УДК 517.958

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ [3)]

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Доказывается, что система уравнений Эйлера для поля скоростей, описывающая динамику идеальной несжимаемой жидкости, в отсутствие внешних сил, не имеет нестационарных невырожденных решений вследствие наличия дифференциальной связи – условия несжимаемости.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, уравнения Эйлера, нестационарные решения.

1. Введение. Как известно (см., например, [1]), динамика идеальной несжимаемой жидкости при так называемом эйлеровом описании определяется эволюционной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_j + (v_k \nabla_k) v_k = f_j \,, \qquad j = 1,2,3 \tag{1}$$

для поля $v : D \times [0,T]$ скоростей жидкости в точках пространственной области $D \subset \mathbb{R}^3$, зависящего от параметра времени $t \in [0,T]$. Здесь символ $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$ и $\nabla_k(\cdot) \equiv \partial(\cdot)/\partial x_k$, $k = 1,2,3$; $x = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ – радиус-вектор пространственной точки в D и $f = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ – значения поля внешней силы в D. По повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование по их возможным значениям. К системе уравнений (1) для компонент скорости v добавляется дифференциальное уравнение

$$\nabla_k v_k = 0 \,, \tag{2}$$

которое, следуя механической терминологии, будем называть *дифференциальной связью*, накладываемой на возможные решения системы уравнений (1).

Мы будем интересоваться в этой работе нестационарными, то есть существенно зависящими от t, решениями системы (1) при наличии условия (2) в отсутствии поля внешней силы, $f_j = 0$, $j = 1,2,3$, когда уравнение (1) имеет вид

$$\dot{v}_j + (v_k \nabla_k) v_k = 0 \,, \qquad j = 1,2,3 \,. \tag{3}$$

При этом решения понимаются в сильном (классическом) смысле.

[3]Федеральная целевая программа Научно-образовательного центра "Управляемые электромагнитные процессы в конденсированных средах" (госконтракт № 02.740.11.0545)

Считается, что система уравнений (2), (3) описывает различные динамические эффекты в модели несжимаемой жидкости. В частности, на этой системе уравнений основана теория вихрей Гельмгольца [2]. В то же время, с общей математической точки зрения, наличие дифференциальной связи (2) делает систему уравнений (2), (3) переопределённой, что должно существенно сужать многообразие её возможных решений (т.н. *общее решение*). В частности, в предыдущей работе [3,4] нами показано, что многообразие стационарных решений в $\mathbb{R}^2$ (т.н. плоские решения) оказывается очень бедным. Эти решения таковы, что их линии тока являются параллельными прямыми в $\mathbb{R}^2$. В настоящей работе мы доказываем ещё более удивительное свойство системы (2), (3) – наличие условия несжимаемости (2) приводит в тому, что она не имеет нестационарных невырожденных решений в $\mathbb{R}^3$ (соответственно, двумерных решений в $\mathbb{R}^2$).

2. Преобразование годографа. будем рассматривать такие поля v на $D \subset \mathbb{R}^3$, для которых $3{\times}3$-матрица $(\nabla_k v_j)$, $j,k = 1,2,3$ невырождена в любой точке $x \in D$ общего положения при любом допустимом значении $t \in [0,T]$ (для которого существует предполагаемое сильное решение). Такие поля мы будем называть трёхмерными. Точно также поле v на $\mathbb{R}^2$ назовём двумерным, если невырождена $2{\times}2$-матрица поля v, описывающего плоское течение ($v_3 = 0$, $\nabla_3 v_j = 0$, $j = 1,2$).

Обозначим $v_j \equiv F_j(x,t)$, $j = 1,2,3$. Ввиду условия невырожденности $\det(\nabla_k v_j) \neq 0$, имеющем место при каждом $t \in [0,T]$, почти в каждой точке $x \in D$ общего положения существует обратное преобразование поля v, которое мы обозначим

$$x_j = G_j(v,t)\,,$$

называемое *преобразованием годографа* (см., например, [6]).

Из данного определения следует, что

$$\delta_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \left(\frac{\partial G_k}{\partial v_m}\right)_{v=F(x,t)} \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_l}\right) \equiv B_{km}A_{ml}\,, \quad k,l = 1,2,3 \tag{4}$$

(для плоских течений $k,l = 1,2$). Тогда

$$\det A \equiv \det\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\right) \neq 0\,, \quad x \in D\,, \qquad \det B \equiv \det\left(\frac{\partial G_j}{\partial v_k}\right) \neq 0\,,$$

что является непосредственным следствием условия невырожденности поля v. Кроме того, имеет место тождество

$$0 = \frac{\partial x_k}{\partial t} = \left(\frac{\partial G_k}{\partial v_m}\right)_{v=F(x,t)} \dot{v}_m + \frac{\partial G_m}{\partial t}\,, \quad k = 1,2,3\,. \tag{5}$$

Согласно определению поля $F(x,t)$ и уравнения

$$\dot{v}_m + (v_k \nabla_k) F_m = 0\,,$$

ввиду условия невырожденности, имеем

$$v_k = -\left(A^{-1}\right)_{km} \dot{v}_m\,, \qquad k = 1,2,3\,.$$

Принимая во внимание (4)

$$\left(A^{-1}\right)_{km} = B_{km} = \left(\frac{\partial G_k}{\partial v_m}\right)_{v=F(x,t)},$$

получим

$$v_k = -\left(\frac{\partial G_k}{\partial v_m}\right)_{v=F(x,t)} \dot{v}_m\,, \quad k = 1,2,3\,.$$

Тогда, используя (5), находим

$$\left(\frac{\partial G_k}{\partial t}\right)_{v=F(x,t)} = v_k\,,$$

что в переменных v_k, $k = 1,2,3$ и t даёт дифференциальное уравнение для поля $x(v,t)$,

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = v_k\,, \qquad k = 1,2,3\,,$$

имеющее простое явное решение

$$x_k = v_k t + Q_k(v)\,, \qquad k = 1,2,3\,,$$

где поле $Q(v) = G_k(v,0)$ находится из начальных данных $v_j(x,0) = F_j(x,0)$. Таким образом, нами доказана

Теорема. *Общее решение уравнения (3) даётся неявной функцией*

$$x = vt + Q(v)\,, \tag{6}$$

где поле $Q(v)$ определяется как неявная функция из уравнения $v = F(x,0)$.

Замечание. Разумеется все приведенные выше рассуждения справедливы для двумерных решений в $\mathbb{R}^2$. Необходимо лишь в процессе рассуждений ограничить все индексы как немые, так и не немые только значениями 1, 2.

3. Основная теорема. Выясним теперь какие поля $F(x,t)$, определяемые формулой (6), удовлетворяют условию несжимаемости (2). Для этого продифференцируем по x_k обе части этого уравнения,

$$\delta_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = t\nabla_k v_j + \nabla_k\left[Q_j\left(F(x,t)\right)\right] =$$

$$= tA_{jk} + \left(\frac{\partial Q_j}{\partial v_m}\right)_{v=F(x,t)} A_{mk}\,, \qquad j,k = 1,2,3\,,$$

то есть получаем матричное соотношение

$$1 = (t + C)A\,, \tag{7}$$

где введена матрица

$$C_{jk} = \left(\frac{\partial Q_j}{\partial v_m} \right)_{v=F(x,t)} .$$

Ввиду условия невырожденности, $\det A \neq 0$, и, на основании (7), существует матрица

$$(t + C)^{-1} = A . \tag{8}$$

Кроме того, из (7) следует, что условие несжимаемости, то есть соленоидальности поля поля $F(x,t)$, эквивалентно следующему:

$$\operatorname{Sp} CA = 3$$

(для двумерных решений в правая часть этого соотношения равна 2). Принимая во внимание (8), это последнее соотношение запишем в виде

$$\operatorname{Sp} C(t + C)^{-1} = 3 , \tag{9}$$

в котором, возвращаясь от переменных x_k, $k = 1, 2, 3$ и t к переменным v_k, $k = 1, 2, 3$, t, получим, что матрица C, зависящая только от v, должна удовлетворять уравнению (9) при любом допустимом $t \in [0, T]$. Теперь мы в состоянии доказать основное утверждение работы.

Основная Теорема. *Система уравнений (2), (3) не имеет нестационарных невырожденных решений в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.*

□ Рассмотрим сначала двумерный случай, когда уравнение (9) заменяется на

$$\operatorname{Sp} C(t + C)^{-1} = 2 . \tag{10}$$

Пусть 2×2-матрица C имеет нулевое собственное число и какое-то ещё одно собственное число λ_1, которое, вообще говоря, зависит от v. Тогда в жордановом представлении матрицы C уравнение (10) записывается в виде

$$\frac{\lambda_1}{t + \lambda_1} = 2 ,$$

что должно иметь место при любом $t \in [0, T]$. Полученное соотношение невозможно. (Если оба собственных числа равны 0, то из (10) следует $0 = 2$.) Если же оба характеристических числа λ_1 и λ_2 матрицы C не равны нулю (только одно из них обязано быть собственным), то $\det C \neq 0$. Тогда существует матрица C^{-1} и, следовательно, уравнение (10) можно записать в виде

$$2 = \operatorname{Sp} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k C^{-k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \operatorname{Sp} C^{-k} .$$

Ввиду произвольности $t \in [0, T]$, должно иметь место

$$\operatorname{Sp} C^{-1} = \operatorname{Sp} C^{-2} = ... = 0 .$$

Тогда из уравнения Гамильтона-Кэли (см., например, [5]) для 2×2-матрицы C^{-1},

$$C^{-2} - C^{-1}\mathrm{Sp}\, C^{-1} + \det\, C^{-1} = 0\,,$$

где $\det\, C^{-1} = \left[(\mathrm{Sp}\, C^{-1})^2 - \mathrm{Sp}\, C^{-2}\right]/2$, получаем $C^{-2} = 0$. Это приводит к противоречию со сделанным предположением, так как $\det\, C^{-1} = \det\, C = 0$.

Точно также рассматривается трёхмерный случай. Если хотя бы одно из характеристических чисел λ_1, λ_2, λ_3 матрицы C (например, λ_3) равно нулю, то в жордановом представлении матрицы C уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\lambda_1}{t+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{t+\lambda_2} = 3\,.$$

Откуда получаем противоречие при $t \to 0$. Если же все характеристические числа не равны нулю, то $\det\, C \neq 0$, и

$$3 = \mathrm{Sp}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k C^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k\, \mathrm{Sp}\, C^{-k}\,.$$

Ввиду произвольности $t \in [0, T]$, получаем

$$\mathrm{Sp}\, C^{-1} = \mathrm{Sp}\, C^{-2} = \mathrm{Sp}\, C^{-3} = ... = 0\,.$$

Снова используя уравнение Гамильтона-Кэли для матрицы C^{-1}

$$C^{-3} - C^{-2}\mathrm{Sp}\, C^{-1} + C^{-1}\left[(\mathrm{Sp}\, C^{-1})^2 - \mathrm{Sp}\, C^{-2}\right]/2 - \det\, C^{-1} = 0\,,$$

в котором все коэффициенты равны нулю

$$\left(\text{так как } \det\, C^{-1} = \frac{1}{6}\left[2\mathrm{Sp}\, C^{-3} = 3\mathrm{Sp}\, C^{-1}\cdot \mathrm{Sp}\, C^{-2} + \left(\mathrm{Sp}\, C^{-1}\right)^3\right] \text{ см. по этому поводу [5]}\right).$$

Тогда $C^{-3} = 0$ и, следовательно, получаем противоречие, так как $\det\, C = 0$. ■

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Л.Д. Ландау. – М.: Наука, 1988. – 732 с.

2. Гельмгольц Г. Два исследования по гидродинамике / Г. Гельмгольц. – М., 1902. – С.5-61.

3. Вирченко Ю.П. Плоские стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2011. – 5(100);22. – С.133-139.

4. Вирченко Ю.П. Стационарные плоские течения в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости // Second International Russian-Kazakh Symposium "Mixed type equations and related problems of analysis and informatics"Nalchik 23-27 May 2001 / Proceedings. – Нальчик: Научно-исследовательский институт КБНЦ РАН, 2001. – С.54-55.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

6. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений / Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1978. – 688 с.

NONSTATIONARY SOLUTIONS OF DYNAMICAL EQUATIONS OF IDEAL INCOMPRESSIBLE LIQUID

Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. It is proved that the Euler equation system described the dynamics of velocity field of ideal incompressible liquid have no nonstationary solutions when external force is absent. It is realized due to additional differential equation to which the field is subjected, i.e. the so-called incompressibility condition.

Key words: ideal incompressible liquid, Euler's equation, nonstationary solution.