Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, № 2. С. 114–123.

УДК 517.3
MSC 31B15; 47G10; 44A15; 46E30

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-114-123

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИХ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ

А. В. Дзарахохов

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Э. Л. Шишкиной*)

Горский государственный аграрный университет, Владикавказ, 362040, Россия

E-mail: azambat79@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются дифференциальные операторы целого и дробного порядка, а также их собственные функции. Получены операторы преобразования, которые связывают собственные функции рассматриваемых дифференциальных операторов. Построенные операторы преобразования собственных функций могут быть использованы при решении задач Штурма – Лиувилля для уравнений, содержащих рассматриваемые в статье дифференциальные операторы.

Ключевые слова: оператор преобразования, собственная функция оператора, дробная производная Римана – Лиувилля, дробная производная Бесселя, функция Миттаг-Леффлера, функция Фокса – Райта

Для цитирования: Дзарахохов А. В. 2022. Операторы преобразования для собственных функций некоторых операторов дифференцирования и их дробных степеней. Прикладная математика & Физика. 54(2): 114–123.
DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-114-123

TRANSMUTATION OPERATORS FOR EIGENFUNCTIONS OF SOME DIFFERENTIATION OPERATORS AND ITS FRACTIONAL POWERS

Azamat Dzarakhokhov

(*Article submitted by a member of the editorial board E. L. Shishkina*)

Gorsky State Agrarian University, Vladikavkaz, 362040, Russia
E-mail: azambat79@mail.ru
Received March, 22, 2022

Abstract. The paper discusses differential operators of integer and fractional order, as well as their own functions. Transformation operators are obtained that relate the eigenfunctions of the differential operators under consideration. The constructed eigenfunction transformation operators can be used in solving Sturm – Liouville problems for equations containing the differential operators examined in the article.

Keywords: transmutation operator, operator eigenfunction, Riemann – Liouville fractional derivative, Bessel fractional derivative, Mittag-Leffler function, Fox – Wright function

For citation: Azamat Dzarakhokhov. 2022. Transmutation operators for eigenfunctions of some differentiation operators and its fractional powers. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 114–123. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-114-123

1. Введение. Данная статья посвящена операторам преобразования, то есть таким ненулевым операторам T, которые сплетают пару операторов A и B, то есть переводят оператор A в оператор B по формуле

$$T\,A = B\,T. \tag{1}$$

В настоящее время теория операторов преобразования привлекает все большее число исследователей. Общая теория операторов преобразования популяризована и систематически изложена Р. В. Кэрроллом [17, 18], Ж. Дельсартом [20, 19], В. А. Марченко [7, 8], Б. М. Левитаном [5], В. В. Катраховым [2] и С. М. Ситником [38]. Развитие этой теории и ее приложения к решению и исследованию дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, в том числе содержащих операторы Бесселя, было продолжено в [2, 11, 37]. Но несмотря на то, что теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, существует еще много различных нерешенных вопросов в этой области. В частности, все большую популярность приобретает задача отыскания операторов преобразования, переводящих собственную функцию одного оператора в собственную функцию другого оператора с заданными свойствами. Этот подход использован в [4, 1] при построении точных и приближенных решений прямых и обратных задач для уравнений Штурма – Лиувилля с различными потенциалами.

В этой работе рассмотрены различные операторы преобразования, сплетающие собственные функции различных дифференциальных операторов как целого, так и дробного порядков.

2. Собственные функции операторов дробного и целого порядков. Изучение собственных функций линейных операторов является классической темой. Для работы в рамках этой темы могут быть использованы инструменты гармонического анализа. Например, рассмотрим простейший оператор $\frac{d}{dt}$. Пусть $\lambda > 0$. Решением уравнения

$$\frac{d}{dt}f(t) = -\lambda f(t)$$

является, очевидно, функция

$$f(t) = c_0 e^{-\lambda t}.$$

Это собственная функция оператора дифференцирования первого порядка, где c_0 — константа, зависящая от граничных условий. Добавив, например, условие $f(0) = 1$, получим единственную собственную функцию оператора $\frac{d}{dt}$ вида

$$f(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Для классического обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = -\lambda f(t)$$

при условиях

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0$$

собственной функцией будет

$$f(t) = \cos(\sqrt{\lambda}t). \tag{3}$$

Для оператора Бесселя (см. [3], стр. 5)

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t}t^\gamma\frac{\partial}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

собственная функция, то есть такая функция, что

$$(B_\gamma)_t f(t) = -\lambda f(t), \tag{5}$$

удовлетворяющая условиям

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0,$$

имеет вид

$$f(t) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\sqrt{\lambda}t), \tag{6}$$

где j_ν — нормированная функция Бесселя первого рода вида (см. [3], стр. 10, [6])

$$j_\nu(t) = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}\, J_\nu(t), \tag{7}$$

J_ν — функция Бесселя первого рода. Нетрудно видеть, что

$$j_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}t) = \cos(\sqrt{\lambda}t).$$

Гармонический анализ, приспособленный для работы с оператором (4), разработан И. А. Киприяновым, Л. Н. Ляховым, С. С. Платоновым, Э. Л. Шишкиной и др.

В течение нескольких последних десятилетий внимание исследователей привлекает дробное интегро-дифференциальное исчисление. Появилось много различных конструкций производных и интегралов дробного (вещественного или комплексного) порядка. Появляется все больше моделей, представляющих собой интегро-дифференциальные уравнения с дробными производными в задачах вязкоупругости, электрохимии, теории управления, моделирования эпидемий и др. Более подробно о прикладных аспектах дробных операторов (см. [13]). Естественно, возникает вопрос о поиске собственных функций для различных дробных производных. Для многих дробных производных, реализующих положительные вещественные степени оператора $\frac{d}{dt}$, этот вопрос решен (см. [27], стр. 312; [9, 33]). Так, для дробной производной Герасимова – Капуто

$$(\mathcal{D}^\alpha_{0+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \qquad \alpha \notin \mathbb{N}, \qquad n = [\alpha]+1 \tag{8}$$

решение задачи

$$(\mathcal{D}^\alpha_{0+}f)(t) = -\lambda f(t), \qquad t > 0, \qquad \alpha > 0,$$

$$f^{(k)}(0) = b_k, \qquad k = 0, 1, ..., n-1, \qquad b_k \in \mathbb{C},$$

единственно и имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(-\lambda t^\alpha),$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг-Леффлера. Это целая, порядка $1/\alpha$ функция, определенная при $\alpha > 0$ рядом

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad \beta > 0. \tag{9}$$

При $0 < \alpha < 1$ и

$$f(0) = 1$$

собственная функция оператора $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}$ имеет вид

$$f(t) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^{\alpha}), \tag{10}$$

При $1 < \alpha < 2$ и собственная функция оператора D^{α}_{0+} при условиях

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0$$

также будет равна (10).

Поскольку

$$E_{1,1}(-\lambda t) = e^{-\lambda t}, \qquad E_{2,1}(-\lambda t^2) = \cos(\sqrt{\lambda} t),$$

то мы получим соответствие собственным функциям (2) и (3) операторов $\frac{d}{dt}$ и $\frac{d^2}{dt^2}$ при соответствующих начальных условиях.

Явное определение дробной степени оператора Бесселя $(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t}$ было представлено И. Г. Шпринкхёйзен-Купер в [39]. Это определение было получено в терминах гипергеометрических функций Гаусса с различными приложениями к УЧП. А. С. Макбрайд в [32] рассмотрел дробные степени гипер-бесселева оператора, которые включают в себя рассматриваемые в этой статье операторы.

Пусть $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$ для $f \in L[0,\infty)$ определяется формулой

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) = (IB^{\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma} \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)dy. \tag{11}$$

Свойства (11) приведены в [12, 35, 36].

Пусть $n = [\alpha] + 1$, $f \in L[0,\infty)$, $IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-} f, IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-} f \in C^{2n}(0,\infty)$. Определим левостороннюю дробную производную Бесселя на полуоси равенством

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) = (IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+} B^n_\gamma f)(x), \tag{12}$$

где $B^n_\gamma = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n$ — итерированный оператор Бесселя.

В [32] пространства, адаптированные для работы с операторами вида $B^{\alpha}_{\gamma,0+}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, были введены:

$$F_p = \left\{\varphi \in C^{\infty}(0,\infty) : x^k \frac{d^k \varphi}{dx^k} \in L^p(0,\infty) \text{ для } k = 0,1,2,...\right\}, \qquad 1 \le p < \infty,$$

$$F_\infty = \left\{\varphi \in C^{\infty}(0,\infty) : x^k \frac{d^k \varphi}{dx^k} \to 0 \text{ при } x \to 0+ \text{ и при } x \to \infty \text{ для } k = 0,1,2,...\right\}$$

и

$$F_{p,\mu} = \left\{\varphi : x^{-\mu}\varphi(x) \in F_p\right\}, \qquad 1 \le p \le \infty, \qquad \mu \in \mathbb{C}.$$

В [21] приведено решение задачи $0 < \alpha \le 1$ ($n = 1$):

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+} f)(t) = -\lambda f(t), \qquad \alpha > 0, \tag{13}$$

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \tag{14}$$

которое имеет вид

$$f(t) = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right), (1,1) \\ (1,\alpha), (\gamma+1, 2\alpha) \end{array} \middle| -\lambda t^{2\alpha}\right], \tag{15}$$

где ${}_p\Psi_q$ – функция Фокса – Райта, определенная рядом (см. [22, 41])

$${}_p\Psi_q(z) = {}_p\Psi_q\left[\begin{array}{c} (a_l,\alpha_l)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{array} \middle| z\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{l=1}^{p} \Gamma(a_l + \alpha_l k)}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}, \; z \in \mathbb{C}, \; a_l, b_j \in \mathbb{C}, \; \alpha_l, \beta_j \in \mathbb{R}, \; l = 1,...,p, \; j = 1,...,q. \tag{16}$$

Для случая гипер-бесселева оператора решение задачи, аналогичной (13)–(14), получено в [28, 29, 31].

При $\alpha = 1$ собственная функция (15) имеет вид:

$$f(t) = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\gamma}{2}+1, 1\right), (1,1) \\ (1,1), (\gamma+1, 2) \end{array} \middle| -\lambda t^2 \right] = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} \left(1+\frac{\gamma}{2}, 1\right) \\ (\gamma+1, 2) \end{array} \middle| -\lambda t^2 \right] =$$

$$= \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m \Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}+m\right)}{\Gamma(\gamma+1+2m)} \frac{t^{2m}}{m!}.$$

Используя формулу удвоения для гамма-функции вида [14]

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

получим

$$f(t) = 2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^m \Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}+m\right)}{2^{\gamma+2m} \Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}+m\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+m\right)} \frac{t^{2m}}{m!} =$$

$$= \frac{2^{\frac{\gamma-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{(\sqrt{\lambda} t)^{\frac{\gamma-1}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+m\right)} \frac{1}{m!} \left(\frac{\sqrt{\lambda} t}{2}\right)^{2m+\frac{\gamma-1}{2}} = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\sqrt{\lambda} t),$$

что соответствует функции (6).

Осталось проверить случай, когда $\gamma = 0$ в (15). При $\gamma = 0$ оператор Бесселя переходит во вторую производную $\frac{d^2}{dt^2}$. Имеем

$$f(t) = {}_2\Psi_2 \left[\begin{array}{c} (1,\alpha), (1,1) \\ (1,\alpha), (1, 2\alpha) \end{array} \middle| -\lambda t^{2\alpha} \right] = {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (1,1) \\ (1, 2\alpha) \end{array} \middle| -\lambda t^{2\alpha} \right] = E_{\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}),$$

что совпадает с (10) при замене α на 2α, которая осуществляется, поскольку левосторонняя дробная производная Бесселя на полуоси переходит в дробную производную Герасимова – Капуто порядка 2α.

3. Операторы преобразования, связывающие собственные функции различных операторов. В этом разделе мы рассмотрим операторы преобразования, связывающие собственные функции (2), (3), (6), (10) и (15). Подробное современное изложение можно найти в работах [2, 11, 37, 38].

Утверждение 3.1. *Если $u(\lambda, t)$ — функция, удовлетворяющая задаче*

$$u_{tt} = -\lambda u, \qquad u(\lambda, 0) = 1, \qquad u_t(\lambda, 0) = 0,$$

то функция

$$v(\lambda, t) = \widetilde{L} u(\lambda, t), \tag{17}$$

удовлетворяет задаче

$$v_t = -\lambda v, \qquad v(\lambda, 0) = 1.$$

В (17) $\widetilde{L}$ — оператор преобразования, действующий по формуле

$$\widetilde{L} u(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u(\lambda, s) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds.$$

Доказательство. Известно, что $u(\lambda, t) = \cos(\sqrt{\lambda} t)$, а $v(\lambda, t) = e^{-\lambda t}$, легко видеть, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda} s) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds = e^{-\lambda t}.$$

Это простое соотношение показывает, в частности, связь между диффузионными и волновыми процессами.

Справедливо и более общее утверждение. Пусть A — некоторый линейный оператор. Если функция $u(t, x)$ удовлетворяет абстрактной задаче Коши

$$u_{tt} = Au, \qquad u(0, x) = f(x), \qquad u_t(0, x) = 0,$$

то

$$v(t, x) = \widetilde{L} u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u(s, x) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \tag{18}$$

удовлетворяет абстрактной задаче Коши

$$v_t = Av, \qquad v(0, x) = f(x).$$

Результаты относительно такого оператора преобразования были получены в [10, 15, 16, 24, 34, 40]. В конспектах лекций Р. Херша [26] этот пример был приведен наряду с пятью другими примерами операторов преобразования.

Рассмотрим, как можно использовать (18) для получения решения задачи Коши для уравнения диффузии, если мы знаем решение задачи Коши для волнового уравнения. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(0,x) = f(x), \qquad u_t(0,x) = 0$$

решением является

$$u = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2},$$

тогда решение задачи

$$v_t = v_{xx}, \qquad v(0,x) = f(x)$$

имеет вид

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s+x) e^{-\frac{s^2}{4t}}\, ds. \tag{19}$$

Рассмотрим оператор Пуассона (вида [6])

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x) = \frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}} \int\limits_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1} f(t)\, dt, \qquad C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{20}$$

Для $f(x) \in C^2$, такой что $f'(0) = 0$, оператор Пуассона действует как оператор преобразования по формуле

$$\mathcal{P}_x^\gamma D^2 f = B_\gamma \mathcal{P}_x^\gamma f, \qquad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \qquad B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}.$$

Утверждение 3.2. *Если $u(\lambda, t)$ — функция, удовлетворяющая задаче*

$$u_{tt} = -\lambda u, \qquad u(\lambda, 0) = 1, \qquad u_t(\lambda, 0) = 0,$$

то

$$v(\lambda, t) = \mathcal{P}_t^\gamma u(\lambda, t), \tag{21}$$

удовлетворяет задаче

$$(B_\gamma)_t v = -v, \qquad v(\lambda, 0) = 1, \qquad v_t(\lambda, 0) = 0.$$

Доказательство. Нам известно, что $u(\lambda,t) = \cos(\sqrt{\lambda} t)$, а $v(\lambda,t) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\sqrt{\lambda} t)$. Для функции Бесселя первого рода J_ν следующее интегральное представление с использованием интеграла Пуассона с $\nu > -\frac{1}{2}$ (см. формула (2), стр. 60 в [1])

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\sqrt{\pi} 2^{\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^1 (1 - r^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \cos(xr) dr.$$

Тогда имеем

$$\frac{2C(\gamma)}{t^{\gamma-1}} \int\limits_0^t \left(t^2 - s^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1} \cos(\sqrt{\lambda} s)\, ds = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\sqrt{\lambda} t).$$

Это соотношение показывает связь между решением невозмущенного и возмущенного волнового уравнения.

Справедливо и более общее утверждение (см. [37], стр. 132, Теорема 34). Пусть A — некоторый линейный оператор, $\gamma > 0$. Дважды непрерывно дифференцируемое решение u=$u(x,t;\gamma)$ уравнения

$$Au = (B_\gamma)_t u, \quad u = u(x,t;\gamma), \qquad x = (x_1, ..., x_n), \quad t > 0 \tag{22}$$

связано с дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения

$$Aw = w_{tt}, \quad w = w(x,t), \qquad x = (x_1, ..., x_n), \quad t \in \mathbb{R} \tag{23}$$

формулой

$$u(x,t;\gamma) = \mathcal{P}_t^\gamma w(x,t), \tag{24}$$

где $\mathcal{P}_t^\gamma$ — оператор Пуассона, действующий по переменной t.

Учитывая (19), получим, что решение задачи

$$u_t = u_{xx} + \frac{\gamma}{x} u_x,$$

$$u(x,0;\gamma) = f(x), \qquad 0 \le x < \infty$$

имеет вид

$$u(x,t;\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}} \int\limits_0^x \left(x^2 - \xi^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s+\xi) e^{-\frac{s^2}{4t}}\, ds.$$

Теперь перейдем к дробной производной Герасимова – Капуто (8).

Утверждение 3.3. *Если $u(\lambda, t)$ — функция, удовлетворяющая задаче*

$$u_t = -\lambda u, \qquad u(\lambda, 0) = 1,$$

то функция

$$v_\alpha(\lambda, t) = \mathfrak{L}^\alpha u(\lambda, t) \tag{25}$$

удовлетворяет задаче

$$\mathcal{D}^\alpha_{0+} v_\alpha = -\lambda v_\alpha, \qquad v_\alpha(\lambda, 0) = 1, \qquad 0 < \alpha < 1$$

или задаче

$$\mathcal{D}^\alpha_{0+} v_\alpha = -\lambda v_\alpha, \qquad v_\alpha(\lambda, 0) = 1, \qquad (v_\alpha)_t(\lambda, 0) = 0, \qquad 1 < \alpha < 2.$$

В (25) $\mathfrak{L}^\alpha$ — оператор преобразования, действующий по формуле

$$\mathfrak{L}^\alpha u(\lambda, t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{1 + 2s^\alpha \cos(\alpha\pi) + s^{2\alpha}} u(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}, ts) s ds.$$

Доказательство. Известно, что $u(\lambda, t) = e^{-\lambda t}$, а $v_\alpha(\lambda, t) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)$. Для функции Миттаг-Леффлера справедливо представление (см. [25], формула (7.3)) вида

$$E_{\alpha,1}(-t^\alpha) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{1 + 2s^\alpha \cos(\alpha\pi) + s^{2\alpha}} e^{-ts} s ds, \qquad \alpha > 0,$$

которое и доказывает утверждение.

Утверждение 3.4. *Если $u(\lambda, t)$ — функция, удовлетворяющая задаче*

$$u_{tt} = -\lambda u, \qquad u(\lambda, 0) = 1, \qquad u_t(\lambda, 0) = 0,$$

то функция

$$v_\alpha(\lambda, t) = \mathfrak{M}^\alpha u(\lambda, t) \tag{26}$$

удовлетворяет задаче

$$\mathcal{D}^\alpha_{0+} v_\alpha = -\lambda v_\alpha, \qquad v_\alpha(\lambda, 0) = 1, \qquad 0 < \alpha < 1$$

или задаче

$$\mathcal{D}^\alpha_{0+} v_\alpha = -\lambda v_\alpha, \qquad v_\alpha(\lambda, 0) = 1, \qquad (v_\alpha)_t(\lambda, 0) = 0, \qquad 1 < \alpha < 2.$$

В (26) $\mathfrak{M}^\alpha$ — оператор преобразования, действующий по формуле

$$\mathfrak{M}^\alpha u(\lambda, t) = \frac{2}{\pi} \sin\frac{\alpha\pi}{2} \int\limits_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{1 + 2s^\alpha \cos\frac{\alpha\pi}{2} + s^{2\alpha}} u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}}, ts) ds,$$

Доказательство. Известно, что $u(\lambda, t) = \cos(\sqrt{\lambda} t)$, а $v_\alpha(\lambda, t) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)$. Для функции Миттаг-Леффлера справедливо представление (см. [25], формула (7.2)) вида

$$E_{\alpha,1}(-t^\alpha) = \frac{2}{\pi} \sin\frac{\alpha\pi}{2} \int\limits_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{1 + 2s^\alpha \cos\frac{\alpha\pi}{2} + s^{2\alpha}} \cos(ts) ds, \qquad \alpha > 0,$$

которое и доказывает утверждение.

Наконец, покажем связь между собственной функцией левосторонней дробной производной Бесселя на полуоси и собственной функцией дробной производной Герасимова – Капуто. Оператор преобразования, реализующий эту связь, конструируется из дробного интеграла Римана – Лиувилля

$$I^\gamma_{0+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\gamma-1}\, dt$$

и левого обратного оператора для оператора Пуассона (20) с $\gamma > 0$ и задается формулой [37]

$$(\mathcal{P}^\gamma_x)^{-1} H(x) = \frac{2\sqrt{\pi} x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(p - \frac{\gamma}{2}\right)} \left(\frac{d}{2x dx}\right)^p \int\limits_0^x H(z)(x^2 - z^2)^{p - \frac{\gamma}{2} - 1} z^\gamma dz, \tag{27}$$

где $p = \left[\frac{\gamma}{2}\right] + 1$.

Утверждение 3.5. *Если $u_\alpha(\lambda, t)$ — функция, удовлетворяющая задаче*

$$\mathcal{D}^\alpha_{0+} u_\alpha = -\lambda u_\alpha, \qquad u_\alpha(\lambda, 0) = 1, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

или задаче

$$\mathcal{D}^\alpha_{0+} u_\alpha = -\lambda u_\alpha, \qquad u_\alpha(\lambda, 0) = 1, \qquad (u_\alpha)_t(\lambda, 0) = 0, \qquad 1 < \alpha < 2,$$

то функция $v_\alpha^\gamma(\lambda,t)=\mathfrak{W}^\gamma u_\alpha(\lambda,t)$, *где* $\mathfrak{W}^\gamma$ *— оператор преобразования, действующий по формуле*

$$\mathfrak{W}^\gamma u_\alpha(\lambda,t)=\frac{2^\gamma\Gamma(\gamma)\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi t\Gamma(2\alpha)}(\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1}t^{1-\gamma}I_{0+}^\gamma u_\alpha(\lambda,t),$$

удовлетворяет задаче

$$(\mathcal{B}_{\gamma,0+}^\alpha f)(t)=-\lambda f(t),\qquad f(0)=1,\qquad f'(0)=0,\qquad 0<\alpha\leq 1.$$

Доказательство. Найдем сначала $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)}x^{1-\gamma}(I_{0+}^\gamma)_x u_\alpha(\lambda,t)$. Известно, что $u_\alpha(\lambda,t)=E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)$, тогда как

$$v_\alpha^\gamma(\lambda,t)=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1)\\(1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|-\lambda t^{2\alpha}\right].$$

Используя формулу (4.4.5) из [23] вида

$$\int\limits_0^\tau(\tau-z)^{\mu-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda z^\alpha)z^{\beta-1}dz=\Gamma(\alpha)\tau^{\mu+\beta-1}E_{\alpha,\mu+\beta}(-\lambda\tau^\alpha),\qquad \mu>0,\qquad \beta>0,$$

получим

$$I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha})=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^t(t-z)^{\gamma-1}E_{2\alpha,1}(-\lambda z^{2\alpha})dz=\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\gamma)}t^\gamma E_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda t^{2\alpha})$$

и

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)}t^{1-\gamma}I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha})=tE_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda t^{2\alpha}).$$

Теперь применим обратное интегральное преобразование Пуассона к $xE_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda x^{2\alpha})$. Применяя разложение (9), будем иметь:

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)}(\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1}t^{1-\gamma}I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha})=(\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1}tE_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda t^{2\alpha})=$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^p\int\limits_0^t z^{\gamma+1}E_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda z^{2\alpha})(t^2-z^2)^{p-\frac{\gamma}{2}-1}dz=$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^p\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k\lambda^k}{\Gamma(2\alpha k+\gamma+1)}\int\limits_0^t z^{2k\alpha+\gamma+1}(t^2-z^2)^{p-\frac{\gamma}{2}-1}dz,$$

где $p=\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1$. Проинтегрировав, получим

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)}(\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1}t^{1-\gamma}I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha})=$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^p\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k\lambda^k}{\Gamma(2\alpha k+\gamma+1)}\frac{\Gamma\left(p-\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1+k\alpha\right)}{2\Gamma\left(p+1+k\alpha\right)}t^{2\alpha k+2p}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\left(\frac{d}{2tdt}\right)^p\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(2\alpha k+\gamma+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1+k\alpha\right)}{\Gamma\left(p+1+k\alpha\right)}\frac{(-\lambda)^k}{k!}t^{2\alpha k+2p}.$$

Применяя формулу

$$\left(\frac{d}{2xdx}\right)^p x^{2\mu+2p}=\frac{\Gamma(\mu+p+1)}{\Gamma(\mu+1)}x^{2\mu},$$

найдем

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)}(\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1}t^{1-\gamma}I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha})=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(2\alpha k+\gamma+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1+k\alpha\right)}{\Gamma\left(1+k\alpha\right)}\frac{(-\lambda)^k}{k!}t^{2\alpha k}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1)\\(1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|-\lambda t^{2\alpha}\right].$$

Окончательно будем иметь

$$v_\alpha^\gamma(\lambda,t)=\frac{2^\gamma\Gamma(\gamma)\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi t\Gamma(2\alpha)}(\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1}t^{1-\gamma}I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha})=$$

$$= \frac{2^{\gamma}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \, {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c|} \left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1) \\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha) \end{array} - \lambda t^{2\alpha}\right].$$

4. Заключение. В этой работе представлены собственные функции, связанные с операторами дифференцирования первого и второго порядков, оператором Бесселя и их дробными степенями. Приведены формулы перехода между этими функциями. Рассмотренные операторы преобразования могут быть использованы для решения прямых и обратных задач Штурма – Лиувилля на конечных и бесконечных интервалах, разработанных В. В. Кравченко в [1]. Метод из [1] позволяет получать теоретические и числовые расчеты для различных величин, входящих в прямые и обратные задачи Штурма – Лиувилля.

Список литературы

1. Ватсон Г. Н. 1949. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Иниздат, 798.
2. Катрахов В. В., Ситник С. М. 2018. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления, 64(2): 211–426.
3. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука-Физматлит, 204.
4. Кравченко В. В., Шишкина Э. Л., Торба С. М. 2018. О представлении в виде ряда интегральных ядер операторов преобразования для возмущенных уравнений Бесселя. Матем. заметки, 104(4): 552–570.
5. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН. 6:2 (42): 102–143.
6. Левитан Б. М. 1984. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. Наука, 240.
7. Марченко В. А. 1972. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. Киев, Наукова Думка, 220.
8. Марченко В. А. 1977. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова Думка, 331.
9. Псху А. В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка, М., Наука, 199.
10. Резницкая К. Г. 1974. Связь между решениями задачи Коши для уравнений различных типов и обратные задачи. Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 5(1): 55–62.
11. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.
12. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2021. О двух классах операторов обобщенного дробного интегро-дифференцирования (с коротким историческим обзором). Итоги науки. 198: 109–122.
13. Шитикова М. В. 2022. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1: 3–40.
14. Abramowitz M., Stegun I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publ., Inc., New York, 470.
15. Balakrishnan A. V. 1958. Abstract Cauchy problems of the elliptic type, Bull. Amer. Math. Soc. 64: 290–291
16. Bragg L. R., Dettman J. W. 1968. Related problems in partial differential equations. Bull. Amer. Soc. 74: 375–378.
17. Carroll R. W. 1979. Transmutation and operator differential equations. Mathematics Studies, v. 37, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1–245.
18. Carroll R. W. 1982. Transmutation, scattering theory and special functions. Mathematics Studies, v. 69, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 456.
19. Delsarte J. 1938. Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. Acad. Sc., 206: 178–182.
20. Delsarte J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. J Math. Pures et Appl., 17: 213–230.
21. Dzarakhohov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Special Functions as Solutions to the Euler–Poisson–Darboux Equation with a Fractional Power of the Bessel Operator Mathematics. 9(13): 1–18.
22. Fox C. 1961. The *G* and *H*-functions as symmetrical Fourier kernels. Trans. Amer. Math. Soc. 98: 395–429.
23. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F. and Rogosin S. V. 2014. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, New York, 443.
24. Griego R., Hersh R. 1971. Theory of random evolutions with applications to partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 156: 405–418.
25. Haubold H. J., Mathai A. M., Saxena R. K. 2011. Mittag-Leffler Functions and Their Applications. Journal of Applied Mathematics, Article ID 298628: 1–51.
26. Hersh R., 1975. The method of transmutations, in: J.A. Goldstein (Ed.), Partial differential equations andrelated topics (Program, Tulane University, New Orleans, LA, 1974), Lecture Notes in Mathematics, vol. 446, Springer, Berlin, 264–282.
27. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 540.

28. Kiryakova V. 1994. Generalized Fractional Calculus and Applications. Pitman Res. Notes Math. 301. Longman Scientific & Technical, Harlow, Co-publ. John Wiley, New York, 360.
29. Kiryakova V. 2005. Obrechkoff Integral Transform and Hyper-Bessel Operators via G-function and Fractional Calculus Approach. Global Journal of Pure and Applied Mathematics Proceedings of the 13th Symposium of the Tunisian Mathematical Society, 1(3): 321–341.
30. Kravchenko V. V. 2020. Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems. A Method of Solution. In series: Frontiers in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham., 154.
31. Luchko Y. F., Kiryakova V. S. 2000. Generalized Hankel Transforms for Hyper-Bessel Differential Operators. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciencesi, 53: 8–17.
32. McBride, A. C., 1982. Fractional powers of a class of ordinary differential operators. Proc. London Math. Soc. 3 (45): 519–546.
33. Pskhu A. V. 2019. Fundamental solutions and Cauchy problems for an odd-order partial differential equation with fractional derivative. Electron. J. Differential Equations, 21: 1–13.
34. Romanov N. P. 1947. On one-parameter groups of linear transformation, I, Ann. of Math. 2(48): 216–233.
35. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2017. On fractional powers of Bessel operators. Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions. 8(1): 49–67.
36. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2019. A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov–Caputo type. *Mathematics*. 7(12): 1–21.
37. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020 Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam, 564.
38. Sitnik S. M. 2010. Transmutations and applications: a survey, http://arxiv.org/abs/1012.3741, 141.
39. Sprinkhuizen-Kuyper I. G. 1979. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator. J. Math. Analysis and Applications 72: 674–702.
40. Ungar A. 1971. On an integral transform related to the wave and to the heat equations, A. M. s. Notices 18: 1100.
41. Wright E. M. 1935. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. London Math. Soc. 10: 286–293.

References

1. Watson G. N. 1949. Theory of Bessel functions. Part 1. M.: Inizdat, 798.
2. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. 2018. Method of transformation operators and boundary value problems for singular elliptic equations. Contemporary mathematics. Fundamental directions, 64(2): 211–426.
3. Kipriyanov I. A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M.: Nauka-Fizmtlit, 1997.
4. Kravchenko V. V., Shishkina E. L., Torba S. M. 2018. On a Series Representation for Integral Kernels of Transmutation Operators for Perturbed Bessel Equations. Math. Notes, 104(4): 530–544.
5. Levitan B. M. 1984. Inverse Sturm–Liouville problems. M. Science, 240.
6. Levitan B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Mat. Nauk, 6:2(42): 102–143.
7. Marchenko V. A. 1972. Spectral theory of Sturm–Liouville operators. Kiev, Naukova Dumka, 220.
8. Marchenko V. A. 1977. Sturm–Liouville operators and their applications. Kiev, Naukova Dumka, 331.
9. Pskhu A. V. 2005. Partial differential equations of fractional order, Nauka, Moscow, 199.
10. Reznitskaya K. G. 1974. Connection between solutions of the Cauchy problem for equations of various types and inverse problems. Mathematical problems of geophysics. Novosibirsk: Computing Center SO AN USSR, 5(1): 55–62.
11. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. Moscow. Fizmathlit, 224.
12. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2021. On Two Classes of Generalized Fractional Operators (with Short Historical Survey of Fractional Calculus). Itogi nauki. 198: 109–122.
13. Shitikova M. V. 2022. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: a review. Mechanics of solids. 57(1): 1–33.
14. Abramowitz M., Stegun I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publ., Inc., New York, 470.
15. Balakrishnan A. V. 1958. Abstract Cauchy problems of the elliptic type, Bull. Amer. Math. Soc. 64: 290–291
16. Bragg L. R., Dettman J. W. 1968. Related problems in partial differential equations. Bull. Amer. Soc. 74: 375–378.
17. Carroll R. W. 1979. Transmutation and operator differential equations. Mathematics Studies, v. 37, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1–245.
18. Carroll R. W. 1982. Transmutation, scattering theory and special functions. Mathematics Studies, v. 69, North Holland, Amsterdam–New York - Oxford, 456.

19. Delsarte J. 1938. Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. Acad. Sc., 206: 178–182.
20. Delsarte J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. J Math. Pures et Appl., 17: 213–230.
21. Dzarakhohov A ., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Special Functions as Solutions to the Euler–Poisson–Darboux Equation with a Fractional Power of the Bessel Operator Mathematics. 9(13): 1–18.
22. Fox C. 1961. The G and H–functions as symmetrical Fourier kernels. Trans. Amer. Math. Soc. 98: 395–429.
23. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. 2014. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, New York, 443.
24. Griego R., Hersh R. 1971. Theory of random evolutions with applications to partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 156: 405–418.
25. Haubold H. J., Mathai A. M., Saxena R. K. 2011. Mittag-Leffler Functions and Their Applications. Journal of Applied Mathematics, Article ID 298628: 1–51.
26. Hersh R. 1975. The method of transmutations, in: J.A. Goldstein (Ed.), Partial differential equations andrelated topics (Program, Tulane University, New Orleans, LA, 1974), Lecture Notes in Mathematics,Vol. 446, Springer, Berlin, 264–282.
27. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 540.
28. Kiryakova V. 1994. Generalized Fractional Calculus and Applications. Pitman Res. Notes Math. 301. Longman Scientific & Technical, Harlow, Co-publ. John Wiley, New York, 360.
29. Kiryakova V. 2005. Obrechkoff Integral Transform and Hyper-Bessel Operators via G-function and Fractional Calculus Approach. Global Journal of Pure and Applied Mathematics Proceedings of the 13th Symposium of the Tunisian Mathematical Society, 1(3): 321–341.
30. Kravchenko V. V. 2020. Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems. A Method of Solution. In series: Frontiers in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham., 154.
31. Luchko Y. F., Kiryakova V. S. 2000. Generalized Hankel Transforms for Hyper-Bessel Differential Operators. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciencesi, 53: 8–17.
32. McBride A. C., 1982. Fractional powers of a class of ordinary differential operators. Proc. London Math. Soc. 3 (45), 519–546.
33. Pskhu A.V. 2019. Fundamental solutions and Cauchy problems for an odd-order partial differential equation with fractional derivative. Electron. J. Differential Equations, 21: 1–13.
34. Romanov N.P. 1947. On one-parameter groups of linear transformation, I, Ann. of Math. 2(48): 216–233.
35. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2017. On fractional powers of Bessel operators. Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions. 8(1): 49–67.
36. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2019. A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov–Caputo type. *Mathematics.* 7(12): 1–21.
37. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam, 564.
38. Sitnik S. M. 2010. Transmutations and applications: a survey, http://arxiv.org/abs/1012.3741, 141.
39. Sprinkhuizen-Kuyper I. G. 1979. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator. J. Math. Analysis and Applications 72: 674–702.
40. Ungar A. 1971. On an integral transform related to the wave and to the heat equations, A. M. s. Notices 18: 1100.
41. Wright E. M. 1935. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. London Math. Soc. 10: 286–293.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.03.2022
Поступила после рецензирования 05.05.2022
Принята к публикации 10.05.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Дзарахохов Азамат Валерианович – старший преподаватель кафедры математики и физики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Горский государственный аграрный университет»,
ул. Кирова, 37, Владикавказ, 362040, Россия
E-mail: azambat79@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Azamat Dzarakhohov – Senior Lecturer, Gorsky State Agrarian University, Vladikavkaz, Russia