УДК 533.72

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ НА ФОТОФОРЕЗ ТВЕРДОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Н.В. Малай, Н.Н. Миронова

Белгородский государственный университет, 308007, г. Белгород, ул. Студенческая 14,
e-mail: malay@bsu.edu.ru; e-mail: mironovanadya@mail.ru

Рассмотрено влияние движения среды на фотофорез крупной аэрозольной частицы сфероидальной формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности.

Ключевые слова: фотофорез, аэрозольная частица, сфероид, движение среды.

Введение

Известно, что твердая частица, взвешенная в термодинамически неравновесной газообразной среде, начинает двигаться. Причина такого движения может быть связана, в частности, с появлением градиента температуры вдоль поверхности частицы. В данной работе рассматривается случай, когда градиент температуры обусловлен неравномерным нагревом поверхности частицы за счет поглощения электромагнитного излучения. Такое движение называется фотофоретическим [1-3]. Фотофорез может играть существенную роль в атмосферных процессах; очистке промышленных газов от аэрозольных частиц; создании установок, предназначенных для селективного разделения частиц по размерам, и т.д.

Механизм фотофореза можно кратко описать следующим образом. При взаимодействии электромагнитного излучения с частицей внутри ее происходит выделение тепловой энергии с некоторой объемной плотностью q_p, которые неоднородно нагревают частицу. Молекулы газа, окружающие частицу, после соударения с ее поверхностью отражаются от нагретой стороны частицы с большей скоростью, чем от холодной. В результате частица приобретает нескомпенсированный импульс, направленный от горячей стороны частицы к холодной. В зависимости от размеров и оптических свойств материала частицы более горячей сможет оказаться как освещенная, так и теневая стороны частицы. Поэтому имеет место как положительный (движение частицы в направлении излучения), так и отрицательный фотофорез. Кроме того, если поток излучения неоднороден по сечению, то может возникнуть поперечное относительно направления распространения электромагнитного излучения движение частицы в газе [4].

Многие частицы, встречающиеся в промышленных установках и природе, имеют форму поверхности, отличную от сферической, например, сфероидальную. В опубликованных до настоящего времени работах по теории фотофоретического движения сфероидальных частиц (см. [5-6]) не учитывалось влияние конвективных членов теплопроводности (движения среды) на фотофорез. Озеен [7], Праудмен и Пирсон [8] для гидродинамической задачи, а Акривос и Тейлор [9] для тепловой задачи показали, что вдали от частицы инерционные и конвективные члены становятся одного порядка с членами молекулярного переноса, поэтому обычный метод разложения по малому параметру дает известную погрешность, поскольку уже во втором приближении не позволяет строго удовлетворить граничным условиям на бесконечности и получить точное единое решение, однородно справедливое для всей области течения. В данной работе, используя метод сращиваемых асимптотических разложений, проводится оценка этого влияния.

Постановка задачи

Рассмотрим твердую аэрозольную частицу сфероидальной формы, взвешенную в газе с температурой T_∞, плотностью ρ_g и вязкостью μ_g. Здесь и далее индексы «g» и «p» будем относить соответственно к газообразной среде и частице; индексом «∞» обозначены параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. вдали от частицы, и индексом «S» — значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности частицы T_S. На частицу падает электромагнитное излучение, которое неоднородно нагревает её поверхность. Газ, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называется тепловым скольжением газа. Механизм этого явления по своей физической природе аналогичен термофорезу (см. [10-11]). Тепловое скольжение вызывает появление фотофоретической силы. Под действием фотофоретической силы и силы вязкого сопротивления среды частица начинает двигаться равномерно. Скорость равномерного движения частицы называют фотофоретической скоростью (U_{ph}).

При теоретическом описании процесса фотофоретического движения частицы будем предполагать, что в силу малости времени тепловой релаксации процесс теплопереноса в системе частица-газообразная среда протекает квазистационарно. Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса и при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, т. е. когда $(T_S - T_\infty)/T_\infty << 1$, где T_∞ – температура газа на большом расстоянии от частицы. При выполнении этого условия коэффициенты теплопроводности, динамической и кинематической вязкости можно считать постоянными величинами. Задача решается гидродинамическим методом, т. е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями и считается, что фазовый переход отсутствует, частица однородна по своему составу и крупная. Для классификации аэрозольных частиц по размерам применяют критерий Кнудсена $Kn = \lambda / R$, где λ – средняя длина свободного пробега молекул газообразной смеси, R – линейный размер частицы. Частицы называются крупными, если $Kn \le 0{,}01$, умеренно крупными при $0{,}01 \le Kn \le 0{,}3$ и мелкими при $Kn >> 1$.

Падающее на частицу электромагнитное излучение поглощается частицей и распределяется по её объёму. В результате внутри частицы возникают источники тепловой энергии плотностью q_p. Удобно ввести систему отсчета, связанную с центром масс движущейся частицы, а ось OZ ориентирована по направлению распространения однородного потока излучения (задача в этом случае сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком со скоростью U_∞. Определенная в такой системе координат скорость газа на бесконечности равна с обратным знаком величине скорости фотофореза, $U_{ph} = -U_\infty$). Описание обтекания будем проводить в сфероидальной системе координат $(\varepsilon, \eta, \varphi)$. Криволинейные координаты $\varepsilon, \eta, \varphi$ связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями [12]:

$$x = c\, ch\varepsilon \sin\eta \cos\varphi, \quad y = c\, ch\varepsilon \sin\eta \sin\varphi, \quad z = c\, sh\varepsilon \cos\eta, \tag{1.1}$$

$$x = c\, sh\varepsilon \sin\eta \cos\varphi, \quad y = c\, sh\varepsilon \sin\eta \sin\varphi, \quad z = c\, ch\varepsilon \cos\eta, \tag{1.2}$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ в случае сплюснутого сфероида ($a>b$, формула (1.1)) и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ в случае вытянутого сфероида ($a<b$, формула (1.2)); a и b – полуоси сфероида. При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы начало координат располагалось в центре сфероида, а ось OZ совпадала с осью симметрии сфероида.

В рамках сформулированных допущений распределение скорости U_g, давления P_g и температур T_g и T_p описываются следующей системой уравнений [13]:

$$\nabla P_g = \mu_g \,\Delta U_g, \quad div U_g = 0,$$
$$\rho_g c_{pg} \left(U_g \cdot \nabla\right) T_g = \lambda_g \,\Delta T_g, \quad \Delta T_p = -q_p / \lambda_p. \tag{1.3}$$

Система уравнений (1.3) решалась со следующими граничными условиями в системе координат сплюснутого сфероида:

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad U_\varepsilon = 0, \quad U_\eta = K_{TS} \frac{\nu_g}{T_g}\left(\nabla T_g \cdot e_\eta\right),$$
$$T_g = T_p, \quad \lambda_g \left(\nabla T_g \cdot e_\varepsilon\right) = \lambda_p \left(\nabla T_p \cdot e_\varepsilon\right); \tag{1.4}$$
$$\varepsilon \to \infty, \quad U_\varepsilon = U_\infty \cos\eta, \quad U_\eta = -U_\infty \sin\eta, \quad T_g \to T_\infty, \quad P_g \to P_\infty; \tag{1.5}$$
$$\varepsilon \to 0, \quad T_p \neq \infty. \tag{1.6}$$

Здесь U_ε, U_η – компоненты массовой скорости газа U_g; e_ε, e_η – единичные векторы в сфероидальной системе координат; c_{pg} – теплоемкость при постоянном давлении; ν_g, μ_g – коэффициенты кинематической и динамической вязкости газа; λ_g, λ_p – коэффициенты теплопроводности газообразной среды и частицы соответственно; $U_\infty = |U_\infty|$; K_{TS} – коэффициент теплового скольжения, выражение для которого определяется методами кинетической теории. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса и энергии, равных единице, газокинетический коэффициент (случай сферической частицы) $K_{TS} \approx 1{,}152$ [10,11].

В граничных условиях (1.4) на поверхности частицы учтено: условие непроницаемости для нормальной и тепловое скольжение для касательной компонент массовой скорости, равенство температур и непрерывность потоков тепла. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность $\varepsilon = \varepsilon_0$. На большом расстоянии от частицы справедливы граничные условия (1.5), а конечность физических величин, характеризующих частицу при $\varepsilon \to 0$, учтена в (1.6).

Обезразмерим уравнение (1.3) и граничные условия (1.4)-(1.6), введя безразмерные координаты, температуру и скорость следующим образом:

$$y_k = \frac{x_k}{a}, t = \frac{T}{T_\infty}, V = \frac{U}{U_\infty}.$$

При $\mathrm{Re} = \left(\rho_g U_\infty a\right)/\mu_g \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, поэтому решение уравнений гидродинамики следует искать в виде:

$$V_g = V_{g0} + \mathrm{Re}\, V_{g1} + \ldots, \quad P_g = P_{g0} + \mathrm{Re}\, P_{g1} + \ldots \tag{1.7}$$

Решение уравнения, описывающего распределение температуры вне частицы, будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений [14, 15]. Внутренние и внешние асимптотические разложения обезразмеренной температуры ищем в виде:

$$t_g(\varepsilon, \eta) = t_{g0}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\mathrm{Re})\, t_{gn}(\varepsilon, \eta), \tag{1.8}$$

$$t_g^*(\xi, \eta) = t_{g0}^*(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(\mathrm{Re})\, t_{gn}^*(\xi, \eta), \tag{1.9}$$

где $\xi = \mathrm{Re}\,\lambda$ – «сжатая» радиальная координата [14], $\lambda = sh\varepsilon$. При этом требуется, чтобы:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \to 0, \quad \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \to 0 \quad при \quad \mathrm{Re} \to 0$$

Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого в некоторую промежуточную область:

$$t_g(\varepsilon \to \infty, \eta) = t_g^*(\xi \to 0, \eta). \qquad (1.10)$$

Асимптотическое разложение решения внутри частицы, как показывают граничные условия на поверхности сфероида (1.4), следует искать в виде, аналогичном (1.8):

$$t_p(\varepsilon, \eta) = t_{p0}(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\mathrm{Re}) t_{pn}(\varepsilon, \eta). \qquad (1.11)$$

Относительно функций $f_n(\mathrm{Re})$ и $f_n^*(\mathrm{Re})$ предполагается лишь, что порядок их малости по Re увеличивается с ростом n.

С учетом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры t_g^*:

$$\frac{\mathrm{Pr}}{a}\left(V_g^* \cdot \nabla^*\right) t_g^* = \Delta^* t_g^*, \quad t_g^* \to 1 \quad при \quad \xi \to \infty, \qquad (1.12)$$

$$V_g^*(\xi, \eta) = n_z + \mathrm{Re}\, V_g^*(\xi, \eta) + \ldots$$

Здесь $\Delta = \Delta^*(\xi, \eta)$ – оператор Лапласа, полученный из Δ заменой λ на ξ; $V_g^* = V_g^*(\xi, \eta)$; $t_g^* = t_g^*(\xi, \eta)$; $\mathrm{Pr} = \mu_\infty c_{pg} / \lambda_g$ – число Прандтля; n_z – единичный вектор в направлении оси OZ.

Вид граничных условий (1.5) указывает на то, что решение в нулевом приближении для компонент массовой скорости следует искать в виде:

$$V_\varepsilon(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{c\, ch\varepsilon\, H_\varepsilon} G(\varepsilon) \cos\eta, \quad V_\eta(\varepsilon, \eta) = -\frac{1}{c H_\varepsilon} g(\varepsilon) \sin\eta, \qquad (1.13)$$

где $G(\varepsilon)$, $g(\varepsilon)$ – произвольные функции, зависящие от обезразмеренной радиальной координаты ε; $H_\varepsilon = c\sqrt{ch^2\varepsilon - \sin^2\eta}$ – коэффициент Ламэ.

Распределение температуры в окрестности сфероидальной частицы

При нахождении силы и скорости фотофореза ограничимся поправками первого порядка малости. Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы. Для этого необходимо решить уравнения (1.3) с соответствующими граничными условиями.

Построение решения начинается с определения нулевого члена внешнего разложения (1.9). В данном случае, очевидно, задаче удовлетворяет решение:

$$t_{g0}^* = 1. \qquad (2.1)$$

Найдем нулевой член внутреннего разложения (1.8). Он удовлетворяет уравнению:

$$\Delta t_{g0} = 0 \qquad (2.2)$$

с граничными условиями

$$t_{g0} = t_{p0}, \quad \lambda_g \frac{\partial t_{g0}}{\partial \varepsilon} = \lambda_p \frac{\partial t_{p0}}{\partial \varepsilon} \quad при \quad \varepsilon = \varepsilon_0. \qquad (2.3)$$

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$t_{g0}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(Y_n P_n(\lambda)+L_n Q_n(\lambda)\right)\cdot P_n(\cos\eta)\,, \tag{2.4}$$

здесь Y_n, L_n – постоянные интегрирования, P_n, Q_n – полиномы Лежандра первого и второго рода соответственно. Постоянные интегрирования Y_n, L_n определяются из условия сращивания, для которого внешнее решение должно быть разложено в ряд по ξ. Затем значения констант устанавливаются из требования соответствия поведения членов полученного ряда при $\xi \to 0$ и членов разложения (1.8) при $\varepsilon \to \infty$. Для нулевых приближений сращивание тривиально, получаем $Y_0=1$, $Y_n=L_n=0$ при n=1,2,...Следовательно:

$$t_{g0}=1+L_0\, arcctg\lambda\,. \tag{2.5}$$

При дальнейшем решении задачи нам необходимо знать поле температуры внутри частицы. Подставляя (1.11) в четвертое уравнение (1.3), получим следующее общее решение для $t_p(\varepsilon,\eta)$, удовлетворяющее условию конечности решения при $\varepsilon \to 0$ (отметим, что до первого приближения включительно, как будет показано ниже, $f_0(\mathrm{Re})=1$, $f_1(\mathrm{Re})=\mathrm{Re}$):

$$t_p(\varepsilon,\eta)=t_{p0}(\varepsilon)+\mathrm{Re}\,t_{p1}(\varepsilon,\eta), \tag{2.6}$$

где $$t_{p0}(\lambda)=M_0+N_0\, arcctg\lambda-\int_{\lambda_0}^{\lambda}W_0\, arcctg\lambda\, d\lambda+arcctg\lambda\int_{\lambda_0}^{\lambda}W_0\, d\lambda, \tag{2.7}$$

$$t_{p1}=cos\eta\left(M_1 c\lambda+N_1(1-\lambda\, arcctg\lambda)+\lambda\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda\, arcctg\lambda-1)W_1 d\lambda-(\lambda\, arcctg\lambda-1)\int_{\lambda_0}^{\lambda}\lambda W_1 d\lambda\right).$$

Здесь $\lambda = sh\varepsilon$; $x=\cos\eta$; $\lambda_0=sh\varepsilon_0$; $N_0=\dfrac{1}{4\pi c\lambda_p T_\infty}\displaystyle\int_V q_p\, dV$; $N_1=\dfrac{3}{4\pi c^2\lambda_p T_\infty}J$;

$J=\displaystyle\int_V q_p\, z\, dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников; $z=c\lambda x$;

$$W_n=\frac{2n+1}{2\lambda_p T_\infty}\int_{-1}^{1}c^2 q_p\left(\lambda^2+x^2\right)P_n(x)dx\ \ (n\ge 0). \tag{2.8}$$

В формулах (2.8) интегрирование ведется по всему объему частицы.

Поскольку поле температуры внутри неравномерно нагретой частицы определено, мы можем найти постоянные интегрирования L_0, M_0. Константы L_0, M_0, входящие в (2.5) и (2.7), находим из граничных условий на поверхности частицы (2.3). В нашем случае они принимают вид:

$$L_0=\gamma\lambda_0,\quad M_0=1+\left(1-\frac{\lambda_g}{\lambda_p}\right)\gamma\lambda_0\, arcctg\lambda_0\ . \tag{2.9}$$

Здесь $\gamma=t_S-1$ – безразмерный параметр, характеризующий нагрев поверхности сфероида; $t_S=T_S/T_\infty$; T_S – средняя температура поверхности сфероида, определяемая формулой:

$$\frac{T_S}{T_\infty}=1+\frac{1}{4\pi c\lambda_0\lambda_g T_\infty}\int_V q_p dV\,. \tag{2.10}$$

В (2.10) интегрирование ведется по всему объему частицы.

Для членов первого приближения внешнего разложения из (1.9) и (2.1) имеем:

$$t_g^*(\xi,\eta)=1+f_1^*(\mathrm{Re})t_{g1}^*(\xi,\eta).$$

Видно, что для нахождения первого приближения для внешнего разложения необходимо сначала определить явный вид коэффициента $f_1^*(\mathrm{Re})$. Для этого в решении (2.5) перейдем к внешней переменной ξ. Тогда из (2.5) следует, что $f_1^*(\mathrm{Re})=\mathrm{Re}$. Таким образом, получаем:

$$t_g^*(\xi,\eta)=1+\mathrm{Re}\,t_{g1}^*(\xi,\eta). \tag{2.11}$$

Подставляя (22) в (10) и удерживая члены порядка Re, получим:

$$\Delta^* t_{g1}^* - \frac{\Pr c}{aH_\varepsilon^2}\left[x\left(1+\xi^2\right)\frac{\partial t_{g1}^*}{\partial \xi}+\xi\left(1-x^2\right)\frac{\partial t_{g1}^*}{\partial x}\right]=0. \tag{2.12}$$

С помощью замены $t_{g1}^*=\Phi(\xi,x)\cdot\exp\left(\frac{\Pr c}{2a}\xi x\right)$ уравнение (2.12) сводится к уравнению Гельмгольца, решением которого являются сплюснутые радиальные сфероидальные функции вида $R\left(i\frac{\Pr c}{2a},i\xi\right)$, выражающиеся через модифицированные функции Бесселя второго рода $K_{n+\frac{1}{2}}$, $I_{n+\frac{1}{2}}$. Но для удовлетворения граничным условиям на бесконечности будем использовать представление сфероидальной функции через $K_{n+\frac{1}{2}}$.

Таким образом, общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$t_{g1}^*=R\left(i\frac{\Pr c}{2a},i\xi\right)\cdot\exp\left(\frac{\Pr c}{2a}\xi x\right), \tag{2.13}$$

$$R\left(i\frac{\Pr c}{2a},i\xi\right)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi a}{\Pr c\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}d_n i^n\exp\left(-i\pi\frac{n+3/2}{2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\Pr c\xi}{2a}\right),$$

$$K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\Pr c\xi}{2a}\right)=\sqrt{\frac{\pi a}{\Pr c\xi}}\exp\left(-\frac{\Pr c\xi}{2a}\right)\sum_{m=0}^{n}\frac{(m+n)!a^m}{(n-m)!m!(\Pr c\xi)^m}.$$

Здесь $R\left(i\frac{\Pr c}{2a},i\xi\right)$ – сплюснутая радиальная сфероидальная функция, $K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\Pr c\xi}{2a}\right)$ – модифицированная функция Бесселя [16]. Произвольные постоянные интегрирования d_n должны быть определены в результате сращивания, которое в данном случае заключается в сравнении поведения функции (2.13) при $\xi\to 0$ и функции (2.5) при $\lambda\to\infty$. Нетрудно установить, что $d_0=\frac{\Pr\gamma c\lambda_0}{a\sqrt{2}}$, $d_n=0$ при $n=1,2,\ldots$ Следовательно,

$$t_{g1}^*=\frac{\gamma\lambda_0}{\xi}\exp\left\{\frac{c\Pr}{2a}\xi(x-1)\right\}. \tag{2.14}$$

Найдем первое приближение для внутреннего разложения. Из (2.14) видно, что $f_1(\mathrm{Re})=\mathrm{Re}$. Таким образом, имеем двучленное внутреннее разложение:

$$t_g(\varepsilon,\eta)=t_{g0}(\varepsilon)+\mathrm{Re}\,t_{g1}(\varepsilon,\eta). \tag{2.15}$$

Для t_{g0}, t_{g1} в двучленном внутреннем разложении получаем из (1.3) следующую задачу:

$$\frac{\Pr}{a}V_\varepsilon\frac{1}{H_\varepsilon}\frac{\partial t_{g0}}{\partial\varepsilon}=\Delta t_{g1}. \tag{2.16}$$

$$t_{p1} = \cos\eta\left(M_1 c\lambda + N_1(1-\lambda \operatorname{arcctg}\lambda) + \lambda\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda \operatorname{arcctg}\lambda - 1)W_1 d\lambda - (\lambda \operatorname{arcctg}\lambda - 1)\int_{\lambda_0}^{\lambda}\lambda W_1 d\lambda\right) \quad (2.17)$$

с граничными условиями

$$t_{g1} = t_{p1}, \quad \lambda_g \frac{\partial t_{g1}}{\partial\varepsilon} = \lambda_p \frac{\partial t_{p1}}{\partial\varepsilon} \quad при \quad \varepsilon = \varepsilon_0. \quad (2.18)$$

Чтобы определить поведение $t_{g1}(\infty,\eta)$, срастим двучленные внутреннее и внешнее разложения:

$$t_g(\varepsilon,\eta) = t_{g0}(\varepsilon) + \operatorname{Re} t_{g1}(\varepsilon,\eta), \quad t^{\bullet}_{g1}(\xi,\eta) = 1 + \operatorname{Re}\frac{\gamma\lambda_0}{\xi}\exp\left\{\frac{c\Pr}{2a}\xi(x-1)\right\},$$

в результате имеем:

$$t_{g1}(\infty,\eta) = \Pr\frac{c\lambda_0\gamma}{2a}(\cos\eta - 1). \quad (2.19)$$

Из (2.16) видим, что для нахождения t_{g1} необходимо сначала определить поле скорости, т. е. решить гидродинамическую задачу.

Определение фотофоретической силы и скорости

Общее решение уравнений гидродинамики, удовлетворяющих конечности при $\varepsilon \to \infty$, имеет вид [12]:

$$U_\varepsilon(\varepsilon,\eta) = \frac{U_\infty}{c\, ch\varepsilon\, H_\varepsilon}\cos\eta\left\{\lambda A_2 + \left[\lambda - (1+\lambda^2)\operatorname{arcctg}\lambda\right]A_1 + c^2(1+\lambda^2)\right\}$$

$$U_\eta(\varepsilon,\eta) = -\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\sin\eta\left\{\frac{A_2}{\lambda} + \left[1 - \lambda \operatorname{arcctg}\lambda\right]A_1 + c^2\lambda\right\}, \quad (3.1)$$

$$P_g(\varepsilon,\eta) = P_\infty + c\frac{\mu_g U_\infty}{H_\varepsilon^4}x(\lambda^2 + x^2)A_2.$$

С учетом (3.1) получаем следующее уравнение для t_{g1}:

$$\Delta t_{g1} = -\frac{\beta x}{(1+\lambda^2)H_\varepsilon^2}G(\lambda), \quad (3.2)$$

где $G(\lambda) = \lambda A_2 + \left[\lambda - (1+\lambda^2)\operatorname{arcctg}\lambda\right]A_1 + c^2(1+\lambda^2)$, $\beta = \dfrac{\Pr\gamma\lambda_0}{ac}$.

Решение для t_{g1} ищем в виде:

$$t_{g1} = k(\lambda) + f(\lambda)\cos\eta \quad (3.3)$$

с краевыми условиями:

$$k(\lambda) \to -\Pr\frac{c\lambda_0\gamma}{2a}, \quad f(\lambda) \to \Pr\frac{c\lambda_0\gamma}{2a} \text{ при } \lambda \to \infty$$

$$k(\lambda) = 0, \quad f(\lambda) = const \text{ при } \lambda = \lambda_0. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), видим, что $k(\lambda)$ принимает вид:

$$k(\lambda) = -\Pr\frac{\gamma\lambda_0 c}{2a}\left(1 - \frac{\operatorname{arcctg}\lambda}{\operatorname{arcctg}\lambda_0}\right),$$

а $f(\lambda)$ удовлетворяет уравнению:

$$\left(1+\lambda^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}+2\lambda\frac{\partial f}{\partial\lambda}-2f=-\beta\frac{G(\lambda)}{1+\lambda^2}\ . \tag{3.5}$$

Общее решение уравнения (3.5), удовлетворяющее краевым условиям (3.4), имеет вид:

$$t_{g1}=-\frac{\Pr\gamma\lambda_0 c}{2a}\left(1-\frac{arcctg\,\lambda}{arcctg\,\lambda_0}\right)+\cos\eta\left(\left(\lambda\,arcctg\,\lambda-1\right)C_3+\right.$$

$$\left.+\beta\left\{A_2\left[arcctg\,\lambda-\frac{\lambda}{2}arcctg^2\lambda\right]+\frac{A_1}{2}\left[arcctg\,\lambda-\lambda\,arcctg^2\lambda\right]+\frac{c^2}{2}\lambda\,arcctg\,\lambda\right\}\right). \tag{3.6}$$

Для определения постоянных интегрирования в (3.6) и (2.17) воспользуемся граничными условиями на поверхности частицы (2.18). В результате получаем

$$C_3=-\frac{1}{\Delta}\left\{-N_1\frac{1}{1+\lambda_0^2}+\beta\left[A_2\left(\frac{\delta}{1+\lambda_0^2}\left(1-\frac{\lambda_0}{2}arcctg\lambda_0\right)-\frac{\Delta}{2}arcctg\lambda_0+\frac{1}{2\lambda_0}arcctg\lambda_0\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{A_1}{2}\left(\frac{\delta}{1+\lambda_0^2}\left(1-\lambda_0 arcctg\lambda_0\right)-\Delta\right)+\frac{c^2}{2}\left(\Delta+\frac{1}{\lambda_0}\right)\right]\right\},$$

$$M_1=-\frac{N_1+C_3}{c}\left(\frac{1}{\lambda_0}-arcctg\lambda_0\right)+\frac{\beta}{c\lambda_0}\left[A_2\left(arcctg\lambda_0-\frac{\lambda_0}{2}arcctg^2\lambda_0\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{A_1}{2}\left(arcctg\lambda_0-\lambda_0 arcctg^2\lambda_0\right)+\frac{c^2}{2}\lambda_0 arcctg\lambda_0\right],$$

где $\Delta=(1-\delta)arcctg\lambda_0+\dfrac{\delta\lambda_0}{1+\lambda_0^2}-\dfrac{1}{\lambda_0}$, $\delta=\dfrac{\lambda_g}{\lambda_p}$.

Таким образом в первом приближении по ε нами получены выражения для полей температур вне и внутри аэрозольной частицы. Следовательно, можно, используя граничные условия на поверхности частицы для компонентов скоростей, найти постоянные интегрирования A_1, A_2, входящие в выражения (3.1).

$$A_1=-\frac{\lambda_0 A_2+c^2\left(1+\lambda_0^2\right)}{\lambda_0-\left(1+\lambda_0^2\right)arcctg\lambda_0},$$

$$A_2=-\frac{2c^2}{\lambda_0+\left(1-\lambda_0^2\right)arcctg\,\lambda_0}+$$

$$+K_{TS}\,\mathrm{Re}\frac{c\nu_g}{U_\infty t_S}\frac{\lambda_0-\left(1+\lambda_0^2\right)arcctg\,\lambda_0}{\lambda_0+\left(1-\lambda_0^2\right)arcctg\,\lambda_0}\frac{1-\lambda_0\,arcctg\,\lambda_0}{\left(1+\lambda_0^2\right)\Delta}\cdot\left[\frac{6}{4\pi c^2\lambda_0\lambda_p T_\infty}\int_V q_p z\,dV+\right. \tag{3.7}$$

$$\left.+\frac{\Pr\gamma\lambda_0\delta c}{a\left(\lambda_0+\left(1-\lambda_0^2\right)arcctg\,\lambda_0\right)}\left(\lambda_0 arcctg\lambda_0+3-\frac{arcctg^2\lambda_0}{1-\lambda_0\,arcctg\,\lambda_0}\right)\right].$$

После их вычисления сила, действующая на сфероид, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности аэрозольной частицы и имеет вид:

$$F_z=-4\pi\frac{\mu_\infty U_\infty}{c}A_2\ . \tag{3.8}$$

С учетом коэффициента A_2 видим, что общая сила, действующая на твердую крупную аэрозольную частицу сфероидальной формы при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, будет аддитивно складываться из силы вязкого сопротивления среды F_μ, фотофоретической силы F_{ph}, пропорциональной дипольному моменту J, и силы F_{dh}, обусловленной движением среды (т. е. учетом конвективных членов в уравнении теплопроводности):

$$F_z = F_\mu + \mathrm{Re}\left(F_{ph} + F_{dh}\right), \tag{3.9}$$

где $F_\mu = 6\pi a \mu_\infty U_\infty f_\mu n_z$; $F_{ph} = -6\pi a \mu_\infty f_{ph} J n_z$; $F_{dh} = -6\pi a \mu_\infty f_{dh} n_z$. (3.10)

Значения коэффициентов f_μ, f_{dh} и f_{ph} могут быть оценены из следующих выражений:

$$f_\mu = \frac{4}{3\sqrt{1+\lambda_0^2}} \frac{1}{\lambda_0 + \left(1-\lambda_0^2\right) arcctg\,\lambda_0},$$

$$f_{ph} = K_{TS} \frac{\nu_g}{\pi t_S \lambda_p T_\infty} \frac{\lambda_0 - \left(1+\lambda_0^2\right) arcctg\,\lambda_0}{\lambda_0 + \left(1-\lambda_0^2\right) arcctg\,\lambda_0} \frac{1 - \lambda_0\, arcctg\,\lambda_0}{a^3 \lambda_0 \Delta},$$

$$f_{dh} = K_{TS} \frac{\nu_g}{\pi t_S \lambda_p T_\infty} \frac{\lambda_0 - \left(1+\lambda_0^2\right) arcctg\,\lambda_0}{\lambda_0 + \left(1-\lambda_0^2\right) arcctg\,\lambda_0} \frac{1 - \lambda_0\, arcctg\,\lambda_0}{\left(1+\lambda_0^2\right)\Delta} \times$$

$$\times \frac{\Pr}{6a^2\left(\lambda_0 + \left(1-\lambda_0^2\right) arcctg\,\lambda_0\right)} \left(\lambda_0 arcctg\lambda_0 + 3 - \frac{arcctg^2 \lambda_0}{1 - \lambda_0\, arcctg\,\lambda_0}\right) \int_V q_p dV.$$

При оценке коэффициентов f_μ, f_{dh} и f_{ph} необходимо учитывать, что индексом S обозначены значение физических величин, взятые при средней температуре поверхности сфероида, равной T_S, которая определяется по формуле (2.10).

Приравнивая общую силу к нулю, получаем выражение для величины скорости упорядоченного движения сфероидальной частицы:

$$U_{ph} = -\mathrm{Re}\left(U_p + U_{dh}\right). \tag{3.11}$$

Здесь $U_p = \dfrac{f_{ph}}{f_\mu} J n_z$, $U_{dh} = \dfrac{f_{dh}}{f_\mu} J n_z$.

Анализ полученных результатов

Формулы (3.10), (3.11) позволяют оценить влияние движения среды, т.е. учет конвективных членов в уравнении теплопроводности на величины фотофоретической силы и скорости при малых относительных перепадах температуры в окрестности сфероидальной частицы.

Чтобы оценить, какой вклад движения среды оказывает на скорость фотофореза твердой крупной аэрозольной частицы сфероидальной формы, необходимо конкретизировать природу тепловых источников, неоднородно распределенных в ее объеме. В качестве примера рассмотрим простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело, т.е. нагрев частицы происходит в тонком слое толщиной $\delta\varepsilon \ll \varepsilon_0$. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной $\delta\varepsilon$ определяется с помощью формулы [17]:

$$q_p(\varepsilon,\eta) = \begin{cases} -\dfrac{ch\,\varepsilon \cos\eta}{c\left(ch^2\varepsilon - \sin^2\eta\right)\delta\varepsilon} I_0, & \dfrac{\pi}{2} \le \eta \le \pi, \quad \varepsilon_0 - \delta\varepsilon \le \varepsilon \le \varepsilon_0, \\ 0, & 0 \le \eta \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где I_0 – интенсивность падающего излучения, связанная со средней температурой поверхности частицы T_S соотношением $T_S = T_\infty + \dfrac{a\sqrt{1+\lambda_0^2}}{4\lambda_g} I_0 arcctg\lambda_0$.

В результате получаем следующие выражения для скорости фотофореза абсолютно черных твердых крупных аэрозольных частиц сфероидальной формы

$$U_{ph}^* = \mathrm{Re}\, f_{ph}^* n_z, \tag{4.1}$$

$$f_{ph}^* = \frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g I_0}{2 t_S \lambda_p T_\infty} \left(\lambda_0 - \left(1+\lambda_0^2\right) arcctg\,\lambda_0\right) \frac{\sqrt{1+\lambda_0^2}}{\Delta} \left(\frac{1}{\lambda_0} - arcctg\,\lambda_0\right) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{\Pr}{4} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}\left(\lambda_0 - \left(1+\lambda_0^2\right) arcctg\,\lambda_0\right)} \left(\lambda_0\, arcctg\,\lambda_0 + 3 - \frac{arcctg^2\,\lambda_0}{1 - \lambda_0\, arcctg\,\lambda_0}\right)\right]$$

$$f_{ph}^{**} = \frac{b}{a} K_{TS} \frac{\nu_g I_0}{2 t_S \lambda_p T_\infty} \left(\lambda_0 - \left(1+\lambda_0^2\right) arcctg\,\lambda_0\right) \frac{\sqrt{1+\lambda_0^2}}{\Delta} \left(\frac{1}{\lambda_0} - arcctg\,\lambda_0\right)$$

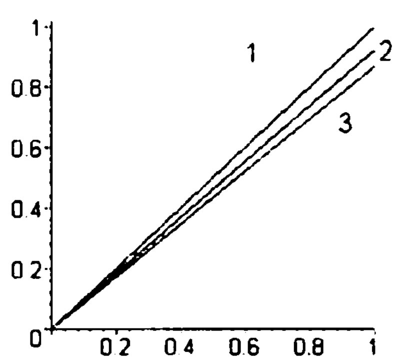

Рис. 1

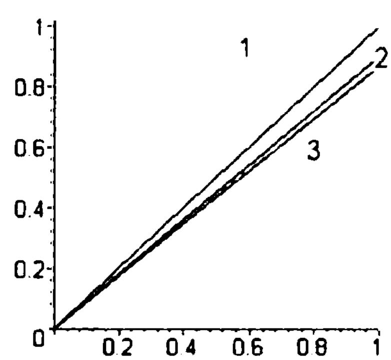

Рис. 2

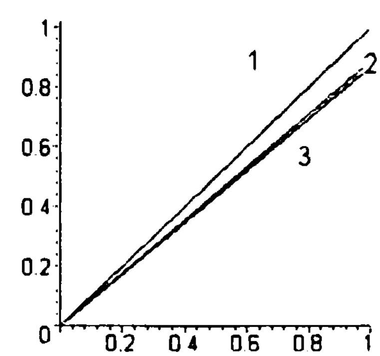

Рис. 3

Зависимость функций $\left. f_{ph}^* / f_{ph}^{**} \right|_{T_\infty = 300K}$ от интенсивности падающего излучения при отношении полуосей *b*/*a*=0,2 (рис. 1); *b*/*a*=0,5 (рис. 2); *b*/*a*=0,7 (рис. 3); I_0, Вт/см^2

Для иллюстрации вклада движения среды и отношения полуосей сфероида в скорость фотофореза (4.1) на рисунках приведены кривые, связывающие значения $\left. f_{ph}^* / f_{ph}^{**} \right|_{T_\infty = 300K}$ с интенсивностью падающего излучения для частиц борированного графита ($\lambda_p = 55$ Вт/(м град)) со сферической (кривая 3) и сфероидальной (кривая 1 – без учета движения среды; кривая 2 – с учетом движения среды) формами поверхности, взвешенных в воздухе при $T_\infty = 300K$ для различных отношений полуосей сфероида: *b*/*a*=0,2 (рис. 1); *b*/*a*=0,5 (рис. 2); *b*/*a*=0,7 (рис. 3).

Заключение

Численный анализ показал, что при фиксированном отношении полуосей с увеличением интенсивности падающего излучения I_0 вклад движения среды приводит к монотонному уменьшению скорости фотофореза (см. рисунки) с относительной погрешностью около 12%.

Литература

1. Hidy G.M. and Bnock J.R. Photophoresis and the Descent of Particles into the Lower Stratosphere // J. Geophys. Res. – 1967. – V. 12. – P. 455-460.
2. Кутуков В.Б., Щукин Е.Р., Яламов Ю.И. О фотофоретическом движении аэрозольной частицы в поле оптического излучения // ЖТФ. – 1976. – Т. 46. – № 3. – С. 626-627.
3. Lin S.P. On Photophoresis // Coll. Inter. Sci. – 1975. – V. 51. – № 1. – P. 66-74.
4. Кутуков В.Б., Яламов Ю.И. Нелинейные эффекты при распространении лазерного излучения в атмосфере. – Томск, 1977. – С. 145-147.
5. Бахтилов В.И., Щукин Е.Р., Яламов Ю.И. Теория термодиффузиофотофореза летучих крупных сфероидальных аэрозольных частиц // Вопросы физики формообразования и фазовых превращений: сборник. – Калинин:КГУ, 1982. – С. 118-128.
6. Берковский Б.М., Краков М.С., Никифоров И.В., Полевиков В.К. Гидродинамическое сопротивление эллипсоидальной капли при малых числах Рейнольдса // МКГ. – 1987. – №3. – С. 4-8.
7. Oseen C.W. Hydrodinamik. Leipzig. Akademische Verlag. – 1927.
8. Praudman I., Pearson J.R.A. Expansion at small Reynolds Nuber for the Flow Past a Sphere and a Circular Cylinder // J. Fluid. Mech. – 1957. – V.2. – P. 237-262.
9. Acrivos A., Taylor T.D. Head and Mass Transfer From Single Spheres in Stokes Flow // J. Phys. – 1962. – V.5. – № 4. – P. 387-394.
10. Баканов С.П., Ролдугин В.И. О двух методах построения теории термофореза крупных аэрозольных частиц // Коллоид. журн. – 1977. – Т. 39. – № 6. – С. 1027-1038.
11. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // ЖТФ. – 1982. – Т. 52. – Вып. 11. – С. 2253-2261.
12. Хаппель Дж, Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1986. – Т. 6. Гидродинамика. – 736 с.
14. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. – С. 310.
15. Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С. О массе – и теплообмене сферической частицы в ламинарном потоке вязкой жидкости // ПММ. – 1971. – Т. 35. – С. 255-265.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физ.-мат. лит., 1961. – 735 с.
17. Борен К., Хафмер Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986.

AN INFLUENCE OF ENVIRONMENT'S MOVEMENT ON PHOTOPHORESIS OF THE FIRM AEROSOL PARTICLE OF THE SPHEROIDAL FORM

N.V. Malai, N.N. Mironova

The Belgorod state university, 308007, Belgorod, street. Student's 14,
e-mail: malay@bsu.edu.ru
The Belgorod state university, 308007, Belgorod, street. Student's 14,
e-mail: mironovanadya@mail.ru

Influence of an environment's movement on a photophoresis of a large aerosol particle's of the spheroidal form is considered at small relative temperature drops in its vicinity.

Key words: photophoresis, an aerosol particle, a spheroid, environment's movement.