info.sgu.ru

Аннотация. В работе приводится численный алгоритм, который позволяет достаточно быстро определить в полуплоскости $\sigma > 1/2$ нули целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: ряд Дирихле, L-функции Дирихле, функциональное уравнение.

В работе [1] показано, что важную роль при решении проблемы о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана играет ответ на следующий вопрос: существуют ли в полуплоскости $\sigma > 1/2$ общие нули целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Особый интерес, в связи с этой задачей, представляют ряды Дирихле, являющиеся линейной комбинацией L-функций Дирихле с первообразными характерами одного и того же модуля. Как показано в [2] такие ряды Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана и, как будет видно ниже, имеют бесконечное число нулей в полуплоскости $\sigma > 1/2$. Поэтому положительный ответ на поставленный выше вопрос позволяет сделать важные выводы о зависимости расширенной гипотезы Римана от основной гипотезы, и о том, что условие удовлетворения функциональному уравнению типа Римана не накладывает существенных ограничений на нули таких функций.

В данной работе приводится достаточно простой алгоритм вычислительной схемы, позволяющий определять в полуплоскости $\sigma > 1/2$ нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

1. О нулях целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами

Приведем известные факты, связанные с аналитическими свойствами целых функций, заданных рядами Дирихле с конечнозначными коэффициентами, которые влияют на расположение нулей таких функций.

В работе [3] показано, что ряды Дирихле с конечнозначными, мультипликативными коэффициентами, которые определяют целые функции и удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана, являются L-функциями Дирихле.

В случае немультипликативных коэффициентов условие подчинения функциональному уравнению типа Римана не накладывает сильных ограничений на расположение нулей даже в случае периодических коэффициентов. Как уже отмечалось во введении, ряды Дирихле, которые являются линейной комбинацией L-функций Дирихле с различными первообразными характерами данного модуля удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана. В [4, гл. IV, § 5] доказано следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть* χ_1 *и* χ_2 *неэквивалентные характеры Дирихле. Тогда функция*

$$f(s) = c_1 L(s,\chi_1) + c_2 L(s,\chi_2), \qquad s = \sigma + it,$$

где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $L(s,\chi_1)$, $L(s,\chi_2)$ – L*-функции Дирихле, имеет в полосе* $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, *где* $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, *бесконечно много нулей.*

К сожалению, авторы не смогли, исходя из приведенных выше фактов, ответить на следующий вопрос: для любого ли нуля z_0, $\operatorname{Re} z_0 > 1/2$, целой функции, заданной рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, существует целая функция, заданная рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, не равная нулю в точке z_0. Как уже отмечалось выше ответ на этот вопрос связан с проблемой о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана.

Ниже приводится численная схема определения нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, применение которой позволяет сделать предположение относительно ответа на поставленный вопрос.

2. О приближении полиномами Дирихле целых функций, определяемых в полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ рядами Дирихле с периодическими коэффициентами

Как показано в работе [5], целая функция $f(s)$, определяемая рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

с периодическими коэффициентами, допускает в полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ приближение полиномами Дирихле

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(n)}}{k^s} \tag{2}$$

с той же скоростью, с какой функция $g(x)$, заданная степенным рядом

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \tag{3}$$

с теми же коэффициентами a_k, что и ряд Дирихле (1), допускает на отрезке $[0;1]$ приближение алгебраическими полиномами

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} x^k . \tag{4}$$

При этом полиномы Дирихле вида (2) имеют те же коэффициенты, что и алгебраические полиномы вида (4).

Легко видно, что для целых функций вида (1) в случае периодических коэффициентов a_n степенной ряд (3) определяет рациональную функцию

$$g(x) = \frac{\widetilde{P}_{d-1}(x)}{1 + x + \ldots + x^{d-1}}, \tag{5}$$

где d – период для a_k.

Полюсы функции $g(z)$, как функции комплексного переменного, лежат на единичной окружности, и эта функция регулярна в точке $z = 1$. В нашем случае, функцию $g(z)$ будем считать регулярной и в точке $z = -1$.

Пусть D_{ρ_0} обозначает область, ограниченную эллипсом, фокусы которого находятся в точках ± 1 и сумма полуосей которого равна ρ_0. Кроме того, функция $g(z)$ регулярна внутри области D_{ρ_0} и имеет хотя бы один полюс на границе этой области.

Пусть в этом случае $E_n(g)$ обозначает величину наилучшего приближения функции (5) на отрезке $[-1;1]$ алгебраическими полиномами, степени которых не превосходят n. Тогда теорема Бернштейна [6] утверждает что величина $E_n(g)$ ведет себя следующим образом

$$E_n(g) = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{6}$$

для любого $\rho:\ 1 < \rho < \rho_0$.

Как показано в [6], оценка (6) имеет место и в случае приближения функции $g(x)$ на отрезке $[-1;1]$ алгебраическими полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k, \tag{7}$$

где

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \qquad x \in [-1;1]$$

– разложение функции $g(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева. Здесь

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} g(t)\, T_k(t)\, dt \tag{8}$$

при $k \geq 1$.

В силу сказанного выше имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ряд Дирихле (1) с периодическими коэффициентами определяет целую функцию. Тогда существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ вида (2), такая, что в любой полосе: $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ имеют место следующие оценки*

$$\| f(s) - Q_n(s) \| \leq \frac{C}{\rho^n},$$

где ρ – некоторая константа, большая единицы.

Заметим, что в качестве коэффициентов полиномов Дирихле $Q_n(s)$ можно взять коэффициенты алгебраических полиномов $P_n(x)$ вида (7).

3. Алгоритм и вычислительная схема определения в полуполосе $\sigma > \frac{1}{2}$ нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами

Пусть $f(z)$ – целая функция, определенная рядом Дирихле (1) с периодическими коэффициентами, и пусть $g(x)$ соответствующий степенной ряд (3).

Во-первых, определим вид рациональной функции $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{d} \sum_{m=0}^{\infty} a_{(md+k)} x^{md+k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{d} a_k x^k \sum_{m=0}^{\infty} x^{md} = (1 - x^d)^{-1} \sum_{k=1}^{d} a_k x^k = \frac{\widetilde{P}_{d-1}(x)}{1 + x + \ldots + x^{d-1}} . \qquad (9)$$

Во-вторых, определим коэффициенты c_k разложения (7) по формулам (8). При этом имеет смысл предварительно разложить рациональную дробь (9) в сумму простейших. Далее, находим коэффициенты $b_k^{(n)}$ полинома $P_n(x)$ (7). При этом полиномы Чебышева $T_k(x)$ определяем исходя из рекуррентного соотношения:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) , \qquad T_0 = 1, \qquad T_1 = x.$$

После этого выпишем полиномы Дирихле $Q_n(s)$ (2) и найдем комплексные нули таких полиномов. Известно [7], что в любой полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ нули полиномов $Q_n(s)$ с ростом n стремятся к нулям функции $f(s)$, и, так как полиномы $Q_n(s)$ сходятся к $f(s)$ с показательной скоростью, то будет наблюдаться достаточно быстрая сходимость нулей полиномов $Q_n(s)$.

Проиллюстрируем описанный выше алгоритм на отдельных примерах. Рассмотрим ряд со следующими коэффициентами:

$$a_i = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(3), \\ 1, & n \equiv 1(3), \\ -1, & n \equiv 2(3). \end{cases}$$

Нули полинома Дирихле, построенные для указанного ряда, располагаются на прямой $\sigma = 1/2$ тем больше, чем выше степень полинома. В силу симметричности нулей, нижнюю полуплоскость изображать не будем:

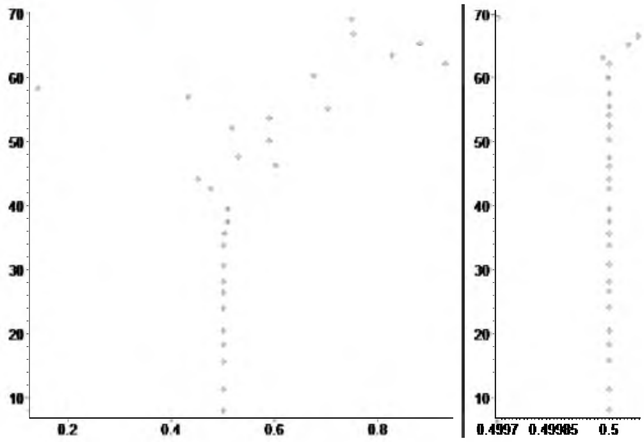

Рис. 1. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 57 и 112 степеней.

Аналогичная картина наблюдается для ряда с коэффициентами:

$$a_i = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(5), \\ 1, & n \equiv 1(5), \\ 1, & n \equiv 2(5), \\ -1, & n \equiv 3(5), \\ -1, & n \equiv 4(5). \end{cases}$$

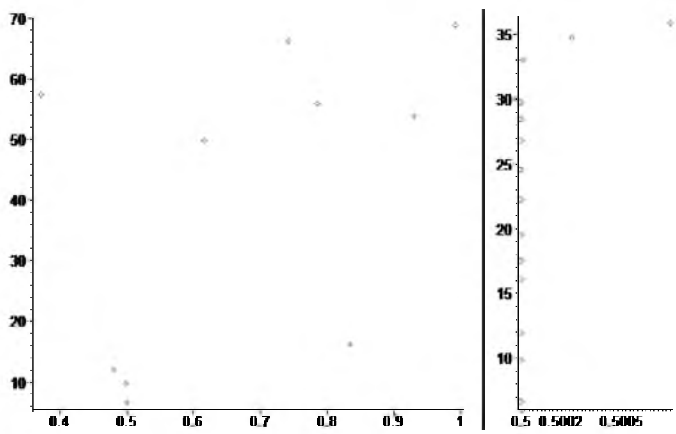

Рис. 2. Расположение нулей аппрокспмацпонных полиномов 28 и 83 степеней.

Но для ряда с периодическими, немультипликативными коэффициентами:

$$a_i = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(5), \\ 1, & n \equiv 1(5), \\ -1, & n \equiv 2(5), \\ 1/2, & n \equiv 3(5), \\ -1/2, & n \equiv 4(5), \end{cases}$$

нули к прямой $\sigma = 1/2$ не сходятся и в полосе $1/2 < \sigma < 1$ содержится большое их количество.

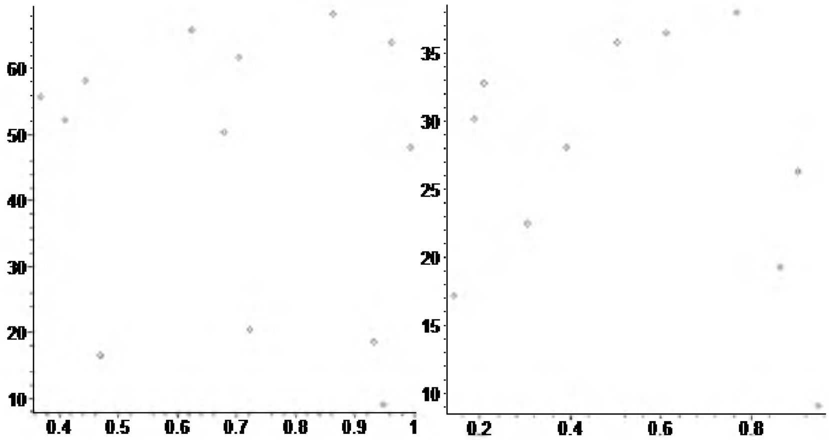

Рис. 3. Расположение нулей аппрокспмацпонных полиномов 27 и 67 степеней.

В результате численного эксперимента, основанного на приведенной здесь схеме, авторы показали, что в области $0 < \sigma < 1$, $|t| < 10^5$ нет общих нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, что позволяет предположить, что расширенная гипотеза Римана является следствием основной гипотезы.

Нужно отметить, что в численном эксперименте при $|t| < 10^5$ были задействованы только ряды Дирихле с периодами коэффициентов $d = 3$ и $d = 5$. Возможно, что таких рядов Дирихле будет достаточно, чтобы получить ответ на вопрос, поставленный в разделе 1 данной работы.

Представляет интерес и другой вопрос, возникший в процессе численного эксперимента, выяснить почему, и как это зависит от степени, нули аппроксимационных полиномов, в случае коэффициентов мультипликативного вида, с ростом степени этих полиномов до определенной величины $|t|$ располагаются на критической прямой?

Литература

1. Кузнецов В.Н., Полякова О.А. Расширенная гипотеза Римана и нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Чебышевский сборник: Науч.-теор. журн. – Тула, 2010. – 11;1. – С.188-199.

2. Кузнецов В.Н. К вопросу описания рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, определяющих целые функции и удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2011. – 11;3 (часть 1). – С.21–25.

3. Кривобок В.В. О рядах Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, удовлетворяющими функциональному уравнению римановского типа // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2007. – 7;1. – С.13-15.

4. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / С.М. Воронин. – М.: Физматлит, 1994. – 376 с.

5. Кузнецов, В.Н. Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента / Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам / Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов, 2003. – 2. – С.27-32.

6. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций / И.К. Даугавет. – Л.: ЛГУ, 1977.

7. Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш. – М.: Наука, 1980.

NUMERICAL ALGORITHM OF ZEROES CALCULATION OF ENTIRE FUNCTIONS DEFINED BY DIRICHLET'S SERIES WITH PERIODIC COEFFICIENTS

A.E. Korotkov, O.A. Matveeva

Saratov State University,
Astrakhanskaya, 83, Saratov, 410026, Russia, e-mail:korotkovae@info.sgu.ru

Abstract. It is given the numerical sufficiently fast algorithm that permit to calculate zeroes of entire functions which is in the semiplane $\sigma > 1/2$ and is defined by Dirichlet's series with periodic coefficients.

Key words: Dirichlet's series, Dirichlet's L-function, functional equation.