УДК: 533.72

О НЕКОТОРЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ В ТЕЧЕНИЯХ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ [1)]

Н.В. Малай[*)], Е.Р. Щукин[**)], Ле Тхи Хоай[*)]

[*]Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: e-mail: malay@bsu.edu.ru
[**]Институт высоких температур РАН, Москва, 127412

Аннотация. В статье проведено аналитическое исследование линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса при числах Рейнольдса много меньших единицы с учетом степенного вида зависимости коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В тензоре напряжений учитывается вклад барнеттовского приближения.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, коэффициенты переноса, барнеттовское приближение.

Введение. В современной науке и технике, в задачах, связанных с химическими технологиями, гидрометеорологией и охраной окружающей среды возникает потребность изучения многофазных систем. Наибольший интерес представляют дисперсные системы, состоящие из двух фаз, одна из которых есть частицы, а вторая – вязкая среда (газ или жидкость) [1-3]. Газ (жидкость), со взвешенными в ней частицами называют аэрозолями (гидрозолями), а сами частицы – аэрозольными (гидрозольными). Гидро- и аэрозольные частицы могут оказать значительное влияние на протекание физических и физико-химических процессов различного вида в дисперсных системах. Размер частиц дисперсной фазы находится в очень широких пределах: от макроскопических ($\sim$ 500 мкм) до молекулярных значений ($\sim$ 10 нм); варьируется соответственно и концентрация частиц – от одной частицы до высококонцентрированных систем ($> 10^{10}$ см$^{-3}$). В настоящее время, с учётом развития нанотехнологий и наноматериалов, большую перспективу представляет применение ультрадисперсных (нано-) частиц, например, в наноэлектронике, наномеханике и т.д.

На входящие в состав аэродисперсных систем аэрозольные частиц могут действовать силы различной природы, вызывающие их упорядоченное движение. Примером является седиментация, происходящая в поле гравитационной силы. В газообразных средах с неоднородным распределением температуры может возникнуть упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей нескомпенсированного импульса частицам газообразной среды. При этом движение частиц, обусловленное, например, внешним заданным градиентом температуры, называют термофорезом. Если движение обусловлено за счёт

[1]Федеральная целевая программа Научно-образовательного центра "Управляемые электромагнитные процессы в конденсированных средах" (госконтракт № 02.740.11.0545)

внутренних источников тепла неоднородно распределенных в объёме частицы, то такое движение называется фотофоретическим и т.д.

Частицы, входящие в состав реальных аэродисперсных систем, могут иметь произвольную форму, быть твёрдыми и жидкими, неоднородными по составу и обладать анизотропией теплофизических свойств, на их поверхностях могут протекать химические реакции и т.д.

В физике аэродисперсных систем аэрозольные частицы по размерам разделяются на крупные, умеренно крупные и мелкие. Классификация частиц по размерам проводится на основе так называемого критерия Кнудсена $K_n = \dfrac{\lambda}{L}$ [1-3]. При этом частицы называются крупными, если $K_n \ll 0.01$, умерено крупными при $0.01 \le K_n \le 0.3$ и мелкими при $K_n \gg 1$. Здесь λ – средняя длина свободного пробега молекул газообразной среды, L – линейный размер аэрозоля.

В последнее время возрос интерес к построении теории движения аэрозольных частиц при значительных относительных перепадах температуры в их окрестности. Под относительным перепадом температуры понимается отношение разности между температурой поверхности частицы и температурой среды вдали от неё к этой последней величине. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство $(T_{pS} - T_{g\infty})/T_{g\infty} \ll 1$, и значительным, если – $(T_{pS} - T_{g\infty})/T_{g\infty} \sim 0(1)$ (T_{pS} – средняя температура поверхности частицы, $T_{g\infty}$ – температура газообразной среды вдали от нее). Здесь и далее индексы «p»и «g»будем относить к частице и газообразной среде; индексом «s»обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы и индексом «∞»– физические величины, характеризующие газообразную среду вдали от частицы.

Если средняя температура поверхности частицы по величине существенно отличается от температуры окружающей газообразной среды (частица в этом случае называется нагретой), то здесь мы сталкиваемся с большими математическими проблемами. При решении уравнений газовой динамики необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры, т.е. система газодинамических уравнений ставится существенно нелинейной.

Как известно, движение частицы в сплошной среде описывается системой газодинамических [4-5]. Эти уравнения получены в предположении линейных связей между тензорами напряжений и скоростей деформаций (закон Ньютона) и между векторами потока тепла и градиента температуры (закон Фурье). Эти линейные связи следуют как из феноменологических рассмотрений, так и из термодинамики необратимых процессов при условии малости отклонения среды от термодинамически равновесного.

Однако, при числе Рейнольдса много меньшем единицы, для сильно нагретых частиц, наряду с вязкими напряжениями, дополнительно, необходимо учитывать "барнеттовские температурные" напряжения [6]. В [6] было показано, что эти напряжения могут оказывать значительное влияние на величину силы сопротивления движению сильно нагретых твёрдых сферических частиц.

В настоящей работе при числе Рейнольдса много меньшем единицы получено аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учетом вязких и барнеттовских температурных напряжений.

1. Постановка задачи.
Решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в виде обобщённых степенных рядов.

Пусть твёрдая крупная сферическая частица движется в газообразной среде под действием некоторой силы (гравитационной, термофоретической, фотофоретической и т.д.). В силу малости времени тепловой релаксации системы газ-частица все процессы в ней протекают квазистационарно. Движение частицы происходят при числах Пекле и Рейнольдса существенно меньших единицы. По составу частица полагается однородной, фазовой переход на поверхности частицы отсутствует. Поскольку $(T_{pS} - T_{g\infty}/T_{g\infty}) \sim 0(1)$, необходимо учитывать зависимость вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры. В данной работе используются степенные зависимости [7]

$$\mu_g = \mu_{g\infty}(T_g/T_{g\infty})^{\beta}\,, \qquad \lambda_g = \lambda_{g\infty}(T_g/T_{g\infty})^{\alpha}\,, \qquad \rho_g = \rho_{g\infty}/t_g \qquad 0.5 \leqslant \alpha\,,\ \beta \leqslant 1.0\,,$$

где $\mu_{g\infty} = \mu_g(T_{g\infty})$; $\lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_{g\infty})$; $\rho_{g\infty} = \rho_g(T_{g\infty})$; μ_g, λ_g, ρ_g – динамическая вязкость, теплопроводность и плотность газообразной среды, $t_g = T_g/T_{g\infty}$, T_g – температура газа.

Будем также считать, что коэффициент теплопроводности частицы по величине намного больше коэффициента теплопроводности газа. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла θ в системе "частица- газ" (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и считать, что вязкость связана только с температурой $t_0(r)$, т.е. $\mu_g(t(r,\theta)) \approx \mu_g(t_0(r))$. При этом $t(r,\theta) = t_0(r) + \delta t(r,\theta)$, где $\delta t(r,\theta) \ll t_0(r)$, а $\delta t(r,\theta)$, $t_0(r)$ определяются из решения задачи равновесной термодинамики.

При выполнении указанных условий распределения массовой скорости U_g, давления P_g и температуры T_g газа в окрестности частицы описываются в декартовой системе координат в приближении Стокса следующей системой уравнений [4-6]

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\rho_g U_i\big) = 0\,, \qquad \frac{\partial P_g}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\,, \qquad P_g = n_g k T_g\,, \tag{1}$$

$$\rho_g c_{pg} U_k \frac{\partial T_g}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x_k}\right), \tag{2}$$

где U_i – компоненты массовой скорости в декартовой системе координат x_i, $i = 1,2,3$; c_{pg} – удельная теплоемкость газа; σ_{ik} – компоненты тензора напряжений; по повторяющимся нижним индексам в (1)-(2) проводится суммирование. Эти уравнения представляют собой уравнение непрерывности, уравнение переноса импульса, уравнение состояния (1) и уравнение переноса тепла (2). Предполагается, что в выражения для компонент тензора напряжений σ_{ik} входят слагаемые, обусловленные сдвиговой вязкостью и "температурными барнеттовскими" напряжениями:

$$\sigma_{ik} = \mu_g\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\frac{\partial U_m}{\partial x_m}\right) - K_1\frac{\mu_g^2}{\rho_g T_g}\left(\frac{\partial^2 T_g}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\frac{\partial^2 T_g}{\partial x_m^2}\right) -$$

$$-K_2\frac{\mu_g^2}{\rho_g T_g^2}\left(\frac{\partial T_g}{\partial x_i}\frac{\partial T_g}{\partial x_k}-\frac{1}{3}\,\delta_{ik}\frac{\partial T_g}{\partial x_m}\frac{\partial T_g}{\partial x_m}\right). \tag{3}$$

Величина коэффициентов K_1, K_2 – порядка единицы и зависят от сорта молекул. В частности, для молекул, потенциал взаимодействия которых имеет степенной вид, имеем: $\mu \sim T^s$, $K_1 = s_1$, $K_2 = s_1 s - s_2$, где s_1, s_2 положительные числа (для максвелловских молекул $s = 1$, $s_1 = 3$, $s_2 = 0$, для молекул упругих шаров – $s = 1/2$, $s_1 = 2.418$, $s_2 = 0.99$).

Поскольку число Рейнольдса ($\mathrm{Re}_\infty = (\rho_{g\infty} R U_\infty)/\mu_{g\infty} \ll 1$) решение системы газодинамических уравнений (1) - (3) будем искать в виде ряда по Re_∞:

$$V(\mathrm{y},\theta) = \mathrm{V}_0(\mathrm{y},\theta) + \mathrm{Re}_\infty\,\mathrm{V}_1(\mathrm{y},\theta) + \mathrm{Re}_\infty^2\mathrm{V}_2(\mathrm{y},\theta) + \cdots \quad (\mathrm{V_g} = \mathrm{U_g}/\mathrm{U}_\infty)$$

$$t(y,\theta) = t_0(y) + \mathrm{Re}_\infty\, t_1(y,\theta) + \cdots \quad (y = r/R).$$

Так как мы рассматриваем движение твёрдой частицы сферической формы, т.е. предполагаем, что нет деформации на поверхности частицы, тогда $V_0 = 0$ и в этом случае

$$V(\mathrm{y},\theta) = \mathrm{Re}_\infty\,\mathrm{V}_1(\mathrm{y},\theta) + \mathrm{Re}_\infty^2\mathrm{V}_2(\mathrm{y},\theta) + \cdots \ .$$

В данной работе, мы ограничим поправку первого порядка малости по Re_∞.

Решения системы газодинамических уравнений (1)-(2) будем искать в виде

$$V_r = G(y)\cos\theta\,, \qquad V_\theta = -g(y)\sin\theta\,, \tag{4}$$

$$P_g = 1 + h(y)\cos\theta\,, \qquad t = t_0(y) + \mathrm{Re}_\infty\, t_1(y)\cos\theta\,. \tag{5}$$

Подставляя выражения (4)-(5) в уравнения (1)-(2), после соответствующих преобразований, получаем неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка для нахождения функции $G(y)$

$$y^4\frac{d^3G}{d^3y} + y^2(4+\gamma_1 l)\frac{d^2G}{d^2y} - y^2(4+\gamma_2 l - \gamma_3 l^2)\frac{dG}{dy} - y(2-l)l^2\gamma_3 G +$$

$$+\frac{2\,t_0^{\beta-1}}{y^2}(K_2 - 2\beta K_1)\left(\frac{dt_0}{dy}\frac{dt_1}{dy} - \frac{d^2t_0}{d^2y}\,t_1\right) = \frac{D}{t_0^\beta}\,, \tag{6}$$

где $\gamma_1 = \dfrac{1-\beta}{1+\alpha}$, $\gamma_2 = 2\,\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$, $\gamma_3 = \dfrac{2+2\,\alpha-\beta}{(1+\beta)^2}$, $t_{g0} = \left(1+\Gamma_0/y\right)^{1/(1+\alpha)}$,

$\ell = \Gamma_o/(y+\Gamma_0)$, где Γ_0, D – постоянные.

Если ввести новые функции

$$G(y) = -\frac{(1+\alpha)}{Rr_\infty}\,\frac{y}{l}\left(\frac{d^2\tau}{d^2y} + \frac{2}{y}\frac{d\tau}{dy} - \frac{2}{y^2}\tau\right), \quad t_1(y) = \tau(y)/t_{go}^\alpha, \;\; \Phi_e = \frac{d\tau}{dy} + \frac{2}{y}\tau\,, \tag{7}$$

то уравнение (6) принимает вид

$$y^5\frac{d\Phi_e^4}{dy^4} + y^4\,(10+\gamma_5 l)\frac{d^3\Phi_e}{dy^3} + y^3\,\left(18+\gamma_6 l + \gamma_7 l^2\right)\frac{d^2\Phi_e}{d^2y} + y^2\,\left(\gamma_8 l + \gamma_9 l^2\right)\frac{d\Phi_e}{dy} +$$

$$+ y\, t_0^{\beta-\alpha}\gamma_{10}\Phi_e = -\frac{l\gamma\, D}{t_0^{\beta}}\,, \tag{8}$$

Здесь $\gamma_5 = (\gamma_1 - 3), \gamma_6 = (4\gamma_1 - \gamma_2 - 14), \gamma_8 = 2\gamma_1 - 2\gamma_2 - 4, \gamma_9 = \gamma_2 - 2\gamma_1, \gamma_7 = (\gamma_3 - 2\,\gamma_1)\,,$

$$\gamma_{10} = 2\,\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{(1+\alpha)^2}(K_2 - 2\,\beta\, K_1)\,, \qquad \mathrm{Pr}_\infty = \mu_{g\infty}c_{pg}/\lambda_{g\infty}\,.$$

Учитывая, что

$$t_0^{\beta\,-\,\alpha} = (1-\ell)^{(\alpha-\beta)/(1+\alpha)} = (1-\ell)^{-\alpha_1} = 1\,+\alpha_1\,\ell\,\,+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2!}\,\ell^2\,\,+$$

$$+\,\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}{3!}\,\ell^3\,\,+\cdots+\,\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)\cdots(\alpha_1+n-1)}{n!}\,\ell^n\,,$$

$$t_0^{-\beta} = (1-\ell)^{\beta/(1+\alpha)} = (1-\ell)^{-\alpha_0} = 1\,+\alpha_0\,\ell + \frac{\alpha_0(\alpha_0+1)}{2!} +$$

$$+\,\frac{\alpha_0(\alpha_0+1)(\alpha_2+2)}{3!}\,\ell^3\,\,+\cdots+\,\frac{\alpha_0(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_0+n-1)}{n!}\,\ell^n\,.$$

уравнение (8) перепишем в виде

$$y^5\,\frac{d\Phi_e^4}{dy^4} + y^4\,(10+\gamma_5\ell)\,\frac{d^3\Phi_e}{dy^3} + y^3\,\left(18+\gamma_6\ell+\gamma_7\ell^2\right)\frac{d^2\Phi_e}{d^2y} + y^2\,\left(\gamma_8\ell+\gamma_9\ell^2\right)\frac{d\Phi_e}{dy} +$$

$$+\gamma_{10}\,y\,\ell^2\left(1+\alpha_1\,\ell+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2!}\,\ell^2+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}{3!}\,\ell^3+\cdots+\right.$$

$$\left.+\,\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)\cdots(\alpha_1+n-1)}{n!}\,\ell^n\right)\Phi_e$$

$$= \,-\frac{\ell\gamma D}{y^5}\left(1\,+\alpha_0\,\ell+\frac{\alpha_0(\alpha_0+1)}{2!}\,\ell^2+\frac{\alpha_0(\alpha_0+1)(\alpha_0+2)}{3!}\,\ell^3+\right.$$

$$\left.+\cdots+\,\frac{\alpha_0(\alpha_0+1)(\alpha_0+2)\cdots(\alpha_0+n-1)}{n!}\,\ell^n\right). \tag{9}$$

Точка $y=0$ для уравнения (9) является регулярной особой точкой [8,9]. Поэтому будем искать его решение в виде обобщенного степенного ряда [8,9]. Характеристическое уравнение для однородного уравнения (9) имеет вид $\rho(\rho-1)(\rho+1)(\rho+4)=0$, корни которого равны соответственно: $\rho_1 = -4\,, \rho_2 = -1\,, \rho_3 = 0\,, \rho_4 = 1$. Следовательно, решениями однородного уравнения (9), удовлетворяющие ограниченности при $y \to \infty$, являются:

$$\Phi_e^{(1)} = \frac{\Gamma_0\,\gamma}{y^4}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\,\ell^n\,, \qquad C_0^{(1)} = \mathrm{const}\,, \quad \gamma = \mathrm{Pr}_\infty/(1+\alpha)\,,$$

$$\Phi_e^{(2)} = \frac{\Gamma_0\,\gamma}{y}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)}\,\ell^n + \omega_2\,\gamma\,\Gamma_0\frac{\ln y}{y^4}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\,\ell^n\,, \qquad C_0^{(2)} = \text{const}\,,$$

и частное решение неоднородного уравнения (9) ищем в виде

$$\Phi_e^{(3)} = \frac{\gamma\,\Gamma_0}{y^2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)}\,\ell^n + \omega_3\gamma\,\Gamma_0\,\frac{\ln y}{y^4}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\,\ell^n\,, \qquad C_0^{(3)} = \text{const}\,.$$

где коэффициенты $C_n^{(1)}$, $n \geqslant 1$; $C_n^{(2)}$, $n \geqslant 4$; $C_n^{(3)}$, $n \geqslant 3$ определяются методом неопределенных коэффициентов (ввиду ограниченности объёма статьи их вид мы не приводим).

Поскольку решение неоднородного уравнения (9) нами получено, то с помощью выражений (7) мы можем найти компоненты V_r и V_θ массовой скорости V_g и давления P_g, соответственно. Знание этих величин позволяет исследовать многие физические процессы в механике сплошных сред. В частности, позволяет определить общую силу действующую на частицу; анализировать такие технологические процессы как флотация и седиментация, тепло - и массоперенос в окрестности частицы и т.д.

Таким образом, в работе проведено теоретическое исследование движения твёрдой крупной нагретой аэрозольной частицы сферической в газообразной среде. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно превышать температуру окружающей среды. Получено аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В тензоре напряжений были учтены вязкие и температурные барнеттовские члены.

Литература

1. Вальдберг А.Ю., Исянов П.М., Яламов Ю.И. Теоретические основы охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями / Учебное пособие / А.Ю. Вальдберг. – Санк-Петербург: ИП. НИИОГАЗ-ФИЛЬТР, 1993. – 235 с.

2. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах / Ю.И. Яламов.– Ереван: Луйс, 1985. – 205 с.

3. Брюханов О.Н., Шевченко С.Н. Тепломассообмен / О.Н. Брюханов. – М.: АСВ, 2005. – 460 с.

4. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель. – М.:Мир, 1976. – 630 с.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау. – М.: ГТТЛ, 1954. – 795 с.

6. Коган М.Н., Галкин В.С., Фридлендер О.Г. О наприжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентрации. Новые типы свободной конвекций // Успехи физ-наук. – 1976. – 119;1. –С.111-124.

7. Бретшнайдер С. Свойствы газов и жидкостей . Инженерные методы расчета / С. Бретшнайдер. – М.: Химия, 1966. – 535 с.

8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том II / В.И. Смирнов. – М.: Наука,1974. – 655 с.

9. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон. – М.: Изд-во иностр.лит, 1958. – 474 с.

ABOUT SOME KINEMATIC EFFECTS OF FLOWS IN FLUID MECHANICS

N.V. Malay, E.R. Shchukin, Thuhoai

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: malay@bsu.edu.ru

Abstract. Problems connected with the velocity linearezed equation obtained from the Nave-Stokes one are analyzed at Reynolds's numbers being much smaller than one with the account of the power dependence of transport coefficients (viscosity, thermal conductivity) and density of the gas medium on temperature. Barnett's terms in the strength tensor are taken into account.

Key words: Nave-Stokes' equation, transport coefficients, Barnett's approximation.