Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, № 3. С. 171–177.

УДК 51 – 741
MSC 34L30
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-171-177

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЕРМАКОВА СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

И. Н. Беляева[1], **И. К. Кириченко**[2], **Н. Н. Чеканова**[3]

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. В. Блажевичем*)

[1]Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

[2]Харьковский национальный автодорожный университет, Харьков, 61002, Украина

[3]Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,
Учебно-научный институт «Каразинская школа бизнеса»,
Харьков, 61001, Украина

E-mail: ibelyaeva@bsu.edu.ru, ikir238@gmail.com, natchek1976@gmail.com

Аннотация. Нелинейные дифференциальные уравнения достаточно широко используются в различных современных науках. В частности, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение Ермакова успешно применяется для решения задач в квантовой механике, электродинамике, в оптике, в теории упругости, для описания молекулярных структур, в гетероструктурах со сложной потенциальной функцией и во многих других разделах теоретической и математической физике. Однако эффективного метода решения нелинейных уравнений типа уравнения Ермакова в настоящее время нет. К примеру, при решении задач на собственные значения современные авторы уравнение Ермакова вычисляли прямыми численными методами. Как известно из работ самого Ермакова и других известных авторов, решение уравнения Ермакова определяется двумя линейно независимыми решениями подходящего так называемого присоединенного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Теория интегрирования линейных дифференциальных уравнений степенными рядами математически строго разработана, в частности, для присоединенных линейных уравнений к уравнению Ермакова доказана сходимость степенных рядов, представляющих решение присоединенных линейных дифференциальных уравнений. В настоящей работе эти линейно независимые решения присоединенного линейного уравнения были вычислены в виде степенных рядов с применением компьютерной системы аналитических вычислений MAPLE, и для ряда уравнений Ермакова построены их решения в виде степенных рядов, в общем, с произвольным максимальным показателем степени. Непосредственной подстановкой было показано, что так полученные степенные ряды удовлетворяют уравнению Ермакова. Полученные решения в виде степенных рядов, содержащих также и спектральный параметр, могут быть успешно применены к решению задач на собственные значения, в частности для решения стационарного уравнения Шредингера.

Ключевые слова: математическое моделирование, символьно-численные методы, комплексы программ, дифференциальные уравнения, нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, уравнение Ермакова, степенные ряды

Для цитирования: Беляева И. Н., Кириченко И. К., Чеканова Н. Н. 2022. Решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения Ермакова степенными рядами. Прикладная математика & Физика, 54(3): 171–177. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-171-177

SOLUTION OF THE NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF ERMAKOV BY POWER SERIES

I. N. Belyaeva[1], **I. K. Kirichenko**[2], **N. N. Chekanova**[3]

(*Article submitted by a member of the editorial board S. V. Blazhevich*)

[1]Belgorod National Research University, Belgorod, 308015, Russia
[2]Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, 61002, Ukraine
[3]Kharkiv National University named after V. N. KarazIin,
«Karazin Business school», Kharkiv, 61001, Ukraine
E-mail: ibelyaeva@bsu.edu.ru, ikir238@ gmail.com, natchek1976@gmail.com

Received August, 31, 2022

Abstract. Nonlinear differential equations are widely used in various modern sciences. In particular, the nonlinear ordinary differential equation of Ermakov is successfully used to solve problems in quantum mechanics, electrodynamics, optics, elasticity theory, to describe molecular structures, in heterostructures with a complex potential function and in many other branches of theoretical and mathematical physics. However, there is currently no effective method for solving nonlinear equations such as the Ermakov equation. For example, when solving eigenvalue problems, known modern authors calculated solutions of the Ermakov equation by direct numerical methods. As is known from the works of Ermakov himself and other modern authors, the solution of the Ermakov equation is determined by two linearly independent solutions of a suitable so-called attached linear differential equation of the second order. The theory of integration of linear differential equations by power series is mathematically strictly developed, in particular, for the attached linear equations to the Ermakov equation, the convergence of power series representing the solution of the attached linear differential equations is proved. In this paper, these linearly independent solutions of the attached linear equation were calculated in the form of power series using the MAPLE analytical computing computer system and for a number of Ermakov equations, their solutions were constructed in the form of power series, in general, with an arbitrary number terms. By direct substitution, it was shown that the power series obtained in this way satisfy the Ermakov equation. The obtained solutions in the form of power series containing also a spectral parameter can be successfully applied to solving eigenvalue problems, in particular for solving the stationary Schrodinger equation.

Key words: mathematical modeling, symbolic-numerical methods, software packages, differential equation, nonlinear ordinary differential equation of second order, equation of Ermakov, power series

For citation: Belyaeva I. N., Kirichenko I. K., Chekanova N. N. 2022. Solution of the nonlinear ordinary differential equation of Ermakov by power series. Applied Mathematics & Physics, 54(3): 171–177 (in Russian).

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-171-177

---

1. Введение. В свое время В. П. Ермаков – профессор математики Киевского университета – показал, что решения некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть построены при помощи решений соответствующих (присоединенных) линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для исследованных им некоторых нелинейных уравнений, включая разные варианты уравнения Риккати, а также предложенного своего уравнения, Ермаков представил конкретные общие формулы для решений нелинейных уравнений посредством решений соответствующих (присоединенных) линейных уравнений [8]. В частности, для своего предложенного нелинейного уравнения в виде

$$u^{''} + q(x)u + \frac{c}{u^3} = 0, \tag{1}$$

где $c = const$. Ермаков доказал, что общее решение уравнения (1) может быть записано следующим образом:

$$C_1 \cdot \int \frac{dx}{\xi^2(x)} + C_2 = \sqrt{C_1 \cdot \frac{u^2}{\xi^2(x)} - C}, \tag{2}$$

где $\xi(x)$ – какое-нибудь частное решение следующего присоединенного линейного уравнения

$$y^{''} + q(x)y = 0. \tag{3}$$

В работе [6] ее авторы выполнили подробный анализ более общих подобных нелинейных уравнений, включая и уравнение Ермакова (1). Данные авторы показали, что, исходя из представления (2), общее решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$u(x) = \sqrt{y_1^2(x) + c \cdot W^{-2} \cdot y_2^2(x)}, \tag{4}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения линейного уравнения (3), а величина $W = y_1 \cdot y_2^{'} - y_2 \cdot y_1^{'}$ – вронскиан этих решений, $W[y_1, y_2] \neq 0$. Значительно позже уравнение (1) было переоткрыто другими авторами [19], [20].

Может быть даже неожиданно, но нелинейное уравнение Ермакова нашло применение позже в современных областях математики и физики. К примеру, в работе [10] уравнение Ермакова было применено для построения нового варианта теории ВКБ-приближения в квантовой механике, который получил простую структуру, в частности, были получены практически полезные рекуррентные соотношения для ВКБ-разложений. В работах [18], [12] на основе уравнения Ермакова получены инварианты для описания движения нерелятивистской заряженной частицы в зависящем от времени магнитном поле. Ермаков установил также в [8], что линейное уравнение (3) допускает следующую фундаментальную систему решений

$$y_{1,2}(x) = y(x) \cdot exp\left(\pm\sqrt{-c} \cdot \int \frac{dx}{u^2(x)}\right), \tag{5}$$

где $u(x)$ есть какое-нибудь решение нелинейного уравнения (1). Используя этот результат, автор статьи [19] разработал численный метод решения задачи на собственные значения и успешно применил его к уравнению Шредингера для ангармонического осциллятора. В работе [21], посвященной решению уравнения Шредингера, появились сразу два нелинейные уравнения, и Ермакова, и Риккати, которые описывают эволюцию максимума и ширины волновой функции $\Psi(x,t)$. В статье [15] показано, что обсуждаемые нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения успешно применяются для описания процессов и явлений в нелинейной оптике, в теории нелинейной упругости, в молекулярных структурах, в квантовой теории поля в криволинейных пространствах и квантовой космологии (см. также [1], [13], [16], [17]).

2. Результаты и их обсуждение. Известно, что решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть получены в виде степенных или обобщенно степенных рядов, если уравнение имеет регулярные особые точки (см., например, [9], [11], [7]). В настоящей работе разработанная авторами компьютерная программа [2] применяется для решения конкретных уравнений Ермакова и представления его решений в виде рядов [3], [5], [14].

Для нахождения его двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в используемую программу достаточно ввести только функцию-коэффициент $q(x)$ из уравнения (3), если при этом уравнение (3) имеет регулярную особую точку, то следует на входе программы включить соответствующий флаг. В результате на выходе получим решение $u(x)$ с начальными данными $u(x_0)=1$, $u'(x_0)=0$, а также решение $y(x)$ с начальными данными $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=1$, оба решения в виде степенных или обобщенных степенных рядов. Подставляя эти решения в формулу (4), находим решение $u(x)$ уравнения Ермакова (1) в виде степенных рядов. Подставляя так найденное решение $u(x)$ в само уравнение Ермакова, получаем, что оно действительно ему удовлетворяет до определенной степени вычисленного степенного ряда.

Ниже представляем результаты расчетов для конкретных нелинейных уравнений Ермакова.

1. Пусть дано уравнение

$$u'' - xu = \frac{1}{u^3}. \tag{6}$$

Соответствующее линейное однородное уравнение имеет вид:

$$y'' - xy = 0. \tag{7}$$

При помощи математического пакета символьных вычислений Maple нами была разработана ранее программа решения данного дифференциального уравнения. Уравнение (7) не имеет особых точек. При помощи этой программы [2] найдено аналитическое решение уравнения (6) в виде степенных рядов, в которых максимальный показатель степени x, необходимый для построения степенного ряда, был выбран $N=26$:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{12960}x^9 + \frac{1}{1710720}x^{12} + \frac{1}{359251200}x^{15} + \frac{1}{109930867200}x^{18} + \\ + \frac{1}{46170964224000}x^{21} + \frac{1}{25486372251648000}x^{24};$$

$$y_2 = x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \frac{1}{45360}x^{10} + \frac{1}{7076160}x^{13} + \frac{1}{1698278400}x^{16} + \frac{1}{580811212800}x^{19} + \frac{1}{268334780313600}x^{22}. \tag{8}$$

Далее, используя найденные решения, модифицируем программу для нахождения решения соответствующего нелинейного уравнения (6). Таким образом, находим решение данного нелинейного уравнения

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{41}{720}x^6 + \frac{1}{48}x^7 - \frac{187}{4480}x^8 + \frac{271}{12960}x^9 - \frac{2537}{80640}x^{10} + \\ + \frac{533}{26880}x^{11} - \frac{2493259}{95800320}x^{12} + \frac{13759}{725760}x^{13} - \frac{8196943}{358758400}x^{14} + \frac{52755623}{2874009600}x^{15} - \\ - \frac{29201560681}{1394852659200}x^{16} + \frac{38774261}{2152550400}x^{17} - \frac{25366097010517}{1280474741145600}x^{18} + \frac{611375851}{34159656960}x^{19} - \\ - \frac{1165993680277}{60678438912000}x^{20} + \frac{172698415643953}{9603560558592000}x^{21} - \frac{25895906098288313}{1362425124578918400}x^{22}. \tag{9}$$

2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u'' + \frac{2}{x}u = \frac{1}{u^3}. \tag{10}$$

Его присоединенное линейное уравнение имеет вид

$$y'' + \frac{2}{x}y = 0. \tag{11}$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение (11) содержит особую точку $x = 0$. Из-за этого решение уравнения содержит логарифмические члены. Решение данного линейного однородного уравнения, которое получено с помощью разработанной программы [2] при $N = 9$, имеет следующий вид:

$$y_1 = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{18}x^4 + \frac{1}{180}x^5 - \frac{1}{2700}x^6 + \frac{1}{56700}x^7,$$

$$y_2 = -1 + (1 + 2ln(x))\,x + (2 - 2ln(x))\,x^2 + \left(-\frac{11}{9} + \frac{2}{3}ln(x)\right)x^3 + \left(\frac{29}{108} - \frac{1}{9}ln(x)\right)x^4 +$$

$$+\left(-\frac{43}{1350} + \frac{1}{90}ln(x)\right)x^5 + \left(\frac{97}{40500} - \frac{1}{1350}ln(x)\right)x^6. \qquad (12)$$

Выполняя компьютерный расчет в Maple, находим решение соответствующего нелинейного уравнения (10) в виде:

$$u(x) = \left(-1 + 2x + 4x^2 - \frac{76}{9}x^3 + \frac{35}{54}x^4 + \frac{4739}{1350}x^5 - \frac{7648}{3375}x^6 + \frac{22177}{30375}x^7 - \frac{1551071}{10206000}x^8 + \right.$$

$$+\frac{14072}{637875}x^9 - \frac{339401}{153090000}x^{10} + \frac{56069}{382725000}x^{11} - \frac{31019}{5740875000}x^{12} - \frac{1}{76545000}x^{13} +$$

$$+\frac{1}{3214890000}x^{14} + ln(x)\left(4x - 8x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{34}{3}x^4 - \frac{1132}{135}x^5 + \frac{439}{135}x^6 - \frac{8197}{10125}x^7 + \frac{8617}{60750}x^8 - \right.$$

$$\left. -\frac{731}{40500}x^9 + \frac{199}{121500}x^{10} - \frac{61}{607500}x^{11} + \frac{97}{27337500}x^{12}\right) - ln(x)^2\left(4x^2 - 8x^3 + \frac{20}{3}x^4 - \right.$$

$$\left.\left. -\frac{28}{9}x^5 + \frac{14}{15}x^6 - \frac{44}{225}x^7 + \frac{61}{2025}x^8 - \frac{7}{2025}x^9 + \frac{7}{24300}x^{10} - \frac{1}{60750}x^{11} + \frac{1}{182250}x^{12}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (13)$$

3. Пусть дано нелинейное дифференциальное уравнение

$$u'' + u = \frac{1}{u^3}. \qquad (14)$$

Тогда соответствующее ему линейное однородное уравнение имеет вид

$$y'' + y = 0. \qquad (15)$$

Применяя программу [2], указав во входных данных максимальный показатель степени x строимого степенного ряда, а также что $TypeV = 1$, т. е. уравнение не имеет особых точек, получаем два линейно независимых решения уравнения (15)

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 - \frac{1}{3628800}x^{10} + \frac{1}{479001600}x^{12},$$

$$y_2 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11}. \qquad (16)$$

Затем, проведя соответствующие расчеты в Maple, находим решение нелинейного уравнения (14):

$$u(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{19}{90}x^6 - \frac{559}{2520}x^8 - \frac{29161}{113400}x^{10}. \qquad (17)$$

4. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$u'' + xu = \frac{1}{u^3}. \qquad (18)$$

Его присоединенное линейное однородное уравнение

$$y'' + xy = 0. \qquad (19)$$

Применяя программу [2], [4], [5], [14], во входных данных ставим максимальный показатель степени $N = 24$, а также что $TypeV = 1$, т. е. уравнение не имеет особых точек, получаем два линейно независимых решения уравнения (19):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{1}{12960}x^9 + \frac{1}{1710720}x^{12} - \frac{1}{359251200}x^{15} +$$

$$+\frac{1}{109930867200}x^{18}-\frac{1}{46170964224000}x^{21},$$
$$y_2=x-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7-\frac{1}{45360}x^{10}+\frac{1}{7076160}x^{13}-\frac{1}{1698278400}x^{16}+$$
$$+\frac{1}{580811212800}x^{19}-\frac{1}{268334780313600}x^{22}. \quad (20)$$

Решение нелинейного уравнения (18) получаем в виде следующего степенного ряда:

$$u(x)=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^4-\frac{41}{720}x^6-\frac{1}{48}x^7-\frac{187}{4480}x^8-\frac{271}{12960}x^9-\frac{2537}{80640}x^{10}-$$
$$-\frac{533}{26880}x^{11}-\frac{2493259}{95800320}x^{12}-\frac{13759}{725760}x^{13}-\frac{8196943}{358758400}x^{14}-\frac{52755623}{2874009600}x^{15}-$$
$$-\frac{29201560681}{1394852659200}x^{16}-\frac{38774261}{2152550400}x^{17}-\frac{25366097010517}{1280474741145600}x^{18}-\frac{611375851}{34159656960}x^{19}-$$
$$-\frac{1165993680277}{60678438912000}x^{20}-\frac{172698415643953}{9603560558592000}x^{21}. \quad (21)$$

3. Заключение. Таким образом, в данной работе предложен способ решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений Ермакова при помощи решений соответствующих (присоединенных) линейных дифференциальных уравнений второго порядка, решение которых находится в виде сходящихся степенных рядов с применением мощной системы аналитических вычислений Maple и разработанной авторами программы. Установлено расчетами, что если максимальная степень степенного ряда в решении присоединенного линейного уравнения (3) равна N, то построенное с их помощью решение уравнения Ермакова (1) тоже в виде степенного ряда удовлетворяется до степени $(N-1)$. Однако разработанная программа позволяет находить решение линейного уравнения для произвольного значения N, поэтому решение уравнения Ермакова также может быть найдено до любой степени N. Важно отметить, что решения в виде степенных рядов содержит спектральный параметр, что упрощает решение задачи на собственные значения.

Список литературы

1. Белецкий В. В., Розов Н. Х. 2005. К 70-летию Л. М. Берковича. Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, 6(40): 5–14.

2. Беляева И. Н., Уколов Ю. А., Чеканов Н. А. 2005. Построение общего решения дифференциальных уравнений фуксовского типа в виде степенных рядов. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки в Отраслевом фонде алгоритмов и программ. М.: ВНТИЦ, №50200500089.

3. Беляева И. Н., Богачев В. Е., Чеканов Н. А. 2012. Алгоритм символьно-численного вычисления функции Грина дифференциальных уравнений второго порядка. Вестник РУДН, Серия Математика, Информатика, Физика, 3: 43–51.

4. Беляева И. Н., Богачев В. Е., Чеканов Н. А. 2012. Символьно-численное вычисление функции Грина обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Вестник Херсонского национального технического университета, 2(45): 50–55.

5. Беляева И. Н., Чеканов Н. А., Кириченко И. А., Чеканова Н. Н. 2019. Символьно-численные методы решения дифференциальных уравнений классической и квантовой механики. Харків: “ІСМА”, 420.

6. Беркович Л. М., Розов Н. Х. 1972. Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях вида $y''+a(x)y=f(x)y^{-\alpha}$. Дифференциальные уравнения, 8(11): 2076–2079.

7. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. 1997. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во «Факториал», 304.

8. Ермаков В. П. 1880. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде. Киев, Универ. Изв., 9: 1–25.

9. Матвеев Н. М. 1963. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 546.

10. Соловьев Е. А. 1984. Уравнение Милна и высшие порядки ВКБ приближения. Письма в ЖЭТФ, 39(2): 84–86.

11. Трикоми Ф. 1962. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностранной литературы, 352.

12. Чеканова Н. Н., Чеканов Н. А. 2013. Инварианты одномерного гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой. Вестник ХНТУ, 2(47): 372–374.

13. Athorne C. 1990. Geometry of Ermakov systems. Nonlinear Evolution Equations and Dynamical systems (NEEDS'90), Proc. of the 6th International Workshop, 16-26 July, USSR.: 100–103.

14. Belyaeva I., Kirichenko I., Ptashny O., Chekanova N., Yarkho T. 2021. Integrating linear ordinary fourth-order differential equations in the MAPLE programming environment. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3/4(111): 51–57.

15. Hansen R. M., Lidsey J. E. 2002. Ermakov-Pinney equation in scalar field cosmologies. Phys. Rev. D, 66. 023523.

16. Korsch H. J., Laurent H. 1981. Milne's differential equation and numerical solutions of the Shrodinger equation I. Bound-state energies for single- and double-minimum potentials. J. Phys. B.: At. Mol. Phys., 14: 4213–4230.

17. Korsch H. J., Laurent H., Mohlenkamp R. 1982. Milne's differential equation and numerical solutions of the Schrodinger equation II. Complex energy resonance states. J. Phys. B: At. Mol. Phys., 15: 1–14.

18. Lewis H. R. 1968. Motion of a time-dependent harmonic oscillator, and of a charged particle in a class of time-dependent, axially symmetric electromagnetic fields. Phys. Rev., 172(5): 1313–1315.

19. Milne W. 1930.The numerical determination of characteristic numbers. Phys. Rev., 35: 863–867.

20. Pinney E. 1950. The nonlinear differential equation. Proc. Amer. Math. Soc.: 581.

21. Schuch D. 2008. Riccati and Ermakov equations in Time-Dtpendent and Time-Independent Quantum Sestems. SIGMA 4, 043: 16.

References

1. Beleckij V. V., Rozov N. H. 2005. K 70-letiju L. M. Berkovicha [To the 70th anniversary of L. M. Berkovich]. Vestnik SamGU, Estestvennonauchnaja serija, 6(40): 5–14.

2. Belyaeva I. N., Ukolov Ju. A., Chekanov N. A. 2005. Postroenie obshhego reshenija differencial'nyh uravnenij fuksovskogo tipa v vide stepennyh rjadov [Construction of a general solution for differential Fuchs type equations in the form of power series]. Svidetel'stvo ob otraslevoj registracii razrabotki v Otraslevom fonde algoritmov i programm. M.: VNTIC, №50200500089.

3. Belyaeva I. N., Bogachev V. E., Chekanov N. A. 2012. Algoritm simvol'no-chislennogo vychislenija funkcii Grina differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka [Algorithm for symbolic-numerical calculation of a function Green's differential equations of the second order. Bulletin of RUDN University]. Vestnik RUDN, Serija Matematika, Informatika, Fizika, 3: 43–51.

4. Belyaeva I. N., Bogachev V. E., Chekanov N. A. 2012. Simvol'no-chislennoe vychislenija funkcii Grina obyknovennyh differencial'nyh uravnenij vtorogo i tret'ego porjadkov [Symbolic-numerical calculation of the Green's function ordinary differential equations of the second and third orders]. Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehnicheskogo universiteta, 2(45): 50–55.

5. Belyaeva I. N., Chekanov N. A., Kirichenko I. A., Chekanova N. N. 2019. Simvol'no-chislennye metody reshenija differencial'nyh uravnenij klassicheskoj i kvantovoj mehaniki [Symbolic-numerical methods of solution differential equations of classical and quantum mechanics.]. Harkiv: "ICMA", 420.

6. Berkovich L. M., Rozov N. H. 1972. Nekotorye zamechanija o differencial'nyh uravnenijah vida $y'' + a(x)y = f(x)y^{-\alpha}$ [Some remarks on differential equations $y'' + a(x)y = f(x)y^{-\alpha}$]. Differencial'nye uravnenija, 8(11): 2076 – 2079.

7. Zajcev V. F., Poljanin A. D. 1997. Spravochnik po linejnym obyknovennym differencial'nym uravnenijam [Handbook of linear ordinary differential equations]. M.: Izd-vo «Faktorial», 304.

8. Ermakov V. P. 1880. Differencial'nye uravnenija vtorogo porjadka [Second order differential equations]. Uslovija integriruemosti v konechnom vide. Kiev, Univer. Izv., 9: 1–25.

9. Matveev N. M. 1963. Metody integrirovanija obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Methods for integrating ordinary differential equations]. M.: Vysshaja shkola, 546.

10. Solov'ev E. A. 1984. Uravnenie Milna i vysshie porjadki VKB priblizhenija [The Milne equation and higher orders of the WKB approximation]. Pis'ma v ZhJeTF, 39(2): 84–86.

11. Trikomi F. 1962. Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. M.: Izd-vo inostrannoj literatury, 352.

12. Chekanova N. N., Chekanov N. A. 2013 Invarianty odnomernogo garmonicheskogo oscilljatora s zavisjashhej ot vremeni chastotoj [Invariants of a one-dimensional harmonic oscillator with dependence on time frequency]. Vestnik HNTU, 2(47): 372-374.

13. Athorne C. 1990. Geometry of Ermakov systems. Nonlinear Evolution Equations and Dynamical systems (NEEDS'90), Proc. of the 6th International Workshop, 16-26 July, USSR.: 100-103.

14. Belyaeva I., Kirichenko I., Ptashny O., Chekanova N., Yarkho T. 2021. Integrating linear ordinary fourth-order differential equations in the MAPLE programming environment. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3/4(111): 51-57.

15. Hansen R.M., Lidsey J.E. 2002. Ermakov-Pinney equation in scalar field cosmologies. Phys. Rev. D, 66. 023523.

16. Korsch H.J., Laurent H. 1981. Milne's differential equation and numerical solutions of the Shrodinger equation I. Bound-state energies for single- and double-minimum potentials. J. Phys. B.: At. Mol. Phys., 14: 4213-4230.

17. Korsch H.J., Laurent H., Mohlenkamp R. 1982. Milne's differential equation and numerical solutions of the Schrodinger equation II. Complex energy resonance states. J. Phys. B: At. Mol. Phys., 15: 1-14.

18. Lewis H.R. 1968. Motion of a time-dependent harmonic oscillator, and of a charged particle in a class of time-dependent, axially symmetric electromagnetic fields. Phys. Rev., 172(5): 1313–1315.

19. Milne W. 1930.The numerical determination of characteristic numbers. Phys. Rev., 35: 863-867.

20. Pinney E. 1950. The nonlinear differential equation . Proc. Amer. Math. Soc.: 581.

21. Schuch D. 2008. Riccati and Ermakov equations in Time-Dtpendent and Time-Independent Quantum Sestems. SIGMA 4, 043: 16.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.07.2022
Поступила после рецензирования 26.08.2022
Принята к публикации 31.08.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Беляева Ирина Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики, естественно-научных дисциплин и методик преподавания, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород , 308015, Россия

Кириченко Игорь Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Харьковский национальный автодорожный университет

ул. Ярослава Мудрого, 25, г. Харьков, 61002, Украина

Чеканова Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и математического моделирования, Харьковский национальный университета им. В. Н. Каразина, Учебно-научный институт «Каразинская школа бизнеса»

ул. Мироносицкая, 1, г. Харьков, 61001, Украина

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Irina Belyaeva – PhD, Associate Professor (Docent) of the Department of Computer Science, Natural Sciences and Teaching Methods, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia.

Igor Kirichenko – PhD, Professor of Department of higher Mathematics Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine.

Natalia Chekanova – PhD, Associate Professor (Docent) of the Department Information Technology and Mathematic Modeling Kharkiv National University named after V. N. Karazin, "Karazin Business school Kharkiv, Ukraine.