УДК 511.554

ОБ ОДНОЙ БИНАРНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, e-mail: LMoskalenko@bsu.edu.ru

Рассмотрен аналог аддитивной проблемы делителей. Круговым методом с использованием оценок А. Вейля сумм Клостермана получена асимптотическая формула для числа решений уравнения с квадратичными формами.

Ключевые слова: аддитивная проблема делителей, квадратичная форма, круговой метод.

Введение

В 1927 году А.Е. Ингам поставил и решил элементарным методом задачи получения асимптотических формул для числа решений уравнений

$$x_1x_2 + x_3x_4 = n,$$

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \le n. \tag{1}$$

Эти задачи получили название аддитивных проблем делителей.

В 1931 году Т. Эстерман [1] для числа решений $J(n)$ уравнения (1) вывел асимптотическую формулу

$$J(n) = nP_2(\ln n) + R(n),$$

где $P_2(t)$ – многочлен степени 2, а $R(n) = O(n^{11/12}\ln^{17/3} n)$.

В 1979 году Д.И. Исмолов [2], развивая элементарный метод Т. Эстермана, доказал, что $R(n) \ll n^{5/6+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. В 1979 году другим методом ту же оценку, но равномерно по параметру $k \le n^{2/3}$, получил Хиз-Браун [3].

В 2006 году Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [4] вывели новую оценку $R(n)$:

$$R(n) \ll n^{3/4}\ln^4 n.$$

В математической литературе известны многочисленные аналоги данной задачи. Нас заинтересовал один из таких аналогов.

Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F, $Q_1(\overline{m}) = \frac{1}{2}\overline{m}^t A_1\overline{m}$ и $Q_2(\overline{k}) = \frac{1}{2}\overline{k}^t A_2\overline{k}$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_1 и A_2, $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$. Пусть

$$I(n) = \sum_{Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1} e^{-\frac{Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k})}{n}}.$$

Целью статьи является получение асимптотической формулы для суммы $I(n)$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть ε – сколь угодно малое положительное число. Справедлива асимптотическая формула*

$$I(n)=\frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}e^{-\frac{1}{n}}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\bar{0})G_2(q,-l,\bar{0})+O(n^{3/4+\varepsilon}).$$

$G_1(q,l,\bar{0})$ и $G_2(q,-l,\bar{0})$ — двойные суммы Гаусса, δ_F – дискриминант мнимого квадратичного поля F.

Особый ряд $\sum\limits_{q=1}^{\infty}q^{-4}\sum\limits_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\bar{0})G_2(q,-l,\bar{0})$ положителен.

Сумма $I(n)$ представляет собой число решений уравнения $Q_1(\bar{m})-Q_2(\bar{k})=1$, причем каждое решение считается с «весом» $e^{-\frac{Q_1(\bar{m})+Q_2(\bar{k})}{n}}$.

Теорема доказывается круговым методом с использованием оценок А. Вейля сумм Клостермана.

В работе будут использоваться следующие обозначения:

d – отрицательное бесквадратное число;

$F=Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле;

δ_F – дискриминант поля F;

$\chi_1(n)$ – характер квадратичного поля F;

$Q(\bar{k})=\frac{1}{2}\bar{k}'A_1\bar{k}$ – бинарная положительно определенная примитивная квадратичная форма с матрицей A_1, $\det A_1=-\delta_F$;

$G(q,u,\bar{n})=\sum\limits_{\bar{k}\bmod q}\exp\left(\frac{2\pi i}{q}\left(uQ(\bar{k})+\bar{n}'\bar{k}\right)\right)$ – двойная сумма Гаусса, отвечающая форме $Q(\bar{k})$, $\bar{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}\in Z^2$;

$Q_1'(\bar{k})$ – квадратичная форма с матрицей A_1^{-1};

$S(u,v,q)=\sum\limits_{\substack{1\le l<q\\(l,q)=1}}e^{2\pi i\frac{ul+vl^*}{q}}$ – сумма Клостермана, где $ll^*\equiv 1(\bmod q)$;

$d(n)$ – число представлений n в виде произведения двух множителей;

$\mu(n)$ – функция Мебиуса;

$$\chi(\bar{m};\delta,\bar{0})=\begin{cases}1, & \text{при } \bar{m}\equiv\bar{0}(\bmod\delta),\\ 0, & \text{в противном случае};\end{cases}$$

$N=[\sqrt{n}]$;

пусть $\frac{l''}{q''}<\frac{l}{q}<\frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, лежащие на отрезке $[-\frac{1}{N},\ 1-\frac{1}{N})$, $1\le l$, $q\le N$, $q'\le N$, $q''\le N$.

Вспомогательные леммы

Лемма 1. Вычисление двойной суммы Гаусса.

Пусть $(u,q)=1$, $uu^*\equiv 1(\bmod q)$. Справедливо равенство

$$G(q,u,\bar{n}) = c_1(q,\bar{n},Q(\sqrt{d}))\chi_1(u)q\sqrt{(\delta_F,q)}\exp\left(-\frac{2\pi i}{q}c_2(q,\bar{n},Q(\sqrt{d}))u^*\right),$$

где χ_1 – характер квадратичного поля $Q(\sqrt{d})$, а $c_1(q,\bar{n},Q(\sqrt{d}))$ и $c_2(q,\bar{n},Q(\sqrt{d}))$ - целые числа такие, что

$$0 \le \left|c_1(q,\bar{n},Q(\sqrt{d}))\right| \le 1;$$

$$c_2(q,\bar{0},Q(\sqrt{d})) = 0;$$

$$c_1(q,\bar{0},Q(\sqrt{d})) = 0,\ \text{если}\ 2\,\|\,q;$$

$$c_1(q,\bar{0},Q(\sqrt{d})) = 0,\ \text{если}\ 4\,\|\,q,\ q \equiv 2(\bmod 4).$$

Доказательство см. в [5].

Лемма 2. Оценка суммы Клостермана.

Пусть $S(u,v,q) = \sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{2\pi i\frac{ul+vl^*}{q}}$ – сумма Клостермана, где $ll^* \equiv 1(\bmod q)$. Справедлива оценка

$$\left|S(u,v,q)\right| \le d(q)q^{1/2}(u,v,q)^{1/2}.$$

Доказательство см. в [6].

Лемма 3. Функциональное уравнение для тета-ряда.

Пусть $\operatorname{Im}\tau > 0$, $\bar{x} \in R^2$, $\theta(\tau,\bar{x}) = \sum_{n\in Z^2} e^{2\pi i\tau Q(n+\bar{x})}$. Тогда

$$\theta(\tau,\bar{x}) = \frac{i}{\tau\sqrt{|\delta_F|}}\sum_{n\in Z^2}\exp\left(-\frac{\pi i}{\tau}\bar{n}'A^{-1}\bar{n} + 2\pi i\bar{n}'\bar{x}\right).$$

Доказательство см. в [7, глава VI].

Основные леммы

Лемма 4. Пусть $1 \le q \le N$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}} \frac{e^{-2\pi ix}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx = \frac{n}{2}e^{-\frac{1}{n}} + O(qN).$$

Доказательство. Представим интеграл в виде разности двух интегралов

$$\int_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}} \frac{e^{-2\pi ix}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx = I_1 - I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi ix}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx,\quad I_2 = \int_{|x|>\frac{1}{q(q+N)}}\frac{e^{-2\pi ix}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx.$$

Интеграл I_2 оценим сверху

$$I_2 = O\left(\int_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\right) = O(qN).$$

Вычислим интеграл I_1. Имеем

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i x}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{\frac{1}{n^2}+t^2}dt=\frac{n}{2}e^{-\frac{1}{n}},$$

(см., например, [8, глава VI]).

Таким образом,

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}}\frac{e^{-2\pi i x}}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}dx=\frac{n}{2}e^{-\frac{1}{n}}+O(qN)\cdot$$

Лемма 5. Пусть δ_F – дискриминант поля $Q(\sqrt{d})$. Тогда

$$\sum_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1}e^{2\pi i\frac{l}{q}}=\frac{\varphi(\delta)}{\delta}S(-1,0,q)+O\left(|\delta_F|q^{\varepsilon}\right),$$

где $\delta_F=\delta\delta_1$, $(\delta,q)=1$.

Доказательство. Рассмотрим сумму $S=\sum\limits_{\substack{l=0\\(l,|\delta_F|q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}$.

Пусть $\delta_F=\delta\delta_1$, где $(\delta,q)=1$, а δ_1 – либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят q, тогда

$$S=\sum_{\substack{l=0\\(l,\delta q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}.$$

Так как $\sum\limits_{d\backslash n}\mu(d)=1$ при $n=1$, то сумму S можем переписать в виде

$$S=\sum_{\substack{l=0\\(l,\delta q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}\sum_{s\backslash(l,\delta q)}\mu(s).$$

В силу мультипликативности $\mu(s)$ и условия $(\delta,q)=1$ будем иметь

$$S=\sum_{s_1\backslash\delta}\mu(s_1)\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2)\sum_{\substack{l=0\\l\equiv0(\mathrm{mod}\,s_1s_2)}}^{q-1}e^{2\pi i\frac{l}{q}}.$$

Пусть $l=l_1s_2$, $l_1\equiv0(\mathrm{mod}\,s_1)$, тогда

$$S=\sum_{s_1\backslash\delta}\mu(s_1)\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2)\sum_{\substack{l_1=0\\l_1\equiv0(\mathrm{mod}\,s_1)}}^{q_1-1}e^{-2\pi i\frac{l_1}{q_1}},$$

где $q_1=\dfrac{q}{s_2}$.

Если $l_1\equiv0(\mathrm{mod}\,s_1)$, то $\frac{1}{s_1}\sum\limits_{b=0}^{s_1-1}e^{-2\pi i\frac{bl_1}{q_1}}=1$ и 0 в противном случае. Следовательно,

$$S=\sum_{s_1\backslash\delta}\mu(s_1)\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2)\sum_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i\frac{l_1}{q_1}}\frac{1}{s_1}\sum_{b=0}^{s_1-1}e^{-2\pi i\frac{bl_1}{q_1}}.$$

Выделим слагаемое $b=0$:

$$S=\sum_{s_1\backslash\delta}\frac{\mu(s_1)}{s_1}\left(\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2)\sum_{l_1=0}^{q_1-1}e^{2\pi i\frac{l_1}{q_1}}\right)+\sum_{s_1\backslash\delta}\frac{\mu(s_1)}{s_1}\sum_{s_2\backslash q}\mu(s_2)\sum_{b=1}^{s_1-1}\sum_{l_1=0}^{q_1-1}e^{-2\pi i a l_1},$$

где $\alpha = \frac{b}{s_1} - \frac{1}{q_1}$. Отсюда, так как

$$\sum_{s_2 \backslash q} \mu(s_2) \sum_{l_1=0}^{q_1-1} e^{-2\pi i \frac{l_1}{q_1}} = \sum_{\substack{l_1=0 \\ (l_1,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l_1}{q}} = S(-1,0,q) \text{ и } \sum_{s_1 \backslash \delta} \frac{\mu(s_1)}{s_1} = \frac{\varphi(\delta)}{\delta},$$

получаем

$$S = \frac{\varphi(\delta)}{\delta} S(-1,0,q) + O\left(\sum_{s_1 \backslash \delta} \frac{1}{s_1} \sum_{s_2 \backslash q} \left| \sum_{b=1}^{s_1-1} \sum_{l_1=0}^{q_1-1} e^{-2\pi i \alpha l_1} \right| \right).$$

Оценим сумму по l_1:

$$\left| \sum_{l_1=0}^{q_1-1} e^{-2\pi i \alpha l_1} \right| \le \min(q_1, \frac{1}{2\|\alpha\|}).$$

Отсюда – если $q_1 \le 2|\delta_F|$, то $\left| \sum_{l_1=0}^{q_1-1} e^{-2\pi i \alpha l_1} \right| \le q_1 \le 2|\delta_F|$. Если же $2|\delta_F| < q_1$, то, так как $1 \le b \le s_1 - 1$,

$$\|\alpha\| = \left\| \frac{b}{s_1} - \frac{1}{q_1} \right\| \ge \left\| \frac{1}{s_1} - \frac{1}{q_1} \right\| \ge \frac{1}{2s_1} \ge \frac{1}{2|\delta_F|}.$$

Следовательно, в этом случае имеем $\left| \sum_{l_1=0}^{q_1-1} e^{-2\pi i \alpha l_1} \right| \le \frac{1}{2\|\alpha\|} \le |\delta_F|$.

Таким образом, получено неравенство

$$\left| \sum_{l_1=0}^{q_1-1} e^{-2\pi i \alpha l_1} \right| \le 3|\delta_F|,$$

из которого заключаем, что

$$S = \frac{\varphi(\delta)}{\delta} S(-1,0,q) + O\left(|\delta_F| q^{\varepsilon} \right),$$

где постоянная в знаке O – абсолютная.

Следствие 1. Пусть δ_F – дискриминант поля $Q(\sqrt{d})$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{\substack{l=0 \\ (l, |\delta_F| q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} = O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right).$$

Постоянная в знаке O зависит от δ_F.

Доказательство. Учитывая оценку для суммы Клостермана из леммы 2 и равенство, доказанное в лемме 5, получаем требуемую оценку.

Доказательство теоремы

1. Запишем $I(n) = \sum_{Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1} e^{-\frac{Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k})}{n}}$ в виде интеграла

$$I(n) = \int_0^1 S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha} d\alpha,$$

где

$$S_1(\alpha)=\sum_{\bar{m}\in Z^2} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\alpha)Q_1(\bar{m})},\quad S_2(\alpha)=\sum_{\bar{k}\in Z^2} e^{(-\frac{1}{n}-2\pi i\alpha)Q_2(\bar{k})}.$$

Пусть $N=[n]$, $\xi_{0,1}=[-\frac{1}{N},\frac{1}{N})$. Разобьем промежуток $[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N})$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N (см. [9]). Пусть $\frac{l''}{q''}<\frac{l}{q}<\frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, $1\le l$, $q\le N$. Определим промежутки

$$\xi_{p,q}=[\frac{p}{q}-\frac{1}{q(q+q'')},\frac{p}{q}+\frac{1}{q(q+q')}).$$

Из свойств дробей Фарея следует, что

$$[-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N})=\bigcup_{q=1}^{N}\bigcup_{\substack{p=0\\(p,q)=1}}^{q-1}\xi_{p,q},$$

причем $\xi_{p,q}\cap\xi_{p',q'}=\varnothing$ при $(p,q)\ne(p',q')$. Тогда

$$I(n)=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}\int_{\xi_{p,q}} S_1(\alpha)S_2(\alpha)e^{-2\pi i\alpha}d\alpha=$$

$$=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{l}{q}}\int_{-\frac{1}{q(q+q'')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} S_1(\frac{l}{q}+x)S_2(\frac{l}{q}+x)e^{-2\pi ix}dx. \qquad (**)$$

2. Преобразуем сумму $S_1(\frac{l}{q}+x)=\sum_{\bar{m}\in Z^2} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\frac{l}{q}+2\pi ix)Q_1(\bar{m})}$, имеем

$$\sum_{\bar{m}\in Z^2} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\frac{l}{q}+2\pi ix)Q_1(\bar{m})}=\sum_{\bar{s}\bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_1(\bar{s})}\sum_{\substack{\bar{m}\in Z^2\\ \bar{m}\equiv\bar{s}(\bmod q)}} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi ix)Q_1(\bar{m})}=$$

$$=\sum_{\bar{s}\bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_1(\bar{s})}\sum_{\bar{m}} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi ix)q^2Q_1(\bar{m}+\frac{\bar{s}}{q})}=\sum_{\bar{s}\bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_1(\bar{s})}\theta((x+\frac{i}{2\pi n})q^2,\frac{\bar{s}}{q}).$$

Используя лемму 3, функцию $\theta((x+\frac{i}{2\pi n})q^2,\frac{\bar{s}}{q})$ перепишем в виде:

$$\theta((x+\frac{i}{2\pi n})q^2,\frac{\bar{s}}{q})=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}}\frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix}\sum_{\bar{m}\in Z^2} e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\bar{m})}{\frac{1}{n}-2\pi ix}+2\pi i\frac{\bar{s}\bar{m}^t}{q}},$$

где, если $Q_1(\bar{s})=\frac{1}{2}\bar{s}^t A_1\bar{s}$, A_1 – матрица размера 2×2, то $Q_1'(\bar{s})=\frac{1}{2}\bar{s}^t A_1^{-1}\bar{s}$.

Тогда для $S_1(\frac{l}{q}+x)$ справедливо равенство

$$\sum_{\bar{m}\in Z^2} e^{(-\frac{1}{n}+2\pi i\frac{l}{q}+2\pi ix)Q_1(\bar{m})}=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{|\delta_F|}}\frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix}\sum_{\bar{m}\in Z^2} e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\bar{m})}{\frac{1}{n}-2\pi ix}}\sum_{\bar{s}\bmod q} e^{2\pi i\frac{l}{q}Q_1(\bar{s})+2\pi i\frac{\bar{s}\bar{m}^t}{q}},$$

Выделим слагаемое $\bar{m}=\bar{0}$. Тогда $S_1(\frac{l}{q}+x)=\varphi_1+\Phi_1$, где

$$\varphi_1=\frac{2\pi}{\sqrt{|\delta_F|}q^2}\frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix}G_1(q,l,\bar{0})$$

и

$$\Phi_1=\frac{2\pi}{\sqrt{|\delta_F|}q^2}\frac{1}{\frac{1}{n}-2\pi ix}\sum_{\substack{\bar{m}\in Z^2\\ \bar{m}\ne\bar{0}}} e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\bar{m})}{\frac{1}{n}-2\pi ix}}G_1(q,l,\bar{m}).$$

$G_1(q,l,\overline{m})$ – двойная сумма Гаусса, отвечающая квадратичной форме Q_1. Аналогично получаем тождество для $S_2(\frac{l}{q}+x)$:

$$S_2(\frac{l}{q}+x)=\varphi_2+\Phi_2,$$

где

$$\varphi_2=\frac{2\pi}{\sqrt{|\delta_F|}q^2}\frac{1}{\frac{1}{n}+2\pi ix}G_2(q,-l,\overline{0})$$

и

$$\Phi_2=\frac{2\pi}{\sqrt{|\delta_F|}q^2}\frac{1}{\frac{1}{n}+2\pi ix}\sum_{\substack{\overline{k}\in Z^2\\ \overline{m}\neq 0}}e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_2'(\overline{k})}{\frac{1}{n}+2\pi ix}}G_2(q,-l,\overline{k}).$$

$G_2(q,-l,\overline{k})$ – двойная сумма Гаусса, отвечающая квадратичной форме Q_2.

3. Ввиду (**) и представлений для функций $S_1(\frac{l}{q}+x)$ и $S_2(\frac{l}{q}+x)$ имеем

$$I(n)=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где

$$I_1=\frac{4\pi^2}{|\delta_F|}\sum_{q\le N}\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\frac{e^{-2\pi ix}dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2},$$

$$I_2=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\varphi_1\Phi_2e^{-2\pi ix}dx,$$

$$I_3=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\varphi_2\Phi_2e^{-2\pi ix}dx,$$

$$I_4=\sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}\Phi_1\Phi_2e^{-2\pi ix}dx.$$

Интеграл I_1 вычислим асимптотически, а интегралы I_2, I_3, I_4 оценим сверху. Начнем с I_1. Разобьем интеграл $\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}$ на сумму интегралов

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}=\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{-\frac{1}{q(q+N)}}+\int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}}+\int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q')}}.$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_1=I_{1,1}+I_{1,2}+I_{1,3}.$$

4. Вычислим асимптотически $I_{1,2}$. В силу леммы 4, имеем

$$I_{1,2}=\frac{4\pi^2}{|\delta_F|}\sum_{q\le N}\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=0\\(l,q)=1}}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{l}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})\left(\frac{n}{2}e^{-\frac{1}{n}}+O(qN)\right)=\sum\nolimits_1+O(\sum\nolimits_2).$$

Оценим вклад остатка $O(\sum_2)$. Так как $(l,q)=1$, тогда в силу леммы 1

$$G_1(q,l,\overline{0})=c_1\chi_1(l)q\sqrt{(|\delta_F|,q)}\text{ и }G_2(q,-l,\overline{0})=c_1\chi_1(-l)q\sqrt{(|\delta_F|,q)},$$

где c_1 не зависит от l. Получаем

$$\sum\nolimits_2 = \frac{4\pi^2 c_1^2 N}{|\delta_F|} \sum_{q \le N} \frac{1}{q} (|\delta_F|, q) \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} \chi_1^2(l) e^{-2\pi i \frac{l}{q}}.$$

Воспользуемся тем, что $\chi_1^2(l) = 1$, где $(l, |\delta_F|) = 1$. Переходим к неравенствам:

$$\sum\nolimits_2 \quad N^{1+\varepsilon} \sum_{q \le N} \frac{1}{q} \sum_{\substack{l=0 \\ (l,|\delta_F| q)=1}}^{q-1} e^{2\pi i \frac{l}{q}}.$$

Для внутренней суммы справедлива оценка из следствия 1:

$$\sum_{\substack{l=0 \\ (l,|\delta_F| q)=1}}^{q-1} e^{-\frac{2\pi i l}{q}} = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Тогда

$$\sum\nolimits_2 \quad N^{1+\varepsilon_1} \sum_{q \le N} q^{-\frac{1}{2}} \quad N^{\frac{3}{2}+\varepsilon_1}.$$

Учитывая, что $N = [\sqrt{n}]$, получаем вклад остатка:

$$\sum\nolimits_2 = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Имеем

$$I_{1,2} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} e^{-\frac{1}{n}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}) + R,$$

где

$$R = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} e^{-\frac{1}{n}} \sum_{q > N} q^{-4} \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}).$$

Оценим сверху сумму R:

$$R \quad n e^{-\frac{1}{n}} \sum_{q > N} q^{-4} \left| \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) \right|.$$

Заменим суммы Гаусса их точными значениями из леммы 1, тогда

$$R \quad n e^{-\frac{1}{n}} \sum_{q > N} q^{-2} \left| \sum_{\substack{l=0 \\ (l,|\delta_F| q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} \right|.$$

Учитывая оценку из следствия 1, будем иметь

$$R \quad n^{1+\varepsilon} \sum_{q > N} q^{-\frac{3}{2}} \quad n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$I_{1,2} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} e^{-\frac{1}{n}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

5. Проведем оценку интеграла $I_{1,3}$.

Перейдем к неравенствам:

$$|I_{1,3}| \le \frac{4\pi^2}{|\delta_F|} \sum_{q \le N} \frac{1}{q^4} \left| \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) \right| \left| \int_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q)}} \frac{e^{-2\pi i x} dx}{\frac{1}{n^2} + 4\pi^2 x^2} \right|.$$

Так как $q \le N$, то

$$\left| \int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \frac{e^{-2\pi i x}dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2} \right| \quad \int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = O(qN).$$

Тогда

$$I_{1,3} = O(\textstyle\sum_2).$$

Оценка для суммы $\sum_2$ проводилась в пункте 4. Таким образом,

$$I_{1,3} = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Интеграл I_{11} оценивается аналогично.

6. Рассуждения об оценивании I_2, I_3, I_4 не сильно отличаются от I_1. Приведе полное доказательство для интеграла I_4:

$$I_4 = \sum_{q \le N} \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i x} dx.$$

Вместо Φ_1, Φ_2 подставим их значения, полученные в пункте 2. Имеем

$$I_4 = \frac{4\pi^2}{|\delta_F|} \sum_{q \le N} q^{-4} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} \frac{e^{-2\pi i x}dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2} \sum_{\substack{\overline{m} \in Z^2 \\ \overline{m} \ne 0}} e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1(\overline{m})}{\frac{1}{n}-2\pi i x}} \sum_{\substack{\overline{k} \in Z^2 \\ \overline{k} \ne 0}} e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_2(\overline{k})}{\frac{1}{n}+2\pi i x}} .$$

$$\cdot \left(\sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q,l,\overline{m}) G_2(q,-l,\overline{k}) \right).$$

Для начала оценим сумму

$$V = \sum_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q,l,\overline{m}) G_2(q,-l,\overline{k}).$$

Для сумм Гаусса справедливы тождества

$$G_1(q,l,\overline{m}) = c_1 \chi_1(l) q \sqrt{(\delta_F, q)} e^{-\frac{2\pi i}{q} c_2 l^*} \text{ и } G_2(q,-l,\overline{k}) = c_1 \chi_1(-l) q \sqrt{(\delta_F, q)} e^{\frac{2\pi i}{q} c_2 l^*},$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от l.

Полученную сумму $\sum\limits_{\substack{l=0 \\ (l,|\delta_F| q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}}$ оцениваем, используя следствие 1. В итоге имеем:

$$V \quad q^{\frac{5}{2}+\varepsilon}.$$

Разобьем интеграл $\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}}$ на сумму интегралов:

$$\int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{\frac{1}{q(q+q')}} = \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q')}}^{-\frac{1}{q(q+N)}} + \int\limits_{-\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+N)}} + \int\limits_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q')}} .$$

Соответственно этому разбиению получаем

$$I_4 = I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3}.$$

Оценим $I_{4,2}$.

$$|I_{4,2}|\le\frac{4\pi^2}{|\delta_F|}\sum_{q\le N}q^{-4}\int\limits_0^{\frac{1}{q(q+N)}}\frac{dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}\sum_{\substack{\bar m\in Z^2\\ \bar m\ne 0}}e^{-\frac{4\pi^2 Q_1(\bar m)}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}}\sum_{\substack{\bar k\in Z^2\\ \bar k\ne 0}}e^{-\frac{4\pi^2 Q_2(\bar k)}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}}\cdot|V|$$

Пусть θ – сколь угодно малое положительное число, тогда

$$|I_{4,2}|\le\sum_{q\le n^{1/2-\theta}}\int\limits_0^{\frac{1}{qn^{1/2+\theta}}}+\sum_{q\le n^{1/2-\theta}}\int\limits_{\frac{1}{qn^{1/2+\theta}}}^{\frac{1}{qN}}+\sum_{n^{1/2-\theta}<q\le N}\int\limits_0^{\frac{1}{qN}}=$$

$$=\sum\nolimits_{41}+\sum\nolimits_{42}+\sum\nolimits_{43}.$$

В сумме $\sum_{41}$,так как $q\le n^{1/2-\theta}$, то

$$\left|\int\limits_0^{\frac{1}{qn^{1/2+\theta}}}\frac{dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}\right|\quad\int\limits_0^{\frac{2\pi}{qn^{1/2+\theta}}}\frac{dt}{\frac{1}{n^2}+t^2}=O(n^{\frac{1}{2}\ \theta}q^{-1}).$$

Учтем также, что при тех же ограничениях на q:

$$e^{-\frac{4\pi^2 Q_1(\bar m)}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}}\le e^{\ cn^{2l}},\ e^{-\frac{4\pi^2 Q_2(\bar k)}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}}\le e^{-cn^{2l}}.$$

Так как оценка для суммы V не зависит от $\bar m$ и $\bar k$, тогда

$$\sum_{\substack{\bar m\in Z^2\\ \bar m\ne 0}}e^{-\frac{4\pi^2 Q_1(\bar m)}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}}=O(e^{-cn^{2l}}),\ \sum_{\substack{\bar k\in Z^2\\ \bar k\ne 0}}e^{-\frac{4\pi^2 Q_2(\bar k)}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}}=O(e^{-cn^{2l}}).$$

Таким образом,

$$\sum\nolimits_{41}\quad n^{\frac{3}{2}-l+\varepsilon}e^{-cn^{4l}}\sum_{q\le n^{1/2\ \theta}}q^{-\frac{3}{2}}=O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Перейдем к $\sum_{42}$.

$$\left|\int\limits_{\frac{1}{qn^{1/2+\theta}}}^{\frac{1}{qN}}\frac{dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}\right|\quad n\int\limits_{\frac{n^{1/2-\theta}}{q}}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=O(n^{\frac{1}{2}+\theta}q).$$

Теперь, так как $q\le n^{1/2\ \theta}$, $\frac{1}{qn^{1/2+\theta}}\le x\le\frac{1}{qN}$, то

$$e^{-\frac{4\pi^2 Q_1(\bar m)}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}}\le e^{-cQ_1(\bar m)},e^{-\frac{4\pi^2 Q_2(\bar k)}{q^2(\frac{1}{n}+4\pi^2x^2n)}}\le e^{-cQ_2(k)}.$$

Учтем оценку для суммы V, тогда имеем:

$$\sum\nolimits_{42}\quad n^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon}\sum_{\substack{\bar m\in Z^2\\ \bar m\ne 0}}e^{-cQ_1(\bar m)}\sum_{\substack{\bar k\in Z^2\\ \bar k\ne 0}}e^{-cQ_2(\bar k)}\sum_{q\le n^{1/2-\theta}}q^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$\sum_{\substack{\bar m\in Z^2\\ \bar m\ne 0}}e^{-cQ_1(\bar m)}=O(1),\ \sum_{\substack{\bar k\in Z^2\\ \bar k\ne 0}}e^{-cQ_2(\bar m)}=O(1),$$

то

$$\sum\nolimits_{42}=O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Осталось оценить $\sum_{43}$.

Здесь

$$\left|\int_0^{\frac{1}{qN}} \frac{dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}\right| \quad n\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = O(n).$$

Теперь, так как $q \le N, x \le \frac{1}{qN}$, то

$$e^{-\frac{4\pi^2 Q_1(\bar{m})}{q^2\left(\frac{1}{n}+4\pi^2 x^2 n\right)}} \le e^{-cQ_1(\bar{m})}, e^{-\frac{4\pi^2 Q_2(\bar{k})}{q^2\left(\frac{1}{n}+4\pi^2 x^2 n\right)}} \le e^{-cQ_2(\bar{k})}$$

и соответственно

$$\sum_{\substack{\bar{m}\in Z^2\\ \bar{m}\neq 0}} e^{-cQ_1(\bar{m})} = O(1), \ \sum_{\substack{\bar{k}\in Z^2\\ \bar{k}\neq 0}} e^{-cQ_2(\bar{m})} = O(1).$$

Учтем оценку для суммы V, имеем:

$$\sum\nolimits_{43} \quad n^{1+\varepsilon} \sum_{n^{1/2-\theta}<q\le N} q^{-\frac{3}{2}} \quad n^{1+\varepsilon} \sum_{q>n^{1/2-\theta}} q^{-\frac{3}{2}} \quad n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$I_{4,2} = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Проведем оценку $I_{4,3}$.

Так как $q \le N$, то

$$\left|\int_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\frac{1}{q(q+q)}} \frac{e^{-2\pi i x}dx}{\frac{1}{n^2}+4\pi^2x^2}\right| \quad \int_{\frac{1}{q(q+N)}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = O(qN).$$

Кроме того, при $q \le N, x > \frac{1}{qN}$

$$\sum_{\substack{\bar{m}\in Z^2\\ \bar{m}\neq 0}} \left| e^{-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1(\bar{m})}{\frac{1}{n}-2\pi i x}} \right| = O(1), \ \sum_{\substack{\bar{k}\in Z^2\\ \bar{k}\neq 0}} \left| e^{\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_2(\bar{k})}{\frac{1}{n}+2\pi i x}} \right| = O(1).$$

Тогда с учетом оценки $V \quad q^{\frac{5}{2}+\varepsilon}$ заключаем, что

$$I_{4,3} \quad N^{1+\varepsilon}\sum_{q\le N} q^{-\frac{1}{2}} \quad N^{\frac{3}{2}+\varepsilon}.$$

Так как $N = \left[\sqrt{n}\right]$, то $I_{4,3} = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon})$.

Объединяем полученные для I_4 оценки, в итоге имеем:

$$I_4 = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

7. В силу проведенных выше рассуждений, заключаем, что

$$I(n) = \frac{4\pi^2 n}{|\delta_F|} e^{-\frac{1}{n}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=0\\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q,l,\bar{0}) G_2(q,-l,\bar{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}).$$

Заключение

Для суммы $I(n) = \sum\limits_{Q_1(\bar{m})-Q_2(\bar{k})=1} e^{-\frac{Q_1(\bar{m})+Q_2(\bar{k})}{n}}$. получена асимптотическая формула:

$$I(n) = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} e^{-\frac{1}{n}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=0\\ (l,q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{l}{q}} G_1(q,l,\bar{0}) G_2(q,-l,\bar{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}),$$

где ε – сколь угодно малое положительное число, $G_1(q,l,\bar{0})$ и $G_2(q,-\bar{l},0)$ — двойные суммы Гаусса, δ_F – дискриминант мнимого квадратичного поля F.

Данный результат соответствует оценке Г.И. Архипова и В.Н. Чубарикова, но уравнение, для которого ищется число решений, имеет общий вид, а именно $Q_1(\bar{m})-Q_2(\bar{k})=1$.

Теорема доказана круговым методом с использованием оценок А. Вейля сумм Клостермана.

Литература

1. Esterman T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. reine und ang. Math. – 1931. – № 164. – P. 173–182.

2. Исмолов Д.И. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений // Докл. АН ТаджССР. – 1979. – Т. 22 – № 2. – С. 75–79.

3. Heath-Brown D.R. The fourths power moment of the Riemann zeta-function // Proc. London Math. Soc. – 1979. – V. 38. – № 3. – P. 385–422.

4. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Об аддитивной проблеме делителей Ингама // Вестник Московского университета: Сер. 1 «Математика. Механика». – 2006. – № 5. – С. 32–35.

5. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник. – 2003. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 53-67.

6. Estermann T. On Klostermann's sum // Mathematika. – 1961. – № 8. – P. 83-86.

7. Ogg A.P. Modular Forms and Dirichlet Series. – N.-Y.: W.A.Benjamin, Inc., 1969. – 211 p.

8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для студ. механ. спец. мех.-мат. фак. гос. ун-тов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. – 678 с.

9. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Изд. техн. лит., 1952. – 112 с.

ABOUT ONE BINARY ADDITIVE PLOBLEM WITH QUADRATIC FORMS

L.N. Kurtova

Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia,
e-mail: LMoskalenko@bsu.edu.ru

The analog of additive ploblem of divisors is considered. An asymptotic formula for number of solution the equation with quadratic forms is received by circulars method with using estimation A. Weil Kloostermann's sums.

Key words: additive problem of divisors, quadratic form, circulars method.