Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, № 4. С. 205–212.

МАТЕМАТИКА

УДК 514.76
MSC 53C15
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-205-212

СУБРИМАНОВЫ КВАЗИ-СТАТИСТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА НЕГОЛОНОМНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ КЕНМОЦУ

А. В. Букушева, **С. В. Галаев**

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»,
Саратов, 410012, Россия

E-mail: bukusheva@list.ru, sgalaev@mail.ru

Аннотация. На неголономном многообразии Кенмоцу вводится и исследуется субриманова квази-статистическая структура. Неголономное многообразие Кенмоцу сохраняет все свойства многообразия Кенмоцу за исключением следующего свойства: распределение многообразия Кенмоцу инволютивно. В основе субримановой квази-статистической структуры лежит связность с кручением специального строения. Связность с кручением определяется внутренней связностью и структурным эндоморфизмом, сохраняющим распределение неголономного многообразия Кенмоцу. Доказывается, что внутренняя связность согласована с метрикой, индуцированной на распределении рассматриваемого многообразия. Найдено строение структурного эндоморфизма.

Ключевые слова: неголономное многообразие Кенмоцу, субриманова квази-статистическая структура, N-связность

Для цитирования: Букушева А. В., Галаев С. В. 2022. Субримановы квази-статистические структуры на неголономных многообразиях Кенмоцу. Прикладная математика & Физика. 54(4): 205–212.
DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-205-212

SUB-RIEMANNIAN QUASI-STATISTICAL STRUCTURES ON NON-HOLONOMIC KENMOTSU MANIFOLDS

Aliya Bukusheva, **Sergei Galaev**

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky,
Saratov, 410012, Russia
E-mail: bukusheva@list.ru, sgalaev@mail.ru
Received November, 12, 2022

Abstract. The paper is devoted to continuation of the study of almost contact metric manifolds equipped with a connection with torsion of a special type. The connection with torsion to be used is determined by the internal connection of an almost contact metric manifold and a field of endomorphisms acting on this manifold and preserving its distribution. The field of endomorphisms is called the second structural endomorphism of an almost contact metric manifold. In previous works, it has been shown that the structure of the second structural endomorphism may significantly depend on the geometry of the manifold under consideration. For example, the structure of the endomorphism, corresponding to the skew-symmetric connection, was found. In this article, we introduce and study the sub-Riemannian quasi-statistical structure on a non-holonomic Kenmotsu manifold. A non-holonomic Kenmotsu manifold possesses all properties of the Kenmotsu manifolds except for the following one: the distribution of a Kenmotsu manifold is involutive. At the core of a sub-Riemannian quasi-statistical structure lies a connection with torsion of a special type. It is proved that the internal connection is consistent with the metric induced on the distribution of the manifold under consideration. The structural endomorphism corresponding to a sub-Riemannian quasi-statistical structure is described.

Keywords: Non-Holonomic Kenmotsu Manifold, Sub-Riemannian Quasi-Statistical Structure, N-connection

For citation: Bukusheva A., Galaev S. 2022. Sub-Riemannian quasi-statistical structures on non-holonomic Kenmotsu manifolds. Applied Mathematics & Physics. 54(4): 205–212. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-205-212

---

1. Введение. Понятие неголономного многообразия Кенмоцу M введено первым из авторов настоящей статьи в работе [1]. Многообразие M повторяет все свойства многообразия Кенмоцу [16] за исключением одного: распределение D неголономного многообразия Кенмоцу не обязано быть инволютивным. В работе [2] неголономное многообразие Кенмоцу оснащается N-связностью ∇^N с кручением специального строения. N-связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии M заданием пары (∇, N), где ∇ – внутренняя линейная связность, $N : TM \to TM$ – эндоморфизм касательного расслоения многообразия M, такой, что $N\vec{\xi} = 0$, $N(D) \subset D$. Задавая подходящим образом эндоморфизм N, можно получить большинство из известных ранее классов связностей с кручением [3, 4, 7]. Интерес к связностям с кручением обусловлен использованием их в теоретической физике [12, 17]. Кручение внутренней связности полагается равным нулю.

Свойства N-связности ∇^N подробно изучены в работе [5]. N-связность ∇^N в указанной работе определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\nabla^N_X \in \Gamma(D)$, 2) $\nabla^N_X \vec{\xi} = 0$, 3) $\nabla^N_{\vec{\xi}} Y = [\vec{\xi}, Y] + NY$, 4) $\nabla^N_Y Z = \nabla_Y Z$, $X \in \Gamma(TM)$, $Y, Z \in \Gamma(D)$. Здесь ∇ – внутренняя линейная связность [5]. Кручение $S(X,Y)$ связности ∇^N находится по формуле [5]:

$$S(X,Y) = 2\omega(X,Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX,\ X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

В предлагаемой работе мы определяем субриманову квази-статистическую структуру как триплет (M, g, ∇^N), где M – почти контактное метрическое многообразие, а связность ∇^N связана с метрикой g посредством равенства

$$\nabla^N_X g(X,Y) - \nabla^N_Y g(X,Z) + \tilde{S}(X,Y,Z) - 2\omega(X,Y)\eta(Z) = 0,$$

где $\tilde{S}(X,Y,Z) = g(S(X,Y),Z)$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $\omega = d\eta$.

Расширение термина «квази-статистическая структура» путем добавления слова «субриманова» оправдано использованием в определяющем структуру равенстве внешней формы $\omega = d\eta$, относящейся к внутренней геометрии субриманова многообразия контактного типа [14]. Субриманово многообразие контактного типа является естественным обобщением почти контактного метрического многообразия. Из равенства

$$\nabla^N_X g(Y,Z) - \nabla^N_Y g(X,Z) + \tilde{S}(X,Y,Z) - 2\omega(X,Y)\eta(Z) = 0, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

следует равенство

$$\nabla_X g(Y,Z) = \nabla_Y g(X,Z), X, Y, Z \in \Gamma(D).$$

Последнее означает, что внутренняя связность ∇ совместима с метрикой g, являющейся ограничением исходного метрического тензора на распределении D.

Статистическая структура, введенная Лауритценом в [19], представляет собой пару (g, ∇), где g – псевдориманова метрика и ∇ – совместимая с ней линейная связность без кручения. Многообразие M, оснащенное статистической структурой, получает название статистического многообразия. К теории статистических структур тесно примыкает теория сопряженных линейных связностей, разработанная А.П. Норденом [9]. Совокупность связностей без кручения, сопряженных относительно метрики, составляет весьма интересный класс связностей, совместимых с метрикой. Этот класс наряду со связностью Леви – Чивиты – единственной самосопряженной связностью – включает другие связности, вызывающие интерес исследователей. Линейные связности, совместимые с римановой метрикой, находят интересные приложения в геометрическом истолковании ряда вопросов математической статистики [8, 10, 11].

Для описания геометрических структур в пространствах квантовых состояний Курозе вводит понятие квази-статистического многообразия, допуская наличие кручения у связности, совместимой с метрикой [18]. В работе [13] предложены способы построения квази-статистических структур.

Мы будем называть N-связность ∇^N продолжением связности ∇ посредством эндоморфизма N.

Задавая подходящим образом эндоморфизм N, можно получить большинство из известных ранее классов связностей с кручением – связность Схоутена-ван Кампена, связность Танаки – Вебстера и др. [5]. В то же время, в тех работах, в которых использовались связности с кручением ∇^N (для конкретных эндоморфизмов N), присутствие эндоморфизма N явно не обсуждалось. Исключение представляет работа [14] (см., также, [4]), где свойства эндоморфизма N, обозначаемого в работе символом «τ», получили конкретное описание.

Мотивация определения и изучения субримановой квази-статистической структуры (M, g, ∇^N) подкрепляется следующими обстоятельствами:

1. Как уже было сказано выше – класс связностей ∇^N широко представлен в современных геометрических исследованиях;

2. N-связность ∇^N возникает естественным образом как продолжение внутренней связности ∇, занимающей важное место в геометрическом моделировании задач неголономной механики и теоретической физики [17].

2. Основные результаты. Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m+1$, $m \geq 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ [15]. Здесь, в частности, η – 1 – форма и $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающие, соответственно, распределение $D : D = ker(\eta)$ и оснащение $D^{\perp}$ распределения D: $D^{\perp} = Span(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D называется распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_{\varphi}(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Нормальное почти контактное метрическое многообразие M называется неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$ [1].

Карта $k(x^i)$ $(i, j, k = 1, ..., n; a, b, c = 1, ..., n-1)$ многообразия M называется адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [6]. Пусть $P : TM \to D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^a)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ порождают распределение $D : D = Span(\vec{e}_a)$. Для неголономного поля базисов $(\vec{e}_i) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ выполняется соотношение $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Для нормального почти контактного метрического многообразия выполняется условие $\omega(\vec{\xi}, \cdot) = 0$. Это условие эквивалентно тому, что в адаптированных координатах $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Пусть $k(x^i)$ и $k'(x^{i'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Внутренней линейной связностью ∇ [15] на почти контактном метрическом многообразии называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \longrightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1)$\nabla_{f_1 X + f_2 Y} = f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y$,
2)$\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,
3)$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Пусть $\tilde{\nabla}$ связность Леви – Чивиты и $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ – ее коэффициенты. Воспользовавшись равенством

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}(\vec{e}_i g_{jk} + \vec{e}_j g_{ik} - \vec{e}_k g_{ij} + \Omega^l_{kj} g_{li} + \Omega^l_{ki} g_{lj}) + \Omega^m_{ij},$$

где $[\vec{e}_i, \vec{e}_j] = \Omega^m_{ij}\vec{e}_k$, убеждаемся в справедливости следующего предложения [15].

Предложение 1. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ связности Леви – Чивиты почти контактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид:*
$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}, \tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a + \psi^b_a, \tilde{\Gamma}^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a, \tilde{\Gamma}^a_{nn} = g^{ab}\partial_n \Gamma^n_b$,
где $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\psi^b_a = g^{bc}\omega_{ac}$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^b_a = g^{bc}C_{ac}$.

Здесь эндоморфизм $\psi : TM \longrightarrow TM$ определяется из равенства $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Выполняются также следующие соотношения: $C(X, Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(X, Y)$, $g(CX, Y) = C(X, Y)$.

Заметим, что если $\omega(\vec{\xi}, \cdot)$, выражения для коэффициентов $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ связности Леви – Чивиты почти контактного метрического многообразия в адаптированных координатах принимают более простой вид. Ненулевыми компонентами связности Леви – Чивиты остаются следующие компоненты:

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}, \tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a + \psi^b_a.$$

Заметим, что для многообразия Кенмоцу $C_{ab} = g_{ab}$ и $C^b_a = \delta^b_a$.

Пусть ∇ – внутренняя линейная связность, ∇^N – связность, однозначно определяемая условиями: 1) $\nabla^N_X \in \Gamma(D)$, 2) $\nabla^N_X \vec{\xi} = 0$, 3) $\nabla^N_{\vec{\xi}} Y = [\vec{\xi}, Y] + NY$, 4) $\nabla^N_Y Z = \nabla_Y Z$, $X \in \Gamma(TM)$, $Y, Z \in \Gamma(D)$.

На протяжении всей работы будем полагать, что кручение $T(X, Y)$ внутренней линейной связности ∇ равно нулю:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - P[X, Y] = 0.$$

Непосредственно проверяется, что кручение $S(X, Y)$ связности ∇^N находится по формуле:

$$S(X, Y) = 2\omega(X, Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX, X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Здесь $\omega(X, Y) = d\eta(X, Y)$.

Если $\nabla_X g(Y, Z) = 0$, $X, Y, Z \in \Gamma(D)$, то будет справедливо следующее равенство:

$$\nabla^N_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + (\tilde{\nabla}_X \eta)(Y)\vec{\xi} - \eta(Y)\tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X)(C + \psi - N)Y.$$

Непосредственно проверяется, что в этом случае в адаптированных координатах ненулевые компоненты G^i_{jk} связности ∇^N имеют вид $G^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $G^b_{na} = N^b_a$.

В случае внутренней линейной связности (не обязательно метрической) коэффициенты G^a_{bc} находятся из соотношения $\nabla_a \vec{e}_b = G^c_{ab}\vec{e}_c$.

Положим, $\tilde{S}(X,Y,Z) = g(S(X,Y),Z)$, $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(X,Y,Z) = g(S(X,Y),Z)$, $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ будут иметь следующий вид:

$\tilde{S}(\vec{e}_a,\vec{e}_b,\partial_n) = 2\omega_{ab}$, $\tilde{S}(\vec{e}_a,\partial_n,\vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a,\vec{e}_b)$, $\tilde{S}(\partial_n,\vec{e}_a,\vec{e}_b) = g(N\vec{e}_a,\vec{e}_b)$.

Понятие квази-статистической структуры на римановом многообразии введено в работе [18]. Триплет (M,g,∇) называется квази-статистической структурой, если выполняется следующее равенство [18]:

$$\nabla_X g(Y,Z) - \nabla_Y g(X,Z) + \tilde{S}(X,Y,Z) = 0, X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

Мы назовем триплет (M,g,∇^N) субримановой квази-статистической структурой (СРКС-структурой), если имеет место равенство

$$\Phi(X,Y,Z) = \nabla^N_X g(Y,Z) - \nabla^N_Y g(X,Z) + \tilde{S}(X,Y,Z) - 2\omega(X,Y)\eta(Z) = 0,$$

где $\tilde{S}(X,Y,Z) = g(S(X,Y),Z), X,Y,Z \in \Gamma(TM)$, $\omega = d\eta$. При этом будем полагать, что кручение внутренней связности ∇ равно нулю. Заметим, что если (M,g,∇^N) – субриманова квази-статистическая структура, то

$$\nabla_X g(Y,Z) - \nabla_Y g(X,Z) = 0, X,Y,Z \in \Gamma(D).$$

Можно констатировать следующее: если триплет (M,g,∇^N) является субримановой квази-статистической структурой, то соответствующая внутренняя связность ∇ совместима с ограничением метрики g на распределении D.

Теорема 1. *Триплет (M,g,∇^N) является СРКС-структурой почти контактного метрического многообразия M тогда и только тогда, когда $N = 2C$ и $\nabla_X g(Y,Z) - \nabla_Y g(X,Z) = 0$ $X,Y,Z \in \Gamma(D)$.*

Доказательство. Перепишем равенство

$$\nabla^N_X g(Y,Z) - \nabla^N_Y g(X,Z) + \tilde{S}(X,Y,Z) - 2\omega(X,Y)\eta(Z) = 0, X,Y,Z \in \Gamma(TM)$$

в адаптированных координатах.

Если $X = \partial_n, X = \vec{e}_b, X = \vec{e}_c$, то получаем: $\nabla^N_n g(\vec{e}_b,\vec{e}_c) + g(N\vec{e}_b,\vec{e}_c) = 0$.

Отсюда в адаптированных координатах имеем:

$$\partial_n g_{bc} - N^d_b g_{da} - N^d_c g_{bd} + N^d_b g_{da} = 0.$$

Окончательно получается равенство $N^a_b = 2C^a_b$. Теорема доказана.

Пусть теперь (M,g,∇^N) – СРКС-структура. Обращаясь к уравнению

$$\nabla^N_X g(Y,Z) - \nabla^N_Y g(X,Z) + \tilde{S}(X,Y,Z) - 2\omega(X,Y)\eta(Z) = 0,$$

получаем следующую модификацию теоремы 1:

Теорема 2. *Триплет (M,g,∇^N) в случае, когда ∇ – внутренняя метрическая связность, является субримановой квази-статистической структурой на неголономном многообразии Кенмоцу M тогда и только тогда, когда $N = 2\tilde{E}$, где $\tilde{E}X = X$, $\tilde{E}\vec{\xi} = 0$, $X \in \Gamma(D)$.*

Таким образом, в адаптированных координатах ненулевые компоненты G^i_{jk} связности ∇^N в рассматриваемом случае имеют вид

$$G^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}),\ G^b_{na} = 2\delta^a_b.$$

Пусть $\tilde{\nabla}^N$ – связность, сопряженная к связности ∇^N, входящей в СРКС-структуру (M,g,∇^N) :

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla^N_X Y,Z) + g(Y,\tilde{\nabla}^N_X Z).$$

Найдем компоненты $\tilde{G}^i_{jk}$ связности $\tilde{\nabla}^N$ в адаптированных координатах. Полагая $X = \vec{e}_a$, $Y = \vec{e}_b$, $Z = \vec{e}_c$, получаем $\tilde{G}^a_{bc} = G^a_{bc}$.

В случае, когда $X = \partial_n, X = \vec{e}_b, X = \vec{e}_c$, имеем: $\tilde{G}^b_{na} = 0$.

Все остальные компоненты $\tilde{G}^i_{jk}$ равны нулю.

Предложение 2. *Ненулевые компоненты $\tilde{G}^i_{jk}$ связности $\tilde{\nabla}^N$, сопряженной связности ∇^N, имеют вид: $\tilde{G}^a_{bc} = G^a_{bc}$. Или в случае метрической связности ∇ : $\tilde{G}^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.*

Тем самым установлено, что сопряженная связность к связности ∇^N также имеет строение N-связности с нулевым структурным эндоморфизмом N. Следующее утверждение является аналогом предложения 1 из работы [12].

Предложение 3. *Пусть M – почти контактное метрическое многообразие и пусть Q - тензорное поле типа (1,2), такое, что $g(Q(X,Z),Y) = g(X,Q(Y,Z))$. Тогда (M,g,∇^N) – субриманова квази-статистическая структура тогда и только тогда, когда $(M,g,\dot{\nabla}^N = \nabla^N + Q)$ – субриманова квази-статистическая структура.*

Доказательство. Воспользуемся равенствами, полученными в работе [12]:

$\dot{S}(X,Y) = S(X,Y) + Q(X,Y) - Q(Y,X)$,

$\dot{\nabla}^N_X g(Y,Z) = \nabla^N_X g(Y,Z) - g(Q(X,Y),Z) - g(Y,Q(X,Z))$.

Отсюда заключаем, что

$$\dot{\Phi}(X,Y,Z) = \Phi(X,Y,Z) + g(X,Q(Y,Z)) - g(Y,Q(X,Z)), X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

Здесь: $\dot{\Phi}(X,Y,Z) = \dot{\nabla}^N_X g(Y,Z) - \dot{\nabla}^N_Y g(X,Z) + \tilde{S}(X,Y,Z) - 2\omega(X,Y)\eta(Z) = 0$.

Тем самым, предложение доказано.

Ниже приводится адаптированное к нашему случаю определение квази-полу-вейлевой структуры, впервые опубликованное в работе [12]. Пусть M – почти контактное метрическое многообразие. Триплет (M,g,∇^N) называется квази-полу-вейлевой структурой, если выполняется следующее равенство:

$$\nabla^N_X g(Y,Z) + \eta(X)g(Y,Z) = \nabla^N_Y g(X,Z) + \eta(Y)g(X,Z) - \tilde{S}(X,Y,Z).$$

Перепишем последнее равенство в адаптированных координатах, имеем:

1) Если $X = \vec{e}_a$, $Y = \vec{e}_b$, $Z = \partial_n$, то отсюда следует, что $d\eta = 0$;

2) Если $X = \partial_n$, $X = \vec{e}_b$, $X = \vec{e}_c$, то получаем:

$$\nabla^N_n g(\vec{e}_a, \vec{e}_b) + g(\vec{e}_b, \vec{e}_c) = -g(N\vec{e}_b, \vec{e}_c).$$

Отсюда в адаптированных координатах имеем:

$$\partial_n g_{bc} - N^d_b g_{da} - N^d_c g_{bd} + g_{bc} = -N^d_b g_{da}.$$

Окончательно получается равенство

$$N^a_b = 2C^a_b + \delta^a_b.$$

Тем самым, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Триплет (M,g,∇^N) является квази-полу-вейлевой структурой почти контактного метрического многообразия M тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. Распределение D многообразия M инволютивно;

2. Структурный эндоморфизм N имеет следующее строение:

$N = 2C + \tilde{E}$, где $\tilde{E}X = X$, $\tilde{E}\vec{\xi} = 0$, $X \in \Gamma(D)$.

3. Внутренняя связность ∇ совместима с ограничением метрики g на распределении D:

$$\nabla_X g(Y,Z) - \nabla_Y g(X,Z) = 0, X,Y,Z \in \Gamma(D).$$

Для того, чтобы отказаться от требования инволютивности распределения D многообразия M, уточним определение квази-полу-вейлевой структуры следующим образом. А именно, назовем триплет (M,g,∇^N) субримановой квази-полу-вейлевой структурой, если выполняется следующее равенство:

$$\nabla^N_X g(Y,Z) + \eta(X)g(Y,Z) = \nabla^N_Y g(X,Z) + \eta(Y)g(X,Z) - \tilde{S}(X,Y,Z) + 2\omega(X,Y)\eta(Z), X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

Перепишем последнее равенство в адаптированных координатах.

Если $X = \partial_n$, $X = \vec{e}_b$, $X = \vec{e}_c$, то получаем:

$$\nabla^N_n g(\vec{e}_a, \vec{e}_b) + g(\vec{e}_b, \vec{e}_c) = -g(N\vec{e}_b, \vec{e}_c).$$

Отсюда в адаптированных координатах имеем:

$$\partial_n g_{bc} - N^d_b g_{da} - N^d_c g_{bd} + g_{bc} = -N^d_b g_{da}.$$

Окончательно получается равенство

$$N^a_b = 2C^a_b + \delta^a_b.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Триплет (M,g,∇^N) является субримановой квази-полу-вейлевой структурой почти контактного метрического многообразия M тогда и только тогда, когда:*

1. $N = 2C + \tilde{E}$, где $\tilde{E}X = X$, $\tilde{E}\vec{\xi} = 0$, $X \in \Gamma(D)$;

2. $\nabla_X g(Y,Z) - \nabla_Y g(X,Z) = 0, X,Y,Z \in \Gamma(D)$.

Теорема 5, фиксирующая связи между понятиями субримановой квази-статистической структуры и субримановой квази-полу-вейлевой структуры почти контактного метрического многообразия, является следствием теорем 1, 4.

Теорема 5. Пусть связности ∇^N и $\nabla^{\dot N}$ являются продолжениями одной и той же внутренней связности ∇ почти контактного метрического многообразия M. Тогда триплет (M, g, ∇^N) является субримановой квази-статистической структурой тогда и только тогда, когда триплет $(M, g, \nabla^{\dot N})$ является субримановой квази-полу-вейлевой структурой, где $\dot N = N + \tilde E$.

3. Заключение. Настоящая статья вносит дополнительный вклад в теорию N-связностей, используемых для развития и многочисленных приложений геометрии почти контактных метрических многообразий. Связность ∇^N, являющаяся продолжением внутренней связности ∇ посредством эндоморфизма N, в определенном смысле органично соответствует идеям геометризации обширного класса задач теоретической физики. Еще предстоит по существу прояснить роль N-связностей в известной геометрической интерпретации движения заряженной частицы в объединенной теории гравитационных и электромагнитных взаимодействий [17].

Список литературы

1. Букушева А. В. 2021. К геометрии неголономных многообразий Кенмоцу. Известия Алтайского государственного университета, 1(117): 84–87. DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-13

2. Букушева А. В. 2021. Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные обобщенной связностью Танаки – Вебстера. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 52: 42–51. DOI: 10.5922/0321-4796-2020-52-5

3. Галаев С. В. 2019. Золотое сечение в геометрии η-Эйнштейновых субримановых многообразий с N-связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 51(4): 465-–474. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474

4. Галаев С. В. 2016. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой. Сибирский математический журнал, 57(3(337)): 632-640. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.310

5. Галаев С. В. 2021. ∇^N-Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 70: 5–15. DOI: 10.17223/19988621/70/1

6. Галаев С. В. 2015. Почти контактные метрические пространства с N-связностью. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 15(3): 258–263.

7. Галаев С. В. 2016. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств. Чебышевский сборник, 17(3(59)): 53–63.

8. Морозова Е. А., Ченцов Н. Н. 1991. Естественная геометрия семейств вероятностных законов. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. Фундам. направления, 83: 133–265.

9. Норден А. П. 1976. Пространства аффинной связности. М., Наука, 432.

10. Рылов А. А. 1994. Связности, совместимые с римановой метрикой, в теории статистических многообразий. Изв. вузов. Матем., 3: 62–64.

11. Степанов С. Е., Степанова Е. С., Шандра И. Г. 2007. Сопряженные связности на статистических многообразиях. Изв. вузов. Матем., 10: 90–98.

12. Agricola I., Ferreira A. C. 2014. Einstein manifolds with skew torsion. Quart. J. Math., 65: 717–741.

13. Blaga A.M., Nannicini A. 2022. On Statistical and Semi-Weyl Manifolds Admitting Torsion. Mathematics, 10(990). DOI 10.3390/math10060990

14. Falbel E., Gorodski C. 1995. On contact sub-riemannian symmetric spaces. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 28(5): 571–589.

15. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 31(1): 35–46.

16. Kenmotsu K. 1972. A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 24: 93–103.

17. Krym V. R. 1999. Equations of Geodesic for a Charged Particle in the Unified Theory of Gravitational and Electromagnetic Interactions, Teor. Mat. Fiz., 119(3): 811–820.

18. Kurose T. 2007. Statistical Manifolds Admitting Torsion. Geometry and Something; Fukuoka Univ.: Fukuoka-shi, Japan.

19. Lauritzen S. L. 1987. Statistical manifolds. Differential Geometry in Statistical Inferences; IMS Lecture Notes Monograph Series; Institute of Mathematical Statistics: Hayward, CA, USA, 10: 96–163.

References

1. Bukusheva A. V. 2021. K geometrii negolonomnyh mnogoobrazij Kenmocu [Geometry of nonholonomic Kenmotsu manifolds]. Izvestiya Altajskogo gosudarstvennogo universiteta, 1(117): 84–87. DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-13

2. Bukusheva A. V. 2021. Negolonomnye mnogoobraziya Kenmocu, osnashchennye obobshchennoj svyaznost'yu Tanaki – Vebstera [Non-holonomic Kenmotsu manifolds equipped with generalized Tanaka-Webster connection]. Differencial'naya geometriya mnogoobrazij figur, 52: 42–51. DOI: 10.5922/0321-4796-2020-52-5

3. Galaev S. V. 2019. Zolotoe sechenie v geometrii η-Ejnshtejnovyh subrimanovyh mnogoobrazij s $N-$ svyaznost'yu [Golden ration in geometry of η-Einstein sub-Riemannian manifolds with N-Connection]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika, 51(4): 465–474. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474

4. Galaev S. V. 2016. Geometric interpretation of the Wagner curvature tensor in the case of a manifold with contact metric structure. Siberian Mathamatical journal, 57(3): 498–504. DOI: 10.1134/S0037446616030101

5. Galaev S. V. 2021. ∇^N-Ejnshtejnovy pochti kontaktnye metricheskie mnogoobraziya [∇^N-Einshein almost contact metric manifolds]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, 70: 5–15. DOI: 10.17223/19988621/70/1

6. Galaev S. V. 2015. Pochti kontaktnye metricheskie prostranstva s N-svyaznost'yu [Almost contact metric spaces with N-connection]. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya. Matematika. Mekhanika. Informatika, 15(3): 258–263.

7. Galaev S. V. 2016. Obobshchennyj tenzor krivizny Vagnera pochti kontaktnyh metricheskih prostranstv [Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces]. CHebyshevskij sbornik, 17(3(59)): 53–63.

8. Morozova E. A., CHencov N. N. 1991. Estestvennaya geometriya semejstv veroyatnostnyh zakonov [Natural geometry of families of probabilistic laws]. Itogi nauki i tekhn. VINITI. Sovremen. probl. matem. Fundam. napravleniya, 83: 133–265.

9. Norden A. P. 1976. Prostranstva affinnoj svyaznosti [Spaces of affine connection]. M., Nauka, 432.

10. Rylov A. A. 1994. Connections that are compatible with the metric, and statistical manifolds. Russian Mathematics, 38(3): 60–62 (in Russian).

11. Stepanov S. E., Stepanova E. S., SHandra I. G. 2007. Conjugate connections on statistical manifolds. Russian Mathematics, 51(10): 89–96 (in Russian).

12. Agricola I., Ferreira A. C. 2014. Einstein manifolds with skew torsion. Quart. J. Math., 65: 717–741.

13. Blaga A.M., Nannicini A. 2022. On Statistical and Semi-Weyl Manifolds Admitting Torsion. Mathematics, 10(990). DOI 10.3390/math10060990

14. Falbel E., Gorodski C. 1995. On contact sub-riemannian symmetric spaces. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 28(5): 571–589.

15. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 31(1): 35–46.

16. Kenmotsu K. 1972. A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 24: 93–103.

17. Krym V. R. 1999. Equations of Geodesic for a Charged Particle in the Unified Theory of Gravitational and Electromagnetic Interactions, Teor. Mat. Fiz., 119(3): 811–820.

18. Kurose T. 2007. Statistical Manifolds Admitting Torsion. Geometry and Something; Fukuoka Univ.: Fukuoka-shi, Japan.

19. Lauritzen S. L. 1987. Statistical manifolds. Differential Geometry in Statistical Inferences; IMS Lecture Notes Monograph Series; Institute of Mathematical Statistics: Hayward, CA, USA, 10: 96–163.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.09.2022
Поступила после рецензирования 08.11.2022
Принята к публикации 12.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Букушева Алия Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры геометрии, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского».
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

Галаев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой геометрии, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aliya Bukusheva – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Geometry, Saratov State University, Saratov, Russia

Sergei Galaev – PhD, Associate Professor, Head of the Department of Geometry, Saratov State University, Saratov, Russia