УДК 519.3

СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА

В.И. Коробов, О.А. Тарасова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua,
Tarasova_O@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе исследована стабилизация линейных автономных систем относительно подпространства и построены примеры стабилизирующих систем на основе критерия стабилизации систем относительно подпространства.

Ключевые слова: управляемая система, критерий Калмана, стабилизируемая система, критерий стабилизации.

1. Введение. За последние годы современная теория управления получила быстрое развитие, и теперь она по общему признанию является мощным практическим инструментом для решения задач в выборе управления объектами различной природы (движущимися объектами, химическими реакциями. В настоящее время основными чертами задач управления являются большая сложность объектов, а также высокие требования к точности и динамике управления. Так, например, развитие авиации и ракетно-космической техники обусловило постановку и необходимость решения принципиально новых проблем: управление многосвязными объектами, построение оптимальных систем стабилизации, управление системами при неполной информации. Это привело к интенсивной разработке и широкому практическому применению таких разделов теории, как оптимальное управление. В этой области проводились многочисленные исследования российскими и зарубежными авторами. Я отмечу работы: Красовского Н.Н. [1], Благодатского В.И., Скляра Г.М., Коробова В.И.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu\,, \tag{1}$$

где A, B – постоянные вещественные матрицы с размерамми $n\times n$ и $n\times r$, соответственно; x – вектор n-мерного пространства E_n; u – вектор r-мерного пространства E_r [2]. Нам понадобятся следующие определения.

Система (1) называется полностью управляемой за время T [3], если для любых точек x_0, $x_T \in R^n$ существует допустимое управление $u(t)$ такое, что траектория системы (1), начинающаяся в начальный момент времени $t_0 = 0$ в точке $x(0) = x_0$, оканчивается в момент времени в точке $x(T) = x_T$.

Критерий Калмана: *Автономная управляемая линейная система (1) в R^n управляема тогда и только тогда, когда ранг $(n \times nm)$-матрицы $[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$ равен n [4].*

Нулевое решение системы $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$, называется *устойчивым*, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, t \geqslant 0$.

Нулевое решение *асимптотически устойчиво*, если:

1) оно устойчиво,

2) $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Управляемая система

$$\dot{E} = f(x, u)\,, \qquad f(0,0) = 0 \tag{2}$$

называется *стабилизируемой*, если существует такое управление $u = u(x)$, что его нулевое решение системы $\dot{x} = f(x, u(x))$ асимптотически устойчиво.

Вопрос стабилизации в ноль хорошо изучен. Мы рассмотрим стабилизацию относительно подпространства.

Зададим подпространство G равенством $G = \{x : Hx = 0\}$, где H – постоянная матрица. Систему (1) назовем *стабилизируемой относительно подпространства* G, если существует такое линейно зависящее от x управление $u = Qx$ (Q – постоянная матрица размера $r \times n$), что $Hx(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, где $x(t)$ – любое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BQx\,.$$

Пусть L – подпространство, натянутое на вектор-столбцы, составляющие матрицу $(B, AB, ..., A^{n-1}B)$. При этом полагаем $L \neq R^n$, $R^n = L + L^{\perp}$. Так как L инвариантно относительно A, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно A^*. Введем в $L^{\perp}$ канонический базис из вещественных частей собственных и корневых векторов A^*.

Корневым вектором линейного преобразования A, действующим в пространстве L над полем K, для данного собственного значения $\lambda \in K$ называется такой ненулевой вектор $x \in L$, что для некоторого натурального числа m

$$(A - \lambda E)^m x = 0$$

Если число m является наименьшим из таких натуральных чисел (то есть $(A-\lambda E)^{m-1}x \neq 0$), то m называется высотой корневого вектора x. В частности, собственный вектор это корневой вектор высоты один. Тогда $L^{\perp}$ можно представить в виде $L^{\perp} = K^- + K^+$, где K^- – подпространство, определяемое вещественными частями корневых векторов матрицы A^* из $L^{\perp}$, отвечающих собственным значениям λ с $\mathrm{Re}\lambda < 0$, а K^+ – подпространство, определяемое вещественными частями корневых векторов матрицы A^* из $L^{\perp}$, отвечающих собственным значениям λ с $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$.

2. Критерий стабилизации системы относительно подпространства.

Лемма 1: *Для произвольных: вектора g^- [5], управления $u(x)$ и начального условия x_0, решение $x(t)$ системы* (1) *удовлетворяет соотношению*

$$(g^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \ .$$

Лемма 2: *Если $g^+ \neq 0$, то существует начальное условие x_0 такое что, решение $x(t)$ системы* (1) *с произвольным управлением $u(x)$ удовлетворяет соотношению $(g^+, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.*

Лемма 3: *Если система* (1) *стабилизируема относительно подпространства $\{x : (g,t) = 0\}$ и если вектор g ортогонален всем столбцам матрицы $(B, AB, ..., A^{j-1}B)$, то любое решение системы* (1) *со стабилизирующим управлением $u = Qx$ удовлетворяет соотношениям $(A^{*i}g, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ $(i = 0, 1, ..., j)$.*

Приведем критерий стабилизации системы относительно подпространства. Критерий изложен в теореме.

Теорема [5]: *Для стабилизируемости системы*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ необходимо и достаточно, чтобы либо $H^* \subset K^-$, либо существовали вектор c и неотрицательное число j такие, что $H^* \subset L\{c, A^*c, ..., A^{*j}c\} + K^-$, причем $\left(c, A^k b\right) = 0$ $(0 \leqslant k < j)$. $(c, A^j b) \neq 0$.

□ *Необходимость.* Предположим что, система (1) стабилизируема относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ управлением $u = Qx$. Если $H^* \subset K^-$, то необходимость доказана.

Пусть теперь $H^* \subset K^-$. Обозначим столбцы матрицы H^* через h_i. Рассмотрим полученные в соответствии с обозначением $g = g^- + g^M$ векторы h_i^M. Пусть q – максимальное число линейно независимых векторов системы $\left\{h_i^M\right\}$. Очевидно, $q \geqslant 1$. Не нарушая общности, будем считать, что векторы $h_1, ..., h_q$ линейно независимы и обозначим $H^{*(1)} = (h_1^M, h_2^M, ..., h_q^M)$.

Докажем, что существуют постоянные α_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$, не равные нулю одновременно и такие, что для некоторого $j \geqslant q - 1$ вектор $\tilde{c} = \sum_{i=1}^q \alpha_i h_i^M$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(\tilde{c}, b) = \sum_{i=1}^q \alpha_i (h_i^M, b) = 0 \ ,$$

$$(\tilde{c}, Ab) = \sum_{i=1}^q \alpha_i (h_i^M, Ab) = 0 \ , \tag{3}$$

....

$$(\tilde{c}, A^{j-1}b) = \sum_{i=1}^q \alpha_i (h_i^M, A^{j-1}b) = 0 \ .$$

$$(\tilde{c}, A^j b) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, A^j b) \neq 0 \ . \tag{4}$$

Действительно, при $j = q - 1$ система (3) имеет нетривиальное решение, как однородная линейная система $q - 1$ уравнений с q неизвестными, т.е. существует ненулевой вектор $\tilde{c}$, удовлетворяющий системе (4). Если при данном j удовлетворяется соотношение (4), то нужный вектор построен. В противном случае вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет системе (3) при $j = q$. Если соотношение (4) удовлетворяется, то вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет нужным требованиям при $j = q$. В противном случае снова увеличиваем j на единицу и повторяем рассуждения.

Докажем, что при некотором $j \leqslant n$ вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет соотношению (4). Предположим противное, т. е. вектор $\tilde{c}$ ортогонален $b, Ab, ..., A^{n-1}b$ и, следовательно, $\tilde{c} \in L^{\perp}$. При этом по построению $\tilde{c}^- = 0$. Таким образом, $\tilde{c} = \tilde{c}^+ \neq 0$. Поэтому по лемме 2 при произвольном управлении $u(x)$ найдется x_0 такое, что $(\tilde{c}, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Но

$$\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i, x(t) \right) = \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^M + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^-, x(t) \right) = (\tilde{c}, x(t)) + \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^-, x(t) \right) .$$

И так как второе слагаемое по лемме 1 стремится к нулю, то

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

при любом управлении $u(x)$, что противоречит стабилизируемости системы.

Итак, требуемый вектор $\tilde{c}$ построен. Возможны два случая:

1. $H^{*(1)} \subset L \left\{ \tilde{c}^M, (A^* \tilde{c})^M, ..., (A^{*j} \tilde{c})^M \right\}$.
2. $$H^{*(1)} \subset L \left\{ \tilde{c}^M, (A^* \tilde{c})^M, ..., (A^{*j} \tilde{c})^M \right\} \ . \tag{5}$$

В первом случае имеет место включение

$$H^* \subset L \left\{ \tilde{c}, A^* \tilde{c}, ..., A^{*j} \tilde{c} \right\} + K^-, \tag{6}$$

что докажет необходимость условия теоремы. Для доказательства этого включения, возьмем любой вектор h_i. Тогда

$$h_i^M \in L \left\{ \tilde{c}^M, (A^* \tilde{c})^M, ..., (A^{*j} \tilde{c})^M \right\} \ ,$$

то есть

$$h_i^M = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k} \tilde{c})^M \ .$$

Имеем

$$h_i = h_i^M + h_i^- = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^M + h_i^- =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c}) - \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^- + h_i^- \in L\left\{\tilde{c}, A^*\tilde{c}, ..., A^{*j}\tilde{c}\right\} + K^- .$$

Во втором случае рассмотрим матрицу $H^{*(2)} = \left(H^{*(1)}\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c}), ..., (A^{*j}\tilde{c})^M\right)$. Докажем, что ранг этой матрицы, который обозначим через q_2, больше или равен $q+1$. Для этого достаточно доказать, что $j+1$ векторов $\tilde{c}^M, ..., (A^{*j}\tilde{c})^M$ линейно независимы. Пусть

$$\sum_{k=0}^{j} \delta_k \left(A^{*k}\tilde{c}\right)^M = 0 .$$

Умножим это равенство скалярно на вектор b:

$$0 = \sum_{k=0}^{j} \delta_k ((A^{*k}\tilde{c})^M, b) = \sum_{k=0}^{j} \delta_k (A^{*k}\tilde{c}, b) - \sum_{k=0}^{j} \delta_k ((A^{*k}\tilde{c})^-, b).$$

Так как $(\left(A^{*k}\right)\tilde{c})^- \in L^\perp$, а $b \in L$, то

$$\sum_{k=0}^{j} \delta_k \left(A^{*k}\tilde{c}, b\right) = 0 .$$

Пользуясь (3), получаем $\delta_j \left(A^{*j}\tilde{c}, b\right) = 0$, а, используя (4), получаем $\delta_j = 0$.

Умножим равенство

$$\sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \left(A^{*k}\tilde{c}\right)^M = 0$$

на вектор Ab. Как и выше, получим

$$0 = \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k (\left(A^{*k}\tilde{c}\right)^M, Ab) = \sum_{k=0}^{j-1} (A^{*k}\tilde{c}, Ab)\delta_k = \delta_{j-1}(A^{*j}\tilde{c}, b) ,$$

откуда $\delta_{j-1} = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что все коэффициенты δ_k равны нулю.

Таким образом, в силу (5) ранг $H^{*(2)}$ больше или равен $j+2 \geqslant q+1$.

Докажем, что для любого столбца $h_i^{(2)}$ матрицы $H^{*(2)}$ и любого решения $x(t)$ системы (1) со стабилизирующим управлением $u = Qx(h_i^{(2)}, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. Для столбцов матрицы $H^{*(1)}$ это следует из условия стабилизируемости и леммы 1:

$$(h_i^{(1)}, x(t)) = (h_i^M, x(t)) = (h_i, x(t)) - (h_i^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 .$$

Таким образом, система (1) стабилизируема на подпространство $\{x : (\tilde{c}, x) = 0\}$ тем же управлением $u = Qx$. Следовательно, согласно лемме 3, $(A^{*k}c, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ $(k = 0, 1, ..., j)$. Окончательно имеем

$$((A^{*k}\tilde{c})^M, x(t)) = (A^{*k}\tilde{c})^M, x(t)) - ((A^{*k}\tilde{c})^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0\,.$$

Повторяя все рассуждения, относящиеся к матрице $H^{*(1)}$ применительно к матрице $H^{*(2)}$, получим, что либо при некотором векторе $\tilde{c}_2$ и числе j_2 выполнено соотношение $H^{*(2)} \subset L\{\tilde{c}_2^M, (A^*\tilde{c}_2)^M, ..., (A^{*j_2}\tilde{c}_2)^M\}$, т.е. $H^* \subset L\{\tilde{c}_2, A^*\tilde{c}_2, ..., A^{*j_2}\tilde{c}_2\} + K^-$, либо можно построить матрицу $H^{*(3)}$, ранг которой не меньше $q_2 + 1 \geqslant q + 2$:

$$H^{*(3)} = (H^{*(2)}, \tilde{c}_2^M, (A^*\tilde{c}_2)^M, ..., (A^{*j_2}\tilde{c}_2)^M).$$

Этот процесс построения матриц $H^{*(k)}$ с увеличивающимся рангом должен обязательно оборваться на соотношении типа (6), так как ранг любой системы n-мерных векторов не превышает n.

Достаточность. Пусть существует вектор c и число j такие, что

$$H^* \subset L\{c, A^*c, ..., A^{*j}c\} + K^-, (c, A^kb) = 0, (0 \leqslant k \leqslant j), (c, A^jb) \neq 0\,.$$

Введем переменные y_m $(1 \leqslant m \leqslant j+1)$ следующим образом: $y_m = (A^{*m-1}c, x) = (c, A^{m-1}x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 = &\quad (c, \dot{x}) = (c, Ax + bu) = (c, Ax) = y_2\,,\\
\dot{y}_2 = &\quad (c, A\dot{x}) = (c, A^2x + Abu) = (c, A^2x) = y\,,\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\dot{y}_j = &\quad (c, A^{j-1}\dot{x}) = (c, A^jx + A^{j-1}bu) = (c, A^jx) = y_{j+1}\,,\\
\dot{y}_{j+1} = &\quad (c, A^j\dot{x}) = (c, A^{j+1}x + A^jbu) = (c, A^{j+1}x) + (c, A^jb)u\,.
\end{aligned}$$

Выбирая

$$u = \frac{1}{(c, A^jb)}\left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m(c, A^{m-1}x)\right] =$$

$$= \frac{1}{(c, A^jb)}\left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m y_m\right]\,, \tag{7}$$

где положительные постоянные γ_m подобраны так, чтобы система

$$\dot{y}_1 = y_2, \qquad \dot{y}_2 = y_3, \qquad \ldots, \qquad \dot{y}_j = y_{j+1}, \qquad y_{j+1} = -\sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m y_m$$

имела только экспоненциально убывающие решения.

По предположению для любого i существуют постоянные γ_m и вектор $q_i^- \in K^-$ такие, что $h_i = \sum_{m=1}^{j+1} \beta_m^i A^{*m-1}c + g_i^-$. Поэтому при управлении задаваемой формулой (7) для любого решения системы (1) получим $(h_i, x(t)) = \sum_{m=1}^{j+1} \beta_m^i y_m(t) + (g_i^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ при любом начальном условии x_0. Действительно, первое слагаемое стремится к нулю по выбору управления $u(x)$, а стремление к нулю второго слагаемого вытекает из леммы 1.

Если $H^* \subset K^-$, то стабилизируемость системы (1) относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ также следует из леммы 1. ■

3. Алгоритм проверки возможности стабилизации системы. Приведем алгоритм, позволяющий проверить возможность стабилизации и, если стабилизация возможна, построить вектор c, найти число j и дать явный вид стабилизирующего управления $u = Qx$.

Пусть rank $H = l$. Напомним, что через h_i обозначены столбцы матрицы H^*, и, не нарушая общности, будем считать векторы $h_1, h_2, ..., h_l$ линейно независимыми [5]. В предлагаемый алгоритм состоит из ниже перечисленных шагов.

1. Находим базис K^-.

2. Вычисляем число $r = \text{rank}\,(Hb, HAb, ..., HA^{n-1}b)$. Рассмотрим систему уравнений относительно ω_i $(i = 1, 2, ..., l)$:

$$(\xi, b) = (\xi, Ab) = ... = (\xi, A^{n-1}b) = 0\,,$$

где $\xi = \sum_{i=1}^{l} \omega_i h_i$. Обозначим через $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{l-r}$ линейно независимые решения этой системы. Если хоть один из этих векторов не принадлежит K^-, то стабилизация относительно подпространства G невозможна.

3. Пусть все $\xi_j \in K^-$ (если при этом $r = 0$, то $H^* \subset K^-$ и возможна стабилизация при любом выборе управления $u(x)$, например при $u(x) \equiv 0$).

Дополним систему $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{l-r}$ векторами $h_{i_1}, h_{i_2}, ..., h_{i_r}$ до базиса в линейной оболочке $L\{h_1, ..., h_l\}$. Обозначим через $H^*_{(1)}$ матрицу $(h_{i_1}, h_{i_2}, ..., h_{i_r})$.

4. Рассмотрим систему уравнений относительно $a_1, a_2, ..., a_r$;

$$(c, b) = (c, Ab) = ... = (c, A^{j-1}b) = 0\,, \tag{8}$$

где

$$c = \sum_{k=1}^{r} a_k h_{i_k}\,,$$

а j таково, что ранг системы (8) равен $r - 1$, в то время как ранг системы, полученной из (8) заменой j на $j + 1$, равен r. При этом $j \geqslant r - 1$ и $(c, A^j b) \neq 0$.

5. Проверяем, выполнено ли включение

$$H^*_{(1)} \subset L\{c, A^*c, ..., A^{*j}c\} + K^-\,. \tag{9}$$

Если (9) имеет место, то стабилизация возможна. Для построения стабилизирующего управления выберем такие постоянные γ_i $(i = 1, 2, ..., j + 1)$, чтобы уравнение относительно $\mu\mu^{j+1} + \gamma_1\mu^j + ... + \gamma_{j+1} = 0$ имело все корни μ такие, что $\text{Re}\,\mu < 0$.

Управление $u(x)$ задаем формулой

$$u = \frac{1}{(c, A^j b)} \left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1} \gamma_m (c, A^{m-1}x) \right] . \tag{10}$$

6. Если включение (9) не имеет места, то строим матрицу $H^*_{(2)} = (H^*_{(1)}, c, A^*c, ..., A^{*j}c)$. Если число $r_2 = \text{rank}(H_{(2)}b, H_{(2)}Ab, ..., H_{(2)}A^{n-1}b)$ равно r, то стабилизация возможна.

Если же $r_2 \geqslant r+1$, то, заменяя H на $H_{(2)}$, переходим к п.2 и повторяем по порядку все дальнейшие построения. В силу того, что r_k (если данный процесс дойдет до построения матрицы $H_{(k)}$) не может неограниченно увеличиваться ($r \leqslant n$), то на некотором обращении к пунктам 2.-6. обнаружится невозможность стабилизации, или выполнится включение типа (9). В этом случае стабилизирующее управление определяется формулой (10).

Проиллюстрируем действие представленного алгоритма на примере. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u\,, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + u\,, \end{cases} \tag{11}$$

для которой

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицу $H = (2, 1)$. Тогда $\text{rank}\, H = l = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – столбец матрицы H^*.

1. Собственные значения матрицы $A^* - \lambda E$ равны ± 1 и им соответствуют собственные векторы (-1,1) и (-3,3). Тогда базис пространства K^- состоит из вектора $(-1, 1)$.

2. $r = \text{rank}\,(Hb, HAb) = \text{rank}\,(3, 3) = 1$.

Обозначим, $\xi = \omega_1 h_1$. Система уравнений относительно $\omega_1 : (\xi, b) = (\xi, Ab) = 0$ имеет вид $3\omega_1 = 0$, решение которой $\omega_1 = 0$.

3. Матрица $H^*_{(1)} = h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Обозначим $c = \alpha_1 h_1$.

Уравнение относительно α_1 : $(c, b) = 3\alpha_1 \neq 0$ выберем в виде $(c, b) = 3$, откуда $\alpha_1 = 1, c = h_1, j = 0$.

5. Так как $H^*_{(1)} \subset L(c, A^*c) + K^- = R^2$, то стабилизация возможна.

Для построения стабилизирующего управления выберем постоянные γ_1 так, чтобы уравнение относительно $\mu : \mu + \gamma_1 = 0$ имело корни μ, подчинённые условию $Re\mu < 0$. Пусть $\gamma_1 = 1$. Тогда управление имеет вид:

$$u(x) = \frac{1}{(c, b)} \left[-(c, Ax) - \gamma_1 (c, x) \right] = \frac{1}{3} (-9x_1 + 3x_2).$$

Следовательно, матрица Q имеет вид Q = (-3,1).

Подставим полученное управление в систему (11). Тогда система $\dot{x} = (A + bQ)x$ принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

общее решение которой:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 e^{-t}, \\ x_2 = x_2^0 e^{-t}, \end{cases}$$

где $x_1^0 = x_1(0)$, $x_2^0 = x_2(0)$. Тогда $Hx = e^{-t}(2x_1^0 + x_2^0) \to 0$ при $t \to \infty$.

Литература

1. Красовский Н.Н. О стабилизации динамических систем дополнительными силами // Дифференциальные уравнения. – 1965. – 1;1. – С.5-6.

2. Коробов В.И. Критерии управляемости линейной системы на подпространство // Вестник Харьковского университета. – 1981. – 221;46. – С.3.

3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление / В.И. Благодатских. – М: Высшая школа, 2001. – С.104-105.

4. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли. – М: Наука, 1972. – С.91-93.

5. Коробов В.И., Луценко А.В., Подольский Е.Н. Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства / – 1975. – С.117-122.

SYSTEM STABILIZATION RELATIVE TO SUBSPACE

V.I. Korobov, O.A. Tarasova

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua, Tarasova_O@bsu.edu.ru

Abstract. Stabilization of linear autonomous systems relative to subspace are investigated and some examples of stabilizing systems connected with the criterion of system stabilization relative to subspace are constructed.

Key words: controlled system, Kalman's criterion, stabilized system, stabilization criterion.