УДК 517.983

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ С ГЕНЕРАТОРОМ ПРОИНТЕГРИРОВАННОЙ КОСИНУС-ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ*

А.В. Глушак

Белгородский государственный университет
308007 г. Белгород, ул. Студенческая, 14, e-mail: glushak@bsu.edu.ru

Установлены формулы, связывающие решение задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с проинтегрированной косинус-оператор-функцией.

Ключевые слова: равномерная корректность задачи Коши, проинтегрированная косинус-оператор-функция, операторная функция Бесселя.

1. Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело (см. [1 – 3]) к понятию проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной косинус-оператор-функции (в дальнейшем ПКОФ).

В работе [4] в банаховом пространстве E установлены формулы, связывающие ПКОФ $C_\alpha(t)$ при $\alpha \ge 1$ с разрешающим оператором $Y_k(t)$ задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = 0, \tag{2}$$

где параметр $k > 0$.

Операторная функция $Y_k(t)$ введена автором в работе [5] и названа операторной функцией Бесселя (в дальнейшем ОФБ). Множество операторов A, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k. Таким образом, если $A \in G_k$, то решение задачи (1), (2) существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных, при этом $u(t) = Y_k(t)u_0$, $u_0 \in D(A)$ и

$$\|Y_k(t)\| \le Me^{\omega t}, \quad M \ge 1, \quad \omega \ge 0. \tag{3}$$

Отметим, что условие равномерной корректности задачи (1), (2) и свойства ОФБ $Y_k(t)$ приведены в [5].

Напомним далее определение ПКОФ.

Определение. Пусть $\alpha > 0$. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $C_\alpha(t)$, $t \ge 0$ называется α раз ПКОФ, если:

1) $$2\Gamma(\alpha)C_\alpha(t)C_\alpha(s) = \int_t^{t+s}(t+s-r)^{\alpha-1}C_\alpha(r)dr - \int_0^s (t+s-r)^{\alpha-1}C_\alpha(r)dr +$$

$$+ \int_{t-s}^{t}(r-t+s)^{\alpha-1}C_\alpha(r)dr + \int_0^s (r+t-s)^{\alpha-1}C_\alpha(r)dr, \quad t > s > 0;$$

2) $C_\alpha(0) = 0$;

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07-01-00131.

3) для любого $x \in E$ функция $C_\alpha(t)x$ непрерывна по $t \geq 0$;

4) существуют постоянные $M > 0$, $\omega \geq 0$ такие, что

$$\|C_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Генератор A ПКОФ $C_\alpha(t)$ определяется следующим образом: $D(A)$ – множество элементов $x \in E$ таких, что существует элемент $y \in E$, удовлетворяющий равенству

$$C_\alpha(t)x - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x = \int_0^t (t-r)C_\alpha(r)ydr, \qquad t \geq 0, \tag{5}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера; в этом случае полагаем $Ax = y$.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$ и оператор A является генератором α раз ПКОФ $C_\alpha(t)$, $u_0 \in D(A)$. Тогда задача (1), (2) при $k = 2\alpha$ равномерно корректна, т.е. $A \in G_{2\alpha}$, и соответствующая ОФБ представима в виде

$$Y_{2\alpha}(t)u_0 = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}\; t^\alpha}\left(C_\alpha(t)u_0 - \int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau \right), \tag{6}$$

где $P_\nu(\cdot)$ – сферическая функция Лежандра.

Доказательство. Как уже было отмечено ранее, в работе [4] эта теорема доказана для случая $\alpha \geq 1$. Приведем другое доказательство этой теоремы, которое позволяет рассмотреть и случай $\alpha > 0$. Отметим, что изменения касаются лишь проверки того факта, что определяемая равенством (6) функция $Y_{2\alpha}(t)u_0$ является решением задачи (1), (2).

Вычислим первую и вторую производные функции $Y_{2\alpha}(t)u_0$. Имеем

$$Y'_{2\alpha}(t)u_0 = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{\alpha + P'_{\alpha-1}(1)}{t^{\alpha+1}} C_\alpha(t)u_0 + \frac{1}{t^\alpha}C'_\alpha(t)u_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha+1}{t^{\alpha+1}}\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau + \frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_0^1 \tau\, P''_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau \right),$$

$$Y''_{2\alpha}(t)u_0 = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{P''_{\alpha-1}(1) + 2(\alpha+1)P'_{\alpha-1}(1) + \alpha^2 + \alpha}{t^{\alpha+2}} C_\alpha(t)u_0 - \right.$$

$$- \frac{2P'_{\alpha-1}(1) + 2\alpha}{t^{\alpha+1}} C'_\alpha(t)u_0 + \frac{1}{t^\alpha}C''_\alpha(t)u_0 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{t^{\alpha+2}}\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau -$$

$$\left. - \frac{2\alpha+4}{t^{\alpha+2}}\int_0^1 \tau\, P''_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau - \frac{1}{t^{\alpha+2}}\int_0^1 \tau^2\, P'''_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau \right).$$

После интегрирования по частям получим

$$Y''_{2\alpha}(t)u_0 + \frac{2\alpha}{t}Y'_{2\alpha}(t)u_0 = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha - \alpha^2}{t^{\alpha+2}} C_\alpha(t)u_0 - \frac{P'_{\alpha-1}(1)}{t^{\alpha+1}} C'_\alpha(t)u_0 + \right.$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)t^2}u_0 + \frac{1}{t^\alpha}C_\alpha(t)Au_0 - \frac{\alpha^2 - \alpha}{t^{\alpha+2}}\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau +$$

$$+\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_0^1\left(\tau^2 P''_{\alpha-1}(\tau)+2\tau P'_{\alpha-1}(\tau)\right)C'_\alpha(t\tau)u_0 d\tau\Bigg). \tag{7}$$

Из равенства (5) следует формула для дифференцирования

$$C'_\alpha(t)x=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x+\int_0^t C_\alpha(r)Axdr. \tag{8}$$

Используя равенства (7), (8), интегрируя по частям, вычислим

$$Y''_{2\alpha}(t)u_0+\frac{2\alpha}{t}Y'_{2\alpha}(t)u_0=\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha-\alpha^2}{t^{\alpha+2}}C_\alpha(t)u_0-\frac{P'_{\alpha-1}(1)}{t^{\alpha+1}}C'_\alpha(t)u_0+\right.$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)t^2}u_0+\frac{1}{t^\alpha}C_\alpha(t)Au_0-\frac{\alpha^2-\alpha}{t^{\alpha+2}}\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau+$$

$$+\frac{u_0}{\Gamma(\alpha)t^2}\left(P'_{\alpha-1}(1)-\alpha-1+(\alpha^2+\alpha)\int_0^1\tau^{\alpha-1}P_{\alpha-1}(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\frac{2u_0}{\Gamma(\alpha)t^2}\left(1-\alpha\int_0^1\tau^{\alpha-1}P_{\alpha-1}(\tau)d\tau\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{t^{\alpha+1}}\left(P'_{\alpha-1}(1)\int_0^t C_\alpha(\rho)Au_0 d\rho-t\int_0^1\tau^2P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)Au_0 d\tau\right)\right)=$$

$$=\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha-\alpha^2}{t^{\alpha+2}}C_\alpha(t)u_0+\frac{1}{t^\alpha}C_\alpha(t)Au_0+\frac{\alpha^2-\alpha}{\Gamma(\alpha)t^2}\int_0^1\tau^{\alpha-1}P_{\alpha-1}(\tau)d\tau\, u_0+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha^2-\alpha}{t^{\alpha+2}}\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau+\frac{1}{t^\alpha}\int_0^1\tau^2P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)Au_0 d\tau\right). \tag{9}$$

В правой части равенства (9) выделим выражение для $AY_{2\alpha}(t)u_0$ и воспользуемся равенством (8). После интегрирования по частям получим

$$Y''_{2\alpha}(t)u_0+\frac{2\alpha}{t}Y'_{2\alpha}(t)u_0=\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{t^\alpha}C_\alpha(t)Au_0-\frac{1}{t^\alpha}\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)Au_0 d\tau+\right.$$

$$+\frac{\alpha^2-\alpha}{t^{\alpha+2}}C_\alpha(t)u_0+\frac{1}{t^\alpha}\int_0^1\left(1-\tau^2\right)P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)Au_0 d\tau+$$

$$\left.+\frac{\alpha^2-\alpha}{t^{\alpha+2}}\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau+\frac{\alpha^2-\alpha}{\Gamma(\alpha)t^2}\int_0^1\tau^{\alpha-1}P_{\alpha-1}(\tau)d\tau\, u_0\right)=$$

$$= AY_{2\alpha}(t)u_0 + \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_0^1\left(2\tau P'_{\alpha-1}(\tau)-\left(1-\tau^2\right)P''_{\alpha-1}(\tau)\right)\left(C'_\alpha(t\tau)u_0-\frac{(t\tau)^{\alpha-1}u_0}{\Gamma(\alpha)}\right)d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2-\alpha}{t^{\alpha+2}}\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau + \frac{\alpha^2-\alpha}{\Gamma(\alpha)t^2}\int_0^1 \tau^{\alpha-1}P_{\alpha-1}(\tau)d\tau\, u_0\right). \qquad (10)$$

Как известно [6, с. 206], сферическая функция Лежандра $P_{\alpha-1}(\tau)$ является решением уравнения

$$\left(\tau^2-1\right)P''_{\alpha-1}(\tau)+2\tau P'_{\alpha-1}(\tau)=\alpha(\alpha-1)P_{\alpha-1}(\tau).$$

Поэтому из равенства (10) выводим

$$Y''_{2\alpha}(t)u_0+\frac{2\alpha}{t}Y'_{2\alpha}(t)u_0 = AY_{2\alpha}(t)u_0 +$$

$$+\frac{2^\alpha\left(\alpha^2-\alpha\right)\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}\,t^{\alpha+2}}\left(t\int_0^1 P_{\alpha-1}(\tau)C'_\alpha(t\tau)u_0 d\tau - C_\alpha(t)u_0+\int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau\right) = AY_{2\alpha}(t)u_0.$$

Таким образом, с учетом сделанных в начале доказательства замечаний теорема 1 доказана.

2. Во второй части работы для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (1) при $k<0$ мы рассмотрим весовую задачу Коши, т.е. задачу отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u(0)=0, \qquad \lim_{t\to 0}\left(t^k u'(t)\right)=u_1. \qquad (11)$$

Будет показано, что ПКОФ также может быть использована при построении решения указанной задачи. Разрешающий оператор задачи (1), (11) (ОФБ с отрицательным индексом) будем обозначать $Z_k(t)$, $k<0$, так что функция $Z_k(t)u_1$ – решение задачи (1), (11).

Теорема 2. Пусть $\alpha>0$ и оператор A является генератором $1+\alpha$ раз ПКОФ $C_{1+\alpha}(t)$, $u_1\in D(A)$. Тогда задача (1), (11) при $k=-2\alpha$ равномерно корректна (будем писать $A\in H_{-2\alpha}$) и соответствующая ОФБ с отрицательным индексом представима в виде

$$Z_{-2\alpha}(t)u_1=\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}Y_{2\alpha+2}(t)u_1=$$

$$=\frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+3/2)\,t^\alpha}{(2\alpha+1)\sqrt{\pi}}\left(C_{\alpha+1}(t)u_0-\int_0^1 P'_\alpha(\tau)C_{\alpha+1}(t\tau)u_0 d\tau\right). \qquad (12)$$

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что функция

$$Z_{-2\alpha}(t)u_1=\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}Y_{2\alpha+2}(t)u_1$$

является решением уравнения (1), а справедливость начальных условий (11) очевидна.

Доказательство единственности решения задачи (1), (11) будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения этой задачи. Рассмотрим функцию двух переменных $w(t,s)=f\left(Z_{-2\alpha}(s)(u_1(t)-u_2(t))\right)$, где $f\in E^*$ (E^* – сопряженное пространство), $t,s\geq 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2\alpha}{t}\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\frac{2\alpha}{s}\frac{\partial w}{\partial s} \tag{13}$$

и условиям

$$w(0,s)=0,\qquad \lim_{t\to 0}\left(t^{-2\alpha}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0,\qquad \lim_{s\to 0}\left(s^{-2\alpha}\frac{\partial w}{\partial s}\right)=0. \tag{14}$$

После замены $w(t,s)=s^{2\alpha+1}v(t,s)$ задача (13), (14) превратится в задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{2\alpha}{t}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+\frac{2\alpha+2}{s}\frac{\partial v}{\partial s}, \tag{15}$$

$$v(0,s)=0,\qquad \lim_{t\to 0}\left(t^{-2\alpha}\frac{\partial v}{\partial t}\right)=0,\qquad \lim_{s\to 0}\frac{\partial v}{\partial s}=0. \tag{16}$$

Подобно тому, как это было сделано в [7], истолкуем $v(t,s)$ как обобщенную функцию умеренного роста и применим преобразование Фурье-Бесселя по переменной s. Для образа $V(t,\lambda)$ получим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 V(t,\lambda)}{\partial t^2}-\frac{2\alpha}{t}\frac{\partial V(t,\lambda)}{\partial t}=-\lambda^2 V(t,\lambda), \tag{17}$$

$$V(0,\lambda)=0,\qquad \lim_{t\to 0}\left(t^{-2\alpha}\frac{\partial V(t,\lambda)}{\partial t}\right)=0. \tag{18}$$

Общее решение уравнения (17) имеет вид

$$V(t,\lambda)=t^{\alpha+1/2}\left(\xi_1(\lambda)J_{\alpha+1/2}(\lambda t)+\xi_2(\lambda)N_{\alpha+1/2}(\lambda t)\right),$$

где $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя, $N_\nu(\cdot)$ – функция Неймана.

Поскольку функция Неймана при $t\to 0$ имеет порядок $t^{-\alpha-1/2}$, то из первого условия в (18) следует $\xi_2(\lambda)=0$. Т.к. функция Бесселя при $t\to 0$ имеет порядок $t^{\alpha+1/2}$, то из второго условия в (18) следует $\xi_1(\lambda)=0$.

Следовательно, $v(t,s)\equiv w(t,s)\equiv 0$ для любого $s\geq 0$. В силу произвольности функционала $f\in E^*$ при $s=0$ получаем равенство $u_1(t)\equiv u_2(t)$, и единственность решения установлена. Теорема 2 доказана.

Пример. Из теорем 1 и 2 вытекает справедливость следующих равенств

$$Y_2(t)=\frac{1}{t}C_1(t),\quad Y_4(t)=\frac{3}{t^2}C_2(t)-\frac{3}{t^3}\int_0^t C_2(s)ds,\quad Y_6(t)=\frac{15}{t^3}C_3(t)-\frac{45}{t^5}\int_0^t sC_3(s)ds,$$

$$Z_{-2}(t)=\frac{t^3}{3}Y_4(t),\qquad Z_{-4}(t)=\frac{t^5}{5}Y_6(t).$$

Следствие. Пусть $A\in H_k$, $k\leq 0$. Тогда при $m<k$ $A\in H_m$ и справедлива формула сдвига по параметру для ОФБ с отрицательным индексом

$$Z_m(t) = \frac{2(1-k)\Gamma(3/2-m/2)t^{k-m}}{(1-m)\Gamma(3/2-k/2)\Gamma(k/2-m/2)} \int_0^1 s\left(1-s^2\right)^{k/2-m/2} Z_k(ts)ds. \qquad (19)$$

Доказательство. Справедливость равенства (19) вытекает из представления (12) и формулы сдвига по параметру для ОФБ $Y_k(t)$ при $k \ge 0$ (см. [5]).

Замечание. Если при $\alpha > 0$ оператор A является генератором ПКОФ $C_\alpha(t)$ (а не $C_{1+\alpha}(t)$), то выразив $Z_{-2\alpha}(t)$ через ОФБ $Y_{2\alpha+2}(t)$, определенную равенством (6), после интегрирования по частям получим следующее представление для ОФБ с отрицательным индексом

$$Z_{-2\alpha}(t) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1/2)t^{\alpha+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 P_\alpha(\tau)C_\alpha(t\tau)d\tau.$$

Литература

1. Arendt W. Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems // Israel J. Matem. – 1987. – V. 59. – P. 327 – 352.

2. Arendt W., Kellermann H. Integrated solutions of Volterra integrodifferential equations and applications // Pitman Res. Notes Math. – 1989. – V. 190. – P. 21 – 51.

3. Мельникова И.В., Филинков А.И. Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 6(300). – С. 111 – 150.

4. Глушак А.В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42. – № 5. – С. 583 – 589.

5. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. 1997. – Т. 352. – № 5. – С. 587 – 589.

6. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. – 358 с.

7. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. – 1955. – Т. 36. – № 2. – С. 299 – 310.

CAUCHY PROBLEM FOR THE ABSTRACT EULER-POISSON-DARBOUX' EQUATION WITH THE GENERATOR OF THE INTEGRATED COSINE FUNCTION

A.V. Glushak

Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia.
e-mail: glushak@bsu.edu.ru

The formulas connecting a solution of the Cauchy problem for an abstract equation of Euler-Poisson-Darboux with integrated cosine function are established.

Key words: a uniform correctness of problem Cauchy, integrated cosine function, operator Bessel function.