УДК 517.987

КОНЕЧНЫЕ КЛАСТЕРЫ НА ПЛОСКИХ МОЗАИКАХ
Часть II. Комбинаторное построение плоских графов [4)]

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Аннотация. Работа представляет собой продолжение первой части статьи, целью которой является доказательство комбинаторными методами теоремы Г.Кестена о том, что внешняя граница конечного кластера, расположенного в бесконечном плоском графе типа мозаики, является простым циклом на сопряжённом к ней графе. В этой части даётся комбинаторное определение плоского бесконечного графа на основе бесконечных последовательностей простых циклов, оснащённых несамопересекающимися путями.

Ключевые слова: плоский граф, мозаика, кластер, внешняя граница, цикл.

Настоящая работа является второй частью работы [1]. В связи с этим, мы используем без дополнительных пояснений все введенные в первой части понятия и обозначения. Кроме того, нумерация разделов и утверждений в этой части является продолжением нумераций первой части. Соответственно, ссылки в процессе изложения на утверждения из первой части даются без пояснений. Основной целью этой части работы является комбинаторное определение понятия плоского графа и доказательство его эквивалентности обычному понятию, вводимому погружения графа в $\mathbb{R}^2$. Разумеется, что в этом доказательстве используется теорема Жордана о непрерывных кривых на плоскости (см. лемма 7), обеспечивающая переход от обычного определения, использующего топологию плоскости, и эффективно используется понятие двойственного графа. Комбинаторное, независящее от погружения в $\mathbb{R}^2$ определение плоского графа вводится на основе специальной конструкции (GL-алгоритм), которая сопоставляет алгоритмическим образом плоскому графу последовательность простых циклов с отмеченными на них несамопересекающимися путями таким образом, что задание всякой такой последовательности определяет плоский граф.

5. Плоские графы и мозаики. В этом пункте мы рассматриваем только связные графы.

Далее для нас будет центральным понятие *плоского графа*. На содержательном геометрическом уровне граф G называется плоским, если, представив его вершины в виде различных точек плоскости, а соединяющие их рёбра в виде непрерывных несамопересекающихся кривых с концевыми точками в вершинах, которые они связывают, граф можно расположить в плоскости без пересечения рёбер. Это представление приводит к следующему определению.

Определение 4. *Конечный граф* $G = \langle V, \Phi \rangle$ *называется плоским, если существует гомеоморфное погружение* $\mathsf{F} : \mathsf{K}(G) \mapsto \mathbb{R}^2$ *многообразия* $\mathsf{K}(G)$ *в плоскость* $\mathbb{R}^2$.

Замечание. Обобщением введенного понятия плоского графа является понятие плоского графа рода $r \in \mathbb{N}_+$. Граф G будем называть плоским рода r, если найдётся

[4]Федеральная целевая программа Научно-образовательного центра "Управляемые электромагнитные процессы в конденсированных средах" (госконтракт № 02.740.11.0545)

непрерывная инъекция F в $\mathbb{R}^3$, при которой образ $\mathsf{F}(\mathsf{K}(G))$ можно разместить на ориентируемой поверхности S_r рода r и невозможно разместить на ориентируемой поверхности меньшего рода. С этой точки зрения данное выше определение плоских графов представляет плоские графы рода 0.

Пример. Граф $G = \langle V, \Phi \rangle$ с $V = \{\mathsf{e}_k; k = 1 \div 9\}$ и

$$\Phi = \big\{\{\mathsf{e}_k, \mathsf{e}_l\} : l = k \bmod 3;\ k, l = 1 \div 9\big\} \cup$$

$$\cup \Big\{\{\mathsf{e}_{3k+1}, \mathsf{e}_{3k+2}\}, \{\mathsf{e}_{3k+2}, \mathsf{e}_{3(k+1)}\}, \{\mathsf{e}_{3k+1}, \mathsf{e}_{3(k+1)}\};\ k = 1, 2, 3\Big\}$$

не является плоским. Однако он погружаем на поверхность тора, то есть является плоским графом рода 1.

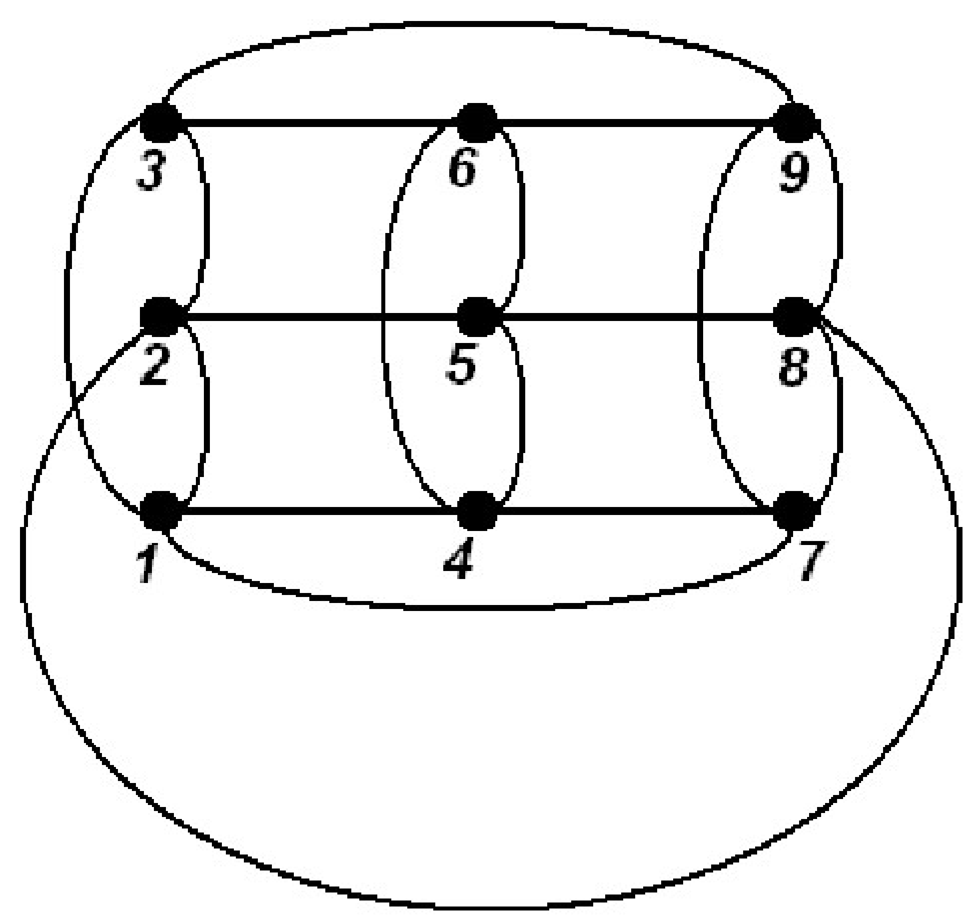

Рис. 1. Пример плоского графа рода 1.
Вершины занумерованы, согласно указанному множеству смежности.

Зафиксируем погружение F плоского графа G в плоскость. При этом погружении вершины графа – концевые точки векторов e_k, $k = 1 \div |V|$ из $\mathsf{K}(G)$ переходят в отмеченные точки на плоскости, а рёбра – в жордановы кривые конечного диаметра с концевыми точками в виде указанных отмеченных точек. При этом каждый цикл γ графа G переходит в жорданову замкнутую кривую $\mathsf{F}(\gamma)$ на $\mathbb{R}^2$ конечного диаметра, на котором расположены отмеченные точки – образы при погружении F вершин графа, входящих в состав цикла. Пересечение циклов может иметь место только в этих отмеченных точках. В последующих построениях мы будем оперировать только с этими замкнутыми жордановыми кривыми $\mathsf{F}(\gamma)$. Каждая такая кривая, согласно теореме К.Жордана, разбивает плоскость на две области (открытые) – внутреннюю D_γ конечного диаметра и внешнюю $\complement \bar{D}_\gamma$ бесконечную.

Среди всех возможных циклов γ на графе G выделим подмножество таких из них, которые не содержат внутри себя точек образа $\mathsf{F}(\mathsf{K}(G))$. Такие циклы, наверняка, найдутся. В самом деле, рассмотрим конечное множество границ областей, получаемых всевозможными пересечениями $D(\gamma_1) \cap ... \cap D(\gamma_n)$. Тогда для какого-то из таких пересечений окажется, что внутри него уже нет точек из $\mathsf{F}(\mathsf{K}(G))$. Поэтому его граница, получаемая из отдельных отрезков жордановых кривых $\mathsf{F}(\gamma_1), ..., \mathsf{F}(\gamma_n)$ с концевыми точками в виде образов вершин графа, представляет, тем самым, образ нужного нам цикла на графе G.

Определение 5. *Если цикл γ такой, что $D(\gamma)$ не содержит внутри себя точек $\mathsf{F}(\mathsf{K}(G))$, то область $D(\gamma)$ называется гранью (точнее, внутренней гранью) плоского графа.*

Рассмотрим множество $\complement\left[\left(\bigcup_\gamma D(\gamma)\right)\cup \mathsf{F}(\mathsf{K}(G))\right]$, где здесь и далее объединение производится по всем циклам на G. Эта открытая область называется *внешней* (бесконечной) гранью графа, которую мы будем обозначать посредством D_∞.

Заметим, что каждое ребро графа входит в состав границы ровно двух граней (с учётом бесконечной грани), а каждая вершина входит в состав числа граней, равного её индексу.

Рассмотрим цикл, который является границей области $\bigcup_\gamma D(\gamma)$. Все вершины и рёбра, образы которых входят в состав этой границы, а также вершины и рёбра, лежащие вне области $\bigcup_\gamma D(\gamma)$ (они не входят в состав циклов), называются *внешними*. Их отличительное свойство состоит в том, что из образа каждой такой вершины и каждой точки образа любого ребра найдётся жорданова кривая бесконечного диаметра, непересекающая $\mathsf{F}(\mathsf{K}(G))$. При этом, по построению, множества внешних вершин и рёбер не пусты (содержат не менее трёх элементов). Все остальные вершины и рёбра графа G, не являющиеся внешними, называются *внутренними*. Любая жорданова кривая бесконечного диаметра, начинающаяся в точках образов этих вершин и рёбер, обязательно пересекает $\mathsf{F}(\mathsf{K}(G))$.

Отметим, что распределение вершин и рёбер на внешние и внутренние зависит от выбора погружения F.

Если внутренняя грань плоского графа содержит внешнее ребро, то такую грань мы будем называть *граничной*.

Для доказательства простого утверждения относительно плоских графов, важного для определения GL-алгоритма, введём понятие *двойственного* графа к данному плоскому конечному графу $\tilde{G} = \langle \tilde{V}, \tilde{\Phi}\rangle$, не имеющему концевых вершин (см., например, [1]). Это понятие мы вводим посредством его явной конструкции. Она основана на конкретном погружении F плоского графа $G = \langle V, \Phi\rangle$ в плоскость $\mathbb{R}^2$ и сам конкретный вид двойственного графа зависит от этого погружения.

Зафиксируем погружение F плоского графа G и Γ_{F} – множество его граней. Построим множества $\tilde{V}$ и $\tilde{\Phi}$. Каждой грани $D \in \Gamma_{\mathsf{F}}$ сопоставим вершину $y(D)$. При этом бесконечной грани D_∞ также сопоставляется вершина $y(D_\infty)$. Таким образом множество $\tilde{V}$ состоит из всех вершин $y(D), D \in \Gamma_{\mathsf{F}}$. Границы $\gamma(D)$ каждой грани D разобьём на несамопересекающиеся пути γ_1, ..., γ_m так, что каждый из них либо составляет границу грани D с внутренней гранью D_i, либо является связанной частью границы грани D с бесконечной гранью D_∞. Каждому пути γ_i сопоставим ребро $\{y(D), y(D_i)\}$ в том числе, если D_i является бесконечной гранью. Все построенные рёбра $\{y(D), y(D')\}$ составляют множество $\tilde{\Phi}$.

Заметим, что сконструированный граф $\tilde{G}$, двойственный к плоскому графу G, также является плоским. Граничные грани графа G переходят в вершины двойственного графа, которые смежны с $y(D_\infty)$. По этой причине, введём также в рассмотрение граф $\tilde{G}'$, который получается из двойственного графа удалением вершины $y(D_\infty)$ вместе со всеми инцидентными ей рёбрами. Тогда каждая вершина сочленения и каждая концевая вершина графа $\tilde{G}'$ соответствуют граничным граням исходного графа G, причём, если это вершина сочленения, то в каждом из подграфов, на которые распадается граф $\tilde{G}'$ при разрезании по ней, имеется вершина $y(D)$, для которой соответствующая ей грань D является граничной у G.

Наконец, отметим, что если индекс каждой вершины графа G больше 2, то двойственный ему граф не имеет концевых вершин и, кроме того, соответствие между графом G и двойственным ему $\tilde{G}$ взаимно однозначно.

Лемма 7. *Среди всех граничных граней плоского графа $G = \langle V, \Phi \rangle$ существует, по крайней мере, две таких, что каждая из них может быть получена операцией разрезания по несамопересекающемуся пути, входящему в состав её границы.*

$\square$ Зафиксируем погружение F графа G в $\mathbb{R}^2$. На основе погружения F построим граф $\tilde{G}'$, соответствующий графу G.

Пусть граничная грань $D(\gamma)$ графа G не может быть отделена от G операцией разрезания этого графа по несамопересекающемуся пути. Это означает, что из множества рёбер Φ_γ её границы тех, которые являются общими с границами других внутренних граней графа, можно выделить, по крайней мере, два подмножества, которые являются несвязанными друг с другом несамопересекающимися путями γ_1 и γ_2. Это возможно в том случае, если между этими путями находятся рёбра, границы γ, которые являются внешними рёбрами графа. Возьмём по одному ребру из двух таких множеств и на них по одной вершине. Обозначим их y_1 и y_2. Эти вершины входят в состав границы грани $D(\gamma)$. Из каждой вершины y_i, $i = 1, 2$ имеется жорданова кривая на бесконечность, полностью расположенная в грани D_∞. Обозначим эти кривые σ_1 и σ_2, соответственно. Составим теперь бесконечную кривую из последовательного прохождения кривой σ_1 из бесконечности в вершину y_1, из вершины y_1 в вершину y_2 вдоль какой-то из частей границы грани $D(\gamma)$ и из вершины y_2 по кривой σ_2 на бесконечность. Построенная бесконечная в обе стороны кривая разделяет плоскость на две несвязанные открытые части так, что каждая из них содержит подграф плоского графа G. (Заметим, что это утверждение использует теорему Жордана о плоских кривых, так как построенную бесконечную кривую можно заменить на замкнутую жорданову кривую, окружающую одну из частей графа G.) Следовательно, вырезание грани $D(\gamma)$ из G по её границе приводит к развалу графа G на две несвязанные части. Поэтому вершина $y(D(\gamma))$ на двойственном графе, соответствующая грани $D(\gamma)$, должна быть вершиной сочленения, так как вырезанию грани $D(\gamma)$ по её границе соответствует вырезание вершины $y(D(\gamma))$ вместе со всеми инцидентными ей рёбрами на двойственном графе и такое вырезание приведёт к распаду двойственного графа, по меньшей мере, на две несвязанные части.

Рассмотрим множество $\mathfrak{B}(G)$ всех граничных граней D плоского графа G. Каждому элементу этого множества сопоставляется вершина $y(D)$ двойственного графа, которые составляют множество $\tilde{\mathfrak{B}}(G)$. Обозначим посредством $\tilde{\mathfrak{C}}(G)$ множество точек сочленения графа $\tilde{G}'$. Согласно доказанному выше, утверждение леммы состоит в том, что $\tilde{\mathfrak{B}}(G) \setminus \tilde{\mathfrak{C}}(G) \neq \varnothing$.

Пусть $\hat{\tilde{G}}'$ граф блочной структуры графа $\tilde{G}'$. У него имеется, по крайней мере, две концевых вершины (лемма 6, [1]). Следовательно, у графа $\tilde{G}'$ имеется, по крайней мере, два блока – непустых подграфа $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ без вершин сочленения. В каждом из этих подграфов имеется, по крайней мере, одна вершина $y(D)$ такая, что соответствующая грань D является граничной на графе G. Тогда, выбирая в каждом из этих подграфов по одной вершине $y(D_1) \in \tilde{G}_1$, $y(D_2) \in \tilde{G}_2$, которые соответствуют граничным граням графа G и не являются вершинами сочленения, то есть содержатся в $\tilde{\mathfrak{B}}(G) \setminus \tilde{\mathfrak{C}}(G)$. ■

Перейдём теперь к рассмотрению бесконечных плоских графов. Для того чтобы бесконечный граф был плоским, вообще говоря, недостаточно, чтобы все его конечные подграфы были плоскими. Это положение демонстрируется примером графа, изображённого схематически на рис. 2, у которого $G = \langle V, \Phi \rangle$, $V = \{\mathsf{e}_k; k \in \mathbb{Z}\}$, где

$$\Phi = \{\{\mathsf{e}_k, \mathsf{e}_{k+3}\}; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{\mathsf{e}_{3k}, \mathsf{e}_{3k+1}\}; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{\mathsf{e}_{3k+1}, \mathsf{e}_{3k+2}\}; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{\mathsf{e}_{3k}, \mathsf{e}_{3k+2}\}; k \in \mathbb{Z}\}.$$

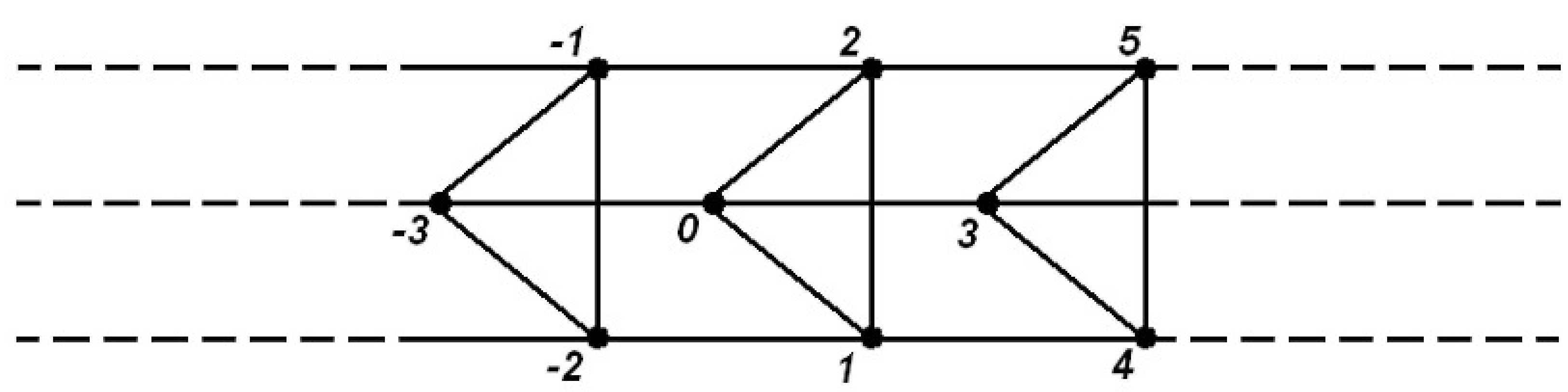

Рис. 2.

Для корректного определения понятия плоского графа G с бесконечным множеством V вершин, $|V| = \aleph_0$, если при этом исходить из соответствующего этого графу многообразия $\mathsf{K}(G)$ в $\mathbb{R}^\infty$, требуется уточнить, что понимается под непрерывной инъекцией $\mathsf{K}(G)$ в $\mathbb{R}^2$. Это уточнение состоит в следующем. Сначала производится вложение множество вершин V графа в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы множество образов в каждой компактной области было конечно, а затем производятся непрерывные инъекции каждого из рёбер – отрезков из $\mathsf{K}(G)$ в виде жордановых кривых на $\mathbb{R}^2$ без пересечений друг с другом, для которых такое понятие определено корректно. Таким образом, под бесконечным плоским графом мы понимаем такой, для которого найдутся погружение вершин и инъекции рёбер, удовлетворяющие этим свойствам. Дадим точную формулировку этого понятия.

Определение 6. *Бесконечный граф $G = \langle V, \Phi \rangle$ назовём плоским, если существует такое его погружение $\mathsf{F} : \mathsf{K}(G) \mapsto \mathbb{R}^2$, при котором в каждой компактной области D в $\mathbb{R}^2$ содержится не более чем конечное множество точек образа $D \cap \mathsf{F}(V)$ и каждое ограничение этого погружения на любой конечный подграф $G' \subset G$ является непрерывной инъекцией $\mathsf{F} : \mathsf{K}(G') \mapsto \mathbb{R}^2$.*

Очевидно, что ограничение $G|_R$ бесконечного плоского графа G на любой круг R круг представляет собой плоский граф. При этом имеет место

$$\lim_{R_n \to \mathbb{R}^2} G|_{R_n} = G\,,$$

где предел понимается в теоретико-множественном смысле по любой последовательности кругов $\langle R_n; n \in \mathbb{N}\rangle$. Это предельное соотношение можно обобщить. А именно, пусть $\langle G_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ – монотонно расширяющаяся последовательность подграфов плоского графа G такая, что объединение граней

$$\lim_{n\to\infty} \bigcup_{\gamma\subset G_n} D(\gamma)$$

исчерпывает все конечные грани графа G. Тогда имеет место

$$\lim_{n\to\infty} G_n = G\,. \tag{5}$$

Понятие грани бесконечного плоского графа G относительно его фиксированного погружения F в $\mathbb{R}^2$ вводится посредством определения 5 с тем лишь отличием от случая конечного плоского графа, что приходится рассматривать бесконечное множество пересечений областей $D(\gamma)$, так как на бесконечном графе, вообще говоря, можно построить бесконечное множество циклов γ.

Так как в каждом компакте плоскости $\mathbb{R}^2$ содержится только конечное множество вершин графа – образов его погружения в эту плоскость, то каждая конечная грань плоского графа ограничивается конечным множеством рёбер. При этом у бесконечного плоского графа могут иметься бесконечные грани, границы которых состоят из бесконечных путей.

Наибольший интерес для теории перколяции представляют плоские бесконечные графы специального вида, которые называются *мозаиками*. Их определение состоит в следующем.

Определение 7.[5)] *Бесконечный плоский граф $G = \langle V, \Phi\rangle$ называется мозаикой, если индекс каждой его вершины конечен и он не имеет бесконечных граней.*

В частности, мозаика G называется плоским периодическим графом, если она допускает такое вложение F в $\mathbb{R}^2$, при котором существует параллелограмм P и неколлинеарные векторы a_1, a_2 в $\mathbb{R}^2$ такие, что образ $\mathsf{F}(\mathsf{K}(G))$ может быть восстановлен по его ограничению на этот параллелограмм посредством следующей формулы:

$$\mathsf{F}(\mathsf{K}(G)) = \{[\mathsf{F}(\mathsf{K}(G))]_P + n_1 a_1 + n_2 a_2; \langle n_1, n_2\rangle \in \mathbb{Z}^2\}\,.$$

Определение 5 плоского графа приводит к понятию его граней, даваемому в терминах жордановых кривых на плоскости. Это, в свою очередь, обязывает, в процессе рассуждений, связанных с плоскими графами, к оперированию такими кривыми и их топологическими свойствами. Нашей целью является дать такое эквивалентное определение плоского графа и его граней, которое бы не было связано с конкретным его

[5] Даваемое здесь определение мозаики несколько отличается от определения, данного в [1], но оба эти определения эквивалентны.

погружением в плоскость. Это определение даётся на основе предлагаемого ниже GL-алгоритма.

Пусть γ – граф с множеством вершин $V_\gamma = \{x_0, x_1, ..., x_{|\gamma|}\}$, который представляет собой простой цикл, то есть $\Phi_\gamma = \{\{x_i, x_{i+1}\} : i = 0 \div |\gamma|, x_{|\gamma|+1} := x_0\}$, и $\sigma := \sigma(x_j, x_{j+m})$, где $0 \leqslant j \leqslant |\gamma|$ и $j + m$ вычисляется по $\mod |\gamma|$, – отмеченный путь на этом цикле. Заметим, что указание начальной и конечной вершин пути σ задаёт на нём ориентацию.

Указанную пару $\langle \gamma, \sigma \rangle$ будем называть циклом γ, *оснащённом путём* σ.

Рассмотрим конечную последовательность $\langle \langle \gamma_n, \sigma_n \rangle ; n = 1 \div N \rangle$ оснащённых пар.

GL-алгоритм сопоставляет каждой такой последовательности пар последовательность $\langle G_n ; n = 1 \div m \rangle$ конечных плоских графов, $m \leqslant N$ без концевых вершин и вершин сочленения, а также соответствующую ей последовательность $\langle \Gamma_n ; n = 1 \div m \rangle$ внешних рёбер, где Γ_n – внешние рёбра графа G_n, $n = 1 \div m$. Конструкцию этого алгоритма мы введём индуктивно по длине последовательности m.

На первом шаге отождествим граф G_1 с циклом γ_1. Все рёбра этого графа назовём, по определению, внешними. Таким образом, множество внешних рёбер $\Gamma_1 = \Phi_{\gamma_1}$. Граф G_2 получается из G_1 приклеиванием к нему цикла γ_2 по отмеченным путям σ_1 на γ_1 и σ_2 на γ_2 (см. [1]), согласно их ориентации, в том случае, если $|\sigma_1| = |\sigma_2|$. Если же имеет место неравенство $|\sigma_1| \neq |\sigma_2|$, то будем считать последовательность циклов $\langle \gamma_n ; n = 1 \div N \rangle$ несогласованной на первом шаге и положим $m = 1$, то есть процесс построения, согласно GL-алгоритму прекращается на первом шаге.

Если же построение графа G_2 возможно, то он является, очевидным образом, плоским и его рёбра, входящие в состав отмеченного пути β_2, получаемого на графе G_2 в результате склейки путей σ_1 и σ_2, назовём внутренними рёбрами этого графа. Остальные его рёбра, по определению, – внешние. Обозначим множество внешних рёбер посредством Γ_2.

Определим теперь индукционный шаг, завершающий индуктивное построение GL-алгоритма. Пусть последовательность оснащённых циклов является согласованной вплоть до n-го шага включительно и на n-м шаге имеется плоский граф G_n с множеством внешних рёбер Γ_n, которые составляют простой цикл. Если $|\Gamma_n| > |\sigma_{n+1}|$, то последовательность $\langle \langle \gamma_k, \sigma_k \rangle ; k = 1 \div N \rangle$ будем считать согласованной на шаге $(n+1)$. В противном случае, она является несогласованной на этом шаге и построение последовательности плоских графов прекращается и полагается $m = n$. Если же имеется согласованность на $(n+1)$-м шаге, то выберем в Γ_n путь σ'_n так, чтобы $|\sigma'_n| = |\sigma_{n+1}|$ и зафиксируем на этом выбранном пути ориентацию. Склеим граф G_n с циклом γ_{n+1} по путям σ'_n и σ_{n+1} соответственно. В результате, получим плоский граф G_{n+1} с отмеченным на нём путём склейки β_{n+1}. Множество

$$\Gamma_{n+1} = (\Gamma_n \cup \{\gamma_{n+1}\}) \setminus \beta_{n+1}$$

назовём множеством внешних рёбер графа G_{n+1}. Остальные его рёбра, по определению, – внутренние. Это множество, вместе с отношением смежности, определённым на нём наследственным образом, представляет собой простой цикл – внешнюю границу графа G_{n+1}.

В самом деле, цикл Γ_n, по построению, составляется из двух несамопересекающихся путей σ'_n и Γ'_n, $\Gamma_n = \sigma'_n \cup \Gamma'_n$. Точно также цикл γ_{n+1} состоит из несамопересекающихся путей γ'_{n+1} и σ_{n+1} так, что он получается из них склейкой по двум вершинам. Тогда Γ_{n+1} – простой цикл, так как его можно пройти двигаясь сначала вдоль пути Γ'_n, а затем, с сохранением направления обхода, вдоль пути σ_{n+1}. Этот цикл несамопересекающийся. В противном случае должны были бы пересекаться пути γ'_{n+1} и Γ'_n по каким-то своим внутренним вершинам, что невозможно.

На этом построение индукционного шага заканчивается. Таким образом, мы построили индуктивно последовательность $\langle G_n; n = 1 \div m\rangle$ и связанную с ней последовательность $\langle \Gamma_n; n = 1 \div m\rangle$. Обрыв этой последовательности на шаге m может произойти только по двум причинам. Первая – на этом шаге последовательность $\langle\langle\gamma_n, \sigma_n\rangle; n = 1 \div N\rangle$ не согласована с парой $\langle\gamma_{m+1}, \sigma_{m+1}\rangle$ и в этом случае $m < N$. Вторая – $m = N$, то есть множество циклов к которым применяется алгоритм исчерпано.

Сформулируем заключительное утверждение описанного построения.

Теорема 6. *В результате применения GL-алгоритма к произвольной последовательности $\langle\langle\gamma_n, \sigma_n\rangle; n = 1 \div N$ получается последовательность $\langle G_n; n = 1 \div m\rangle$ плоских графов без концевых вершин и вершин сочленения.*

Замечание. Пусть $G = \langle V, \Phi\rangle$ – плоский граф, получаемый посредством GL-алгоритма, то есть без концевых вершин и вершин сочленения. Приклеивая к его вершинам древесные графы H_k, $k = 1 \div |V|$ с отмеченными вершинами, получим произвольный плоский граф уже содержащий концевые вершины. Отмеченные вершины этого графа, которые образованы в результате склейки, являются его вершинами сочленения.

Точно также, взяв некоторый набор $G_k = \langle V_k, \Phi_k\rangle$ плоских графов, полученных в результате применения GL-алгоритма к набору различных последовательностей циклов, отметив затем на каждом из них некоторые из их внешних вершин и произведя склейки графов по этим вершинам, получим плоский граф с вершинами сочленения, который не имеет концевых вершин.

Сформулируем теперь теорему, которая заключает в себе переформулировку понятий плоского графа и его граней на комбинаторный язык.

Теорема 7. *Для того чтобы конечный граф G без концевых вершин и вершин сочленения был плоским, необходимо и достаточно, чтобы он мог быть построен на основе GL-алгоритма из некоторого множества Γ циклов.*

□ Достаточность условия в формулировке теоремы следует из теоремы 6. Докажем необходимость этого условия для любого конечного плоского графа G без концевых вершин и вершин сочленения.

Пусть G_N – граф указанного типа, имеющий в своём составе N внутренних граней. Зафиксируем его погружение в плоскость. Согласно лемме 7, среди этих внутренних граней, всегда найдётся такая, что он может быть получен из другого плоского графа G_{N-1} с числом граней на единицу меньшим, чем у G_N, посредством приклеивания ограничивающего её цикла γ_N к G_{N-1} по несамопересекающемуся пути $\sigma_N \subset \gamma_N$. Это означает, что граф G_{N-1} получается разрезанием графа G_N по пути σ_N и при этом образуется цикл γ_N, оснащённый путём σ_N. Найдя, далее, в графе G_{N-1} грань, ограниченную циклом γ_{N-1}, существование которой утверждается леммой 7, и применяя разрезание по пути σ_{N-2}, соединяющему эту грань с остальным графом, получим плоский граф G_{N-2} с числом граней, равным $(N-2)$ и т.д. В результате, кроме графа G_{N-2}, мы получили цикл γ_{N-1}, оснащённый путём σ_{N-1}. Продолжая далее процесс последовательного разрезания графа G_N, получим, что он оборвётся тогда, когда исчерпается запас его граней, то есть в конце процесса разрезания останется одна единственная внутренняя грань, ограниченная циклом γ_1, оснащённая путём σ_1, по которому производилось последнее разрезание. Таким образом, мы построили последовательность $\langle\langle\gamma_k, \sigma_k\rangle; k = 1 \div N\rangle$ оснащённых циклов. Обратив произведенный процесс разрезания графа G_N, то есть применив GL-алгоритм к построенной последовательности оснащённых циклов, выбирая на каждом шаге приклеивания циклов γ_{k+1} к плоским графам G_k, $k = 1 \div N$ пути приклевания σ_k, по которым производилось разрезание, мы обеспечим, что полученная последовательность оснащённых циклов будет согласованной на каждом шаге склеивания, и поэтому остановка GL-алгоритма произойдёт только при $k = N$. Тогда, в результате применения этого алгоритма, мы получим граф G_N. Так как G_N – произвольный плоский граф без вершин сочленения и без концевых вершин, то мы заключаем, что справедливо утверждение теоремы. ■

Распространение теоремы 7 на бесконечные графы достигается на основе соотношения (5).

Теорема 8. *Для того чтобы бесконечный граф G был плоским без вершин сочленения и без концевых вершин, необходимо и достаточно, чтобы он мог быть построен на основе неограниченно продолженного GL-алгоритма из некоторой бесконечной последовательности $\langle\langle\gamma_n, \sigma_n\rangle; n \in \mathbb{N}\rangle$ оснащённых циклов.*

□ Достаточность сформулированного условия очевидна, так как каждый плоский граф G_N, полученный в результате применения GL-алгоритма к начальному отрезку длины N последовательности $\langle\langle\gamma_n, \sigma_n\rangle; n \in \mathbb{N}\rangle$, является плоским и не имеет концевых вершин и вершин сочленения. Она, наверняка, содержится в круге R_{n_N} достаточно большого радиуса. Переходя к пределу $N \to \infty$, получим бесконечный плоский граф G, размещённый в плоскости так, что его ограничение на каждый круг R_{n_N} даёт плоский граф G_N.

Докажем теперь необходимость условия теоремы для бесконечного плоского графа G без вершин сочленения и концевых вершин. Зафиксируем погружение графа G в плоскость. Построим ограничение $G|_{R_n}$ этого графа в каждый круг R_n из набора концентрических кругов с неограниченно возрастающей последовательностью радиусов. Эти ограничения могут иметь концевые вершины и вершины сочленения. Концевые вершины принадлежат древесным подграфам графа $G|_{R_n}$. Все эти деревья имеют конечный диаметр в выбранном нами погружении. Поэтому они могут быть полностью удалены из $G|_R$ без изменения предельного соотношения (5), так как рёбра, входящие в их состав, входят также в состав границ граней, которые возникнут в некотором более широком ограничении на круг $R_{n'} \supset R_n$ большего радиуса.

Так как граф G не имеет вершин сочленения, то для каждой вершины сочленения существует набор граней графа G конечного диаметра, добавление которых к графу $G|_{R_n}$ сделает его графом, обозначаемым нами G_n, который не имеет вершин сочленения.

Так как все эти грани имеют конечные диаметры, то $G_n \subset G|_{R_{n'}}$ с кругом $R_{n'}$ большего радиуса. Построив для этого круга точно таким же способом граф $G_{n'}$, получим, что $G_n \subset G_{n'}$. Таким образом, мы сконструируем бесконечную последовательность $\langle G_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ плоских графов без вершин сочленения и без концевых вершин. Ввиду включений $G|_{R_n} \subset G_n \subset G|_{R_{n'}}$, предел (5) этой последовательности стремится к графу G. При этом, каждый граф G_n, $n \in \mathbb{N}$ может быть получен посредством применения GL-алгоритма к соответствующей последовательности $\langle\langle\gamma_k, \sigma_k\rangle; k = 1 \div n\rangle$ оснащённых циклов, причём, очевидно, что последовательность меньшей длины $n < n'$ является начальным отрезком последовательности большей длины n'. Таким образом, переходя к пределу по $n \to \infty$, мы построим из них бесконечную последовательность $\langle\langle\gamma_n, \sigma_n\rangle; n \in \mathbb{N}\rangle$ такую, которая является согласованной и применение к ней GL-алгоритма приводит к графу G. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 1. Операции склеивания и разрезания // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 5(100);22. – С.140-152.

FINITE CLUSTERS IN PLANE MOSAICS
Part II. Combinatorial construction of plane graphs

E.S. Antonova, Yu.P. Virchenko

Abstract. This work is the continuation of first part of the article devoted the proof the Kesten theorem by combinatorial method. In this part it is proposed combinatorial definition of infinite plane graph on the basis of infinite sequence of simple cycles where each of them has been added the nonintersecting path.

Key words: plane graph, cycle, GL-algorithm.