УДК 517.9 : 51-74 *Краткое сообщение*

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВИДЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

И.Н. Беляева[1], И.К. Кирченко[2], Н.Н. Чеканова[3,4]
[1]ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
308015, Россия, Белгород, ул. Победы, 85
[2]Харьковский Национальный автомобильно-дорожный университет
61002, Украина, Харьков, ул. Ярослава Мудрого, 25
[3]Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
61022, Украина, Харьков, пл. Свободы, 4
[4]Учебно-научный институт «Каразинский школа бизнеса»
61002, Украина, Харьков, Мироносицкая, 1
ibelyaeva@bsu.edu.ru, ikir238@gmail.com, natchek1976@gmail.com

DOI: 10.26456/pcascnn/2022.14.284

Аннотация: В текущей научной литературе самые различные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения широко и успешно применяются для описания реальных процессов в различных областях естественных наук: в оптике, в теории упругости, молекулярной физике и др. К примеру, уравнения Ермакова и Риккати используют для решения квантового уравнения Шредингера, в электродинамике. Однако хорошо и надежно разработанных и общепринятых методов решения нелинейных дифференциальных уравнений, к сожалению, не имеется. Кроме того, большинство уравнений Риккати не интегрируются даже в квадратурах. В настоящей работе для построения решений нелинейных уравнений Ермакова и Риккати предлагается использовать соответствующие так называемые присоединенные линейные дифференциальные уравнения, решения последних находится в виде степенных рядов с помощью современных компьютерных систем аналитических вычислений. Предложенным способом в настоящей работе вычислены решения для некоторых нелинейных уравнений Ермакова и Риккати. Показано непосредственной подстановкой, что полученные решения в виде степенных рядов удовлетворяют рассмотренным нелинейным уравнениям Ермакова и Риккати с известной точностью. Для описания химических и физических свойств наноструктур на квантовом уровне могут быть использованы решения нелинейных уравнений Ермакова и Риккати. Решения нелинейных уравнений Ермакова и Риккати могут успешно применяться при решении стационарных и времени-зависящих уравнений Шредингера.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнение Ермакова, уравнение Риккати, математическое моделирование, степенные ряды, компьютерная система Maple.

1. Введение

В последнее время нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения сильно привлекают внимание, как в математике, так и в физике (см., например, [1]). К примеру, в работе [2] её автор показывает, что эволюция максимума и ширины волнового пакета для точного аналитического решения уравнения Шрёдингера описываются нелинейными уравнениями Ермакова [3] и Риккати [4]. В [5] получено точное решение гауссовского типа для зависящего от времени уравнения Шредингера, но в само решение входят два линейных уравнения и уравнение Риккати. На основе уравнения Ермакова автор работы [6] разработал новый экономный вариант ВКБ-приближения. Используя решения уравнения Ермакова были решены уравнения Шредингера [7] с разными видами потенциальной функции, включая потенциал с двумя минимумами [8], поэтому уравнение Ермакова может успешно применяться для расчета спектров сложных гетероструктур с многоямной потенциальной функцией. В [9] показано, что нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения успешно применяются для описания процессов в оптике, в теории упругости, в молекулярных структурах и других разделах физики. Однако, к примеру, уравнение Риккати при произвольных коэффициентах-функциях не интегрируется даже в квадратурах. В настоящей работе предлагается искать решения нелинейных уравнений, таких как уравнение Ермакова, уравнение Риккати в виде степенных рядов, используя для этого решения так называемых присоединенных к нелинейным уравнениям их линейные уравнения и с применением современных компьютерных систем аналитических вычислений, например, известный пакет Maple. Ниже представим нелинейные уравнение Ермакова и уравнение Риккати совместно с их присоединенными линейными уравнениями второго порядка.

2. Основная часть

Нелинейное уравнение Ермакова запишем в виде

$$w'' + p(x)w = c \cdot w^{-3}, \tag{1}$$

где c – постоянная. Как доказал Ермаков [3], а намного позже и другие авторы [7, 10, 11] решение уравнения (1) может быть вычислено по формуле:

$$w(x) = \sqrt{u(x)^2 + cW^{-2} \cdot v(x)^2}\ , \tag{2}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – линейно независимые решения присоединенного к уравнению (1) следующего линейного уравнения второго порядка

$$z'' + p(x) \cdot z = 0, \tag{3}$$

$W = u \cdot v' - v \cdot u' \neq 0$ – вронскиан решений $u(x)$ и $v(x)$.

Нелинейное уравнение Риккати нам удобно записать в виде

$$a(x)z' + a(x)z^2 + b(x)z + c(x) = 0\,. \tag{4}$$

К нему соответствующее линейное уравнение второго порядка запишется следующим образом:

$$a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = 0\,. \tag{5}$$

Если в линейном уравнении (5) выполнить подстановку $u' = u \cdot z$, то получим уравнение Риккати в виде (4). Решая линейное уравнение (5), находим его два линейно независимых решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$, а по этим решениям вычисляем частные решения $z_1(x)$ и $z_2(x)$ самого уравнения Риккати (4), а затем, переходя к уравнению Бернулли, можно вычислить и общее решение уравнения Риккати. Кроме того, вычислив два линейно независимых решения присоединенного линейного уравнения (5) общее решение уравнения Риккати (4) можно вычислить согласно следующему соотношению (см., например, [12])

$$z(x) = \frac{C_1 \cdot u_1' + C_2 \cdot u_2'}{C_1 \cdot u_1 + C_2 \cdot u_2}. \tag{6}$$

Как известно, теория построения фундаментальной системы решений для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в виде степенных и обобщенных степенных рядов хорошо разработана (см., например, [13]). На основе этой теории нами разработана программа в среде Maple, в частности, для вычисления двух линейно независимых решений линейного уравнения второго порядка [14]. Начальные условия принимались равными $u(0)=1$; $u'(0)=0$ и $v(0)=0$; $v'(0)=1$, так что их вронскиан $W=1$. Для поиска решений линейного уравнения на входе программы надо задать его коэффициенты-функции, максимальную степень степенного ряда, а также указать наличие или отсутствие регулярных особых точек. При помощи этой программы были найдены решения присоединенных линейных уравнений (3) и (5), а затем и решения нелинейных уравнений Ермакова и Риккати для ряда их конкретных уравнений, ниже представлены полученные результаты.

3. Результаты расчетов

Пример 1. $w'' - xw = w^{-3}$. Изложенным выше способом было найдено его решение в виде следующего степенного ряда до степени $N=10$

$$w = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{41}{720}x^6 + \frac{1}{48}x^7 - \frac{187}{4480}x^8 + \frac{271}{12960}x^9 - \frac{2537}{80640}x^{10}. \tag{7}$$

Пример 2. $w'' + w = w^{-3}$. Его решение может быть записано в виде

$$w = 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{19}{90}x^6 - \frac{559}{2520}x^8 + \frac{29161}{113400}x^{10}. \tag{8}$$

Пример 3. $w'' + xw = w^{-3}$. Данное уравнением имеет следующее решение

$$w(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{41}{720}x^6 - \frac{1}{48}x^7 - \frac{187}{4480}x^8 - \frac{271}{12960}x^9 - \frac{2537}{80640}x^{10}. \tag{9}$$

Пример 4. $w'' + \frac{2}{x}w = w^{-3}$. Присоединенное линейное уравнение содержит особую точку $x=0$. Из-за этого решение этого уравнения содержит логарифмические члены. Решение нелинейного уравнения Ермакова согласно формуле (4) будет следующим

$$
\begin{aligned}
w(x) = \Bigg(&-1+2x+4x^2-\frac{76}{9}x^3+\frac{35}{54}x^4+\frac{4739}{1350}x^5-\frac{7648}{3375}x^6+\frac{22177}{30375}x^7-\\
&-\frac{1551071}{10206000}x^8+\frac{14072}{637875}x^9-\frac{339401}{153090000}x^{10}+\frac{56069}{382725000}x^{11}-\frac{31019}{574087500}x^{12}-\\
&+\ln(x)\ \ 4x-8x^2-\frac{8}{3}x^3+\frac{34}{3}x^4-\frac{1132}{135}x^5+\frac{439}{135}x^6-\frac{8197}{10125}x^7+\frac{8617}{60750}x^8-\\
&-\frac{731}{40500}x^9+\frac{199}{121500}x^{10}-\frac{61}{607500}x^{11}+\frac{97}{27337500}x^{12}\Bigg)-\ln(x)^2\ \ 4x^2-8x^3-\\
&-\frac{20}{3}x^4+\frac{28}{9}x^5-\frac{14}{15}x^6+\frac{44}{225}x^7-\frac{61}{2025}x^8+\frac{7}{2025}x^9-\frac{7}{24300}x^{10}+\frac{1}{60750}x^{11}-\frac{1}{182250}x^{12}\Bigg)\Bigg)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Ниже приведем отдельные результаты вычислений частного решения $\tilde{z}(x)$ и общего решения $z(x)$ для некоторых уравнений Риккати.

Пример 5. $z'(x)+z^2-\frac{2}{x}\cdot z+\frac{2}{x^2}=0$. Здесь найдено два частных решения:

$$\tilde{z}_1(x)=\frac{2}{x},\ \tilde{z}_2(x)=\frac{1}{x} \tag{11}$$

и общее решение в виде

$$z(x)=\frac{(2x-C)}{x(x-C)}. \tag{12}$$

Пример 6. $z'(x)+z^2-xz-2=0$

$$\tilde{z}(x)=2x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5-\frac{74}{315}x^7+\frac{26}{189}x^9-\frac{598}{7425}x^{11} \tag{13}$$

$$z(x)=\frac{u_{11}(x)+C\cdot u_{21}(x)}{u_1(x)+C\cdot u_2(x)}, \tag{14}$$

где

$$
\begin{aligned}
u_1(x)&=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{15}x^6+\frac{1}{105}x^8+\frac{1}{945}x^{10}+\frac{1}{10395}x^{12},\\
u_{11}(x)&=2x+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\frac{8}{105}x^7+\frac{2}{189}x^9+\frac{4}{3465}x^{11},\\
u_2(x)&=x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5+\frac{1}{48}x^7+\frac{1}{384}x^9+\frac{1}{3840}x^{11},\\
u_{21}(x)&=1+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{8}x^4+\frac{7}{48}x^6+\frac{3}{128}x^8+\frac{11}{3840}x^{10}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Пример 7. $z'(x)+z^2-2z+1=0$. Частное и общее решения имеют вид

$$\tilde{z}(x)=\frac{x}{(x+1)}, \tag{16}$$

$$z(x)=\frac{u_{11}(x)+C\cdot u_{21}(x)}{u_1(x)+C\cdot u_2(x)}, \tag{17}$$

где

$$
\begin{aligned}
u_1(x)=1&-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{144}x^6-\frac{1}{840}x^7-\frac{1}{6760}x^8-\frac{1}{45360}x^9-\\
&-\frac{1}{403200}x^{10}-\frac{1}{435600}x^{12},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$u_{11}(x)=-x-x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{189}x^9-\frac{1}{24}x^5-\frac{1}{120}x^6-\frac{1}{720}x^7-\frac{1}{5040}x^8-$$
$$-\frac{1}{40320}x^9-\frac{1}{362880}x^{10}-\frac{1}{36300}x^{11},$$
$$u_2(x)=x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{48}x^7+\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{120}x^6+\frac{1}{720}x^7+\frac{1}{5040}x^8+$$
$$+\frac{1}{40320}x^9+\frac{1}{362880}x^{10}+\frac{1}{363880}x^{11}+\frac{1}{39916800}x^{12},$$
$$u_{21}(x)=1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{24}x^4+\frac{1}{20}x^5+\frac{7}{720}x^6+\frac{1}{630}x^7+\frac{1}{4480}x^8+$$
$$+\frac{1}{36288}x^9+\frac{1}{33080}x^{10}+\frac{1}{3326400}x^{11}.$$

Пример 8. $z'(x)+z^2+1=0$. Частное и общее решения запишем в виде

$$\tilde{z}(x)=-x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7-\frac{62}{2835}x^9-\frac{1382}{155925}x^{11}, \tag{19}$$

$$z(x)=\frac{u_{11}(x)+C\cdot u_{21}(x)}{u_1(x)+C\cdot u_2(x)}, \tag{20}$$

где
$$u_1(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8-\frac{1}{3628800}x^{10}+\frac{1}{479001600}x^{12},$$
$$\left.\begin{aligned}
u_{11}(x)&=-x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7-\frac{1}{362880}x^9-\frac{1}{39916800}x^{11},\\
u_2(x)&=x-\frac{1}{6}x^3++\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7-\frac{1}{3628800}x^9+\frac{1}{39916800}x^{11},\\
u_{21}(x)&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{403200}x^8-\frac{1}{3628800}x^{10}.
\end{aligned}\right. \tag{21}$$

4. Заключение

Предложенный способ решения уравнения Ермакова и Риккати позволяет эффективно и достаточно точно вычислить решение уравнения Ермакова и Риккати, как с помощью авторской программы для ЭВМ [14], так с другой подходящей в какой-либо компьютерной системы для описания свойств наносистем в других областях теоретической физики [15, 16]. Укажем, что если максимальная степень степенного ряда в решении присоединенного линейного уравнения (3) равна N, то построенное с их помощью решения нелинейных уравнений Ермакова и Риккати тоже в виде степенного ряда удовлетворяет этим уравненям до степени $(N-2)$. Поскольку разработанная авторами программа позволяет находить решение линейного уравнения для произвольного значения N, поэтому решения уравнений Ермакова и Риккати также может быть найдено до любой требуемой максимальной степени N.

Библиографический список:

1. **Карилло, С**. Уравнения Ермакова-Пинни и Эмдена-Фаулера: новые решения на основе преобразований

Беклунда нового типа / С. Карилло, Ф. Зулло // Теоретическая и математическая физика. – 2018. – V. 196. – № 3 . – С. 373-389. DOI: 10.4213/tmf9508.
2. **Schuch, D.** Riccati and Ermakov equations in time-dependent and time-independent quantum systems / D. Schuch // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2008. – V. 4. – Art. № 043. – 16 p. – 16 p. DOI: 10.3842/SIGMA.2008.043.
3. **Ермаков, В.П.** Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде / В.П. Ермаков // Университетские известия. Киев. – 1880. – № 9. – P. 1-25.
4. **Зайцев, В.Ф.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
5. **Husimi, K.** Miscellanea in elementary quantum mechanics, II / K. Husimi // Progress of Theoretical Physics. – 1953. – V. 9. – № 4. – P. 381-402. DOI: 10.1143/ptp/9.4.381.
6. **Соловьев, Е.А.** Уравнение Милна и высшие порядки ВКБ приближения / Е.А. Соловьев // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1984. – Т. 39. – Вып. 2. – С. 84-86.
7. **Milne, W.E.** The numerical determination of characteristic numbers / W.E. Milne // Physical Review. – 1930. – V. 35. – I. 7. – P. 863-867. DOI: 10.1103/PhysRev.35.863.
8. **Korsch, H.J.** Milne’s differential equation and numerical solutions of the Shrodinger equation I. Bound-state energies for single- and double-minimum potentials / H.J. Korsch, H. Laurent // Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics. – 1981. – V. 14. – № 22. – P. 4213-4230. DOI: 10.1088/0022-3700/14/22/008.
9. **Hansen, R.M**. Ermakov-Pinney equation in scalar field cosmologies / R.M. Hansen, J.E. Lidsey // Physical Review D. – 2002. – V. 66. – I. 2. – P. 023523-1-023523-8. DOI: 10.1103/PhysRevD.66.023523.
10. **Pinney, E.** The nonlinear differential equation $y''+p(x)y+cy^{-3}=0$ / E. Pinney // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1950. – V. 1. – № 5. – P. 581. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0037979-4.
11. **Беркович, Л.М.** Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях вида $y''+a(x)y = f(x)y^{\alpha}$ / Л.М. Беркович, Н.Х. Розов // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8. – № 11. – С. 2076-2079.
12. **Гурса, Э.** Курс математического анализа. Дифференциальные уравнения / Э. Гурса. – М.-Л.: ГТТИ, 1933. – Т. 2. – Ч. 2. – 287 с.
13. **Матвеев, Н.М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – 2-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1963. – 546 с.
14. **Беляева, И.Н.** Построение общего решения дифференциальных уравнений фуксовского типа в виде степенных рядов / И.Н. Беляева, Ю.А. Уколов, Н.А. Чеканов. Зарегистрировано в Отраслевом фонде алгоритмов и программ. – М.: ВНТИЦ, 2005. – № 50200500089.
15. **Belyaeva, I.N.** Integrating linear ordinary fourth-order differential equations in the MAPLE programming environment / I Belyaeva, I. Kirichenko, O. Ptashny, N. Chekanova, T. Yarkho // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – № 3/4 (111). – P. 51-57. DOI: 10.15587/1729-4061.2021.233944.
16. **Belyaeva, I.N.** Computer calculation of Green functions for third-order ordinary differential equations / I.N. Belyaeva, N.A. Chekanov, L.V. Krasovskaya, N.N. Chekanova // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – V. 259. – I. 3. – P. 265-271. DOI: 10.1007/s10958-021-05615-9.

References:

1. Carillo S., Zullo F. Ermakov–Pinney and Emden–Fowler equations: new solutions from novel bäcklund transformations, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2018, vol. 196, issue 3, pp. 1268-1281. DOI: 10.1134/S0040577918090027.
2. Schuch D. Riccati and Ermakov equations in time-dependent and time-independent quantum systems, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2008, vol. 4, art. no 043. – 16 p. – 16 p. DOI: 10.3842/SIGMA.2008.043.
3. Ermakov V.P. Differentsial'nye uravneniya vtorogo poryadka. Usloviya integriruemosti v konechnom vide [Second order differential equations. Integrability conditions in the final form], *Universitetskie izvestiya. Kiev [University Proceedings. Kiev]*, 1880, no 9, pp. 1-25. (In Russian).
4. Zajcev V.F., Polyanin A.D. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. (In Russian).
5. Husimi K. Miscellanea in elementary quantum mechanics, II, *Progress of Theoretical Physics*, 1953, vol. 9, no. 4, pp. 381-402. DOI: 10.1143/ptp/9.4.381.
6. Solov'ev, E.A. Uravnenie Milna i vysshie poryadki VKB priblizheniya [The Milne equation and higher orders of the WKB approximation], *Pis'ma v zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki [JETP Letters]*, 1984, vol. 39, issue 2, pp. 84-86. (In Russian).
7. Milne W.E. The numerical determination of characteristic numbers, *Physical Review*, 1930, vol. 35, issue 7, pp. 863-867. DOI: 10.1103/PhysRev.35.863.

8. Korsch H.J., Laurent H. Milne's differential equation and numerical solutions of the Shrodinger equation I. Bound-state energies for single- and double-minimum potentials, *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 1981, vol. 14, no. 22, pp. 4213-4230. DOI: 10.1088/0022-3700/14/22/008.
9. Hansen R.M., Lidsey J.E. Ermakov-Pinney equation in scalar field cosmologies, *Physical Review D*, 2002, vol. 66, issue 2, pp. 023523-1-023523-8. DOI: 10.1103/PhysRevD.66.023523.
10. Pinney E. The nonlinear differential equation $y''+p(x)y+cy^{-3}=0$, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 1, no. 5, p. 581. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0037979-4.
11. Berkovich L.M., Rozov N.Kh. Nekotorye zamechaniya o differentsial'nykh uravneniyakh vida $y''+a(x)y = f(x)y^{\alpha}$ [Some remarks on differential equations of the form $y''+a(x)y = f(x)y^{\alpha}$], *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equation]*, 1972, vol. 8, issue 11, pp. 2076-2079. (In Russian).
12. Gursa E. *Kurs matematicheskogo analiza. Differentsial'nye uravneniya* [Course of mathematical analysis. Differential equations]. Moscow, Leningrad, State Technical and Theoretical Publishing House, 1933. – vol. 2. part 2, 287 p. (In Russian)
13. Matveev N.M. *Metody integrirovaniya obyknovennykh differencial'nykh uravnenij* [Methods for integrating ordinary differential equations], 2nd ed. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1963, 546 p. (In Russian).
14. Belyaeva I. N., Ukolov Yu.A., Chekanov N.A. *Postroenie obshchego resheniya differencial'nykh uravnenij fuksovskogo tipa v vide stepennykh ryadov [Construction of a general solution of differential equations of Fuchsian type in the form of power series]*. Moscow, The All-Russian Scientific and Technical Information Center, 2005, no. 50200500089. (In Russian).
15. Belyaeva I., Kirichenko I., Ptashny O., Chekanova N., Yarkho T. Integrating linear ordinary fourth-order differential equations in the MAPLE programming environment, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2021, no. 3/4 (111), pp.51-57. DOI: 10.15587/1729-4061.2021.233944.
16. Belyaeva I.N., Chekanov N.A., Krasovskaya L.V., Chekanova N.N. Computer calculation of Green functions for third-order ordinary differential equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 259, issue 3, pp. 265-271. DOI: 10.1007/s10958-021-05615-9.

Short Communication

SOLVING OF SOME NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE FORM OF POWER SERIES

I.N. Belyaeva[1], I.K. Kirichenko[2], N.N. Chekanova[3,4]
[1]*Belgorod State University, Belgorod, Russia*
[2]*Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine*
[3]*Kharkiv National University named after V.N Karamzin, Kharkiv, Ukraine*
[4]*Karazin Business School, Kharkiv, Ukraine*

DOI: 10.26456/pcascnn/2022.14.284

Abstract: In the current scientific literature, a variety of nonlinear ordinary differential equations are widely and successfully used to describe real processes in various fields of natural sciences: optics, elasticity theory, molecular physics, etc. For example, the Ermakov and Riccati equations are used to solve the quantum Schrodinger equation, in electrodynamics. However, unfortunately, there are no well- and reliably developed and generally accepted methods for solving nonlinear differential equations. In addition, most of the Riccati equations are not integrated even in quadratures. In this paper, to construct solutions to the nonlinear Ermakov and Riccati equations, it is proposed to use the corresponding so-called connected linear differential equations, the solutions of the latter are in the form of power series using modern computer systems of analytical calculations.In this paper, solutions for some nonlinear Ermakov and Riccati equations are calculated using this proposed method. It is shown by direct substitution that the obtained solutions in the form of power series satisfy the considered nonlinear equations of Ermakov and Riccati with a known accuracy. Solutions of nonlinear Ermakov and Riccati equations can be used to describe the chemical and physical properties of nanostructures at the quantum level. Besides, solutions of nonlinear Ermakov and Riccati equations can be successfully applied in solving stationary and time-dependent Schrodinger equations.

Keywords: ordinary differential equations, Ermakov equation, Riccati equation, mathematical modeling, power series, Maple computer system.

Беляева Ирина Николаевна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры информатики, естественнонаучных дисциплин и методик преподавания ФГАОВО «Белгородский государственный национальный

исследовательский университет»
Кириченко Игорь Константинович – д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры высшей математики Харьковского национального автодорожного университета
Чеканова Наталья Николаевна – к.ф.–м.н., доцент, Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина, доцент кафедры информационных технологий и математического моделирования Харьковского учебно-научного института «Каразинская школа бизнеса»

Irina N. Belyaeva – Ph. D, Docent, Department of Computer Science, Natural Sciences and Teaching Methods, Belgorod National Research University
Igor K. Kirichenko – Dr. Sc., Professor, Department of higher Mathematics, Kharkiv National Automobile and Highway University
Natalia N. Chekanova – Ph. D, Docent, Kharkiv National University named after V. N. Karazin, Department of Information Technology and Mathematic Modeling, Karazin Business School

Поступила в редакцию/received: 04.09.2022; после рецензирования/revised: 30.09.2022; принята/accepted 02.10.2022.