УДК 531.1

НЕСЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ С МАРКОВСКИМ ИЗМЕЛЬЧЕНИЕМ В ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОГРУЖЕНИЯ

Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Аннотация. Доказана теорема о несепарабельности случайных множеств с марковскими измельчениями, пространством погружения которых является полуинтервал действительной оси.

Ключевые слова: случайные множества, марковские измельчения, несепарабельность.

1. Введение. В работе [1] были конструктивно определены случайные множества в пространстве погружения $\mathbb{R}$, построенные на основе так называемых марковских измельчений. Эти множества замечательны тем, что они обладают свойством фрактальности – каждая их случайная реализация с вероятностью 1 имеет мощность континуума и, вместе с тем, нулевую лебегову меру пространства погружения. Множества указанного класса были названы нами *случайными множествами с марковскими измельчениями*. Было доказано, что каждая их типичная случайная реализация обладает с вероятностью единица неслучайной размерностью Хаусдорфа. Вместе с тем, оказывается, и доказательству этого факта посвящена настоящая работа, что такие множества не обладают свойством сепарабельности. Это обстоятельство приводит к следующей проблеме. Случайные множества с марковскими измельчениями вводятся в [1] как предельные множества для траекторий специальных стохастических динамических систем. Такое определение затрудняет оперирование их распределением вероятностей при вычислении различного рода математических ожиданий, в частности, при вычислении статистических средних каких-то локальных характеристик случайных реализаций аналогично тому, как это делается в теории случайных процессов. В последнем случае, вычисление средних значений локальных характеристик случайных траекторий процессов осуществляется, как правило, на основе многоточечных распределений вероятностей случайных процессов. При этом очень важно, чтобы многоточечные распределения, в некотором смысле, однозначно характеризовали случайный процесс. Если реализуется такое положение, то можно считать, что случайный процесс определяется поточечно, несмотря на то, что каждая его траектория состоит из континуума случайных точек, а распределение вероятностей процесса должно быть задано на основе значений вероятностей счётного множества случайных событий. Однозначная характеризация случайного процесса многоточечными распределениями гарантируется известной теоремой Колмогорова, которая утверждает, что если процесс обладает т.н. свойством *сепарабельности*, то он, действительно, определяется полным набором согласованных многоточечных распределений.

Ввиду однозначной связи между случайными множествами и соответствующими им индикаторными случайными процессами, а также, ввиду непосредственной связи (по крайней мере, при наличии свойства замкнутости случайных множеств) между их свойствами сепарабельности (множеств и процессов), несепарабельность множеств с марковскими измельчениями приводит к тому, что их локальное внутреннее вероятностное описание на основе многоточечных распределений вероятностей является неадекватным. В связи с этим, возникает вопрос о том, в каких терминах локальная характеризация этих случайных множеств всё же допустима.

2. Случайные множества с марковскими измельчениями. Для простоты изложения ниже даётся определение случайных множеств с марковскими измельчениями для того случая, когда пространством погружения является полуинтервал $[0, 1)$.

Составными элементы, из которых конструируются множества с марковскими измельчениями являются открытые справа полуинтервалы $\delta \subset [0, 1)$. Их совокупности мы будем обозначать прописными рукописными буквами. Вместе с тем, при описании случайных событий, связанных с этими случайными множествами, удобно указывать концы (координаты) этих полуинтервалов – точки из $[0, 1)$. Они будут обозначаться нами греческими буквами α и ξ и, по необходимости, снабжаться индексами. Не более чем счётные совокупности точек из $[0, 1)$ обозначаются далее большими греческими буквами, а заведомо несчётные – большими латинскими буквами. В последнем случае, если множество точек представляет собой случайную реализацию, то оно помечается сверху знаком "тильда".

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ и $\mathcal{K}_1 = \{\delta_j \equiv [j/N, (j+1)/N); j = 0 \div N-1\}$ – совокупность дизъюнктивных полуинтервалов, образующих разложение единицы полуинтервала $[0, 1)$. Рассмотрим вероятностное пространство $\langle \mathcal{K}_1, \mathfrak{K}_1, q[\cdot] \rangle$, в котором $\mathfrak{K}_1 = 2^{\mathcal{K}_1}$ является булевой алгеброй с 2^N элементами, а распределение вероятностей $q[\cdot]$ на $\mathfrak{K}_1$ обладает специальным свойством $q[\varnothing] = 0$. Оно, как будет видно из дальнейшего рассмотрения, гарантирует непустоту случайной реализаций конструируемого нами случайного множества.

Каждое случайное множество с марковскими измельчениями описываемого нами типа полностью определяется значением параметра N, который мы называем *параметром дробления* и распределением вероятностей $q[\cdot]$.

Введём далее следующие обозначения. Пусть m – натуральное число, и $\mathcal{K}_m$ – множество полуинтервалов следующего вида $\mathcal{K}_m = \{[j/N^m, (j+1)/N^m); j = 0 \div N^m - 1\}$. Каждому классу полуинтервалов $\Gamma \subset \mathcal{K}_m$ (каждый из них однозначно характеризуется своим левым концом, и поэтому класс Γ можно отождествить с конечным множеством точек – левых концов полуинтервалов, входящих в этот класс) сопоставим подмножество $D_m(\Gamma) \subset [0, 1)$, которое определяется формулой

$$D_m(\Gamma) = \bigcup_{\delta \in \Gamma} \delta\,.$$

Семейство всех таких подмножеств обозначим $\mathfrak{K}_m$:

$$\mathfrak{K}_m = \{D_m(\Gamma); \varnothing \neq \Gamma \subset \mathcal{K}_m\}.$$

При каждом фиксированном m оно представляет собой булеву алгебру. При этом алгебры с различными значениями m связываются включениями $\mathfrak{K}_m \subset \mathfrak{K}_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$.

Наконец, введём операцию проектирования R_m любого подмножества $X \subset [0,1)$ в семейство $\mathfrak{K}_m$, а именно, R_m представляет собой отображение $\mathsf{R}_m : 2^{[0,1)} \mapsto \mathfrak{K}_m$, определяемое формулой

$$\mathsf{R}_m(X) = \bigcup_{\delta \in \mathcal{K}_m : \delta \cap X \neq \varnothing} \delta, \quad \mathsf{R}_m(X) \in \mathfrak{K}_m.$$

Очевидно, что для всякого множества $X \subset [0,1)$ последовательность $\langle \mathsf{R}_m(X); m \in \mathbb{N}\rangle$ нерасширяющаяся, $\mathsf{R}_m(X) \supset \mathsf{R}_{m+1}(X)$, и имеет место теоретико-множественный предел

$$X = \lim_{m\to\infty} \mathsf{R}_m(X). \tag{1}$$

Компоненты указанной последовательности строятся в виде объединений

$$\mathsf{R}_m(X) = \bigcup_{\delta \in \Delta_m} \delta,$$

в которых $\Delta_m = \{\delta \in \mathcal{K}_m : \delta \cap X \neq \varnothing\}$.

Ввиду свойства (1), для любого случайного множества и, в частности, для множества с марковскими измельчениями, каждая случайная реализация $\tilde{X}$ может быть определена в виде теоретико-множественного предела

$$\tilde{X} = \lim_{m\to\infty} \mathsf{R}_m(\tilde{X}), \tag{2}$$

где проекции

$$\mathsf{R}_m(\tilde{X}) = \bigcup_{\delta \in \tilde{\Delta}_m} \delta,$$

определяются случайным классом полуинтервалов $\tilde{\Delta}_m = \{\delta \in \mathcal{K}_m : \delta \cap \tilde{X} \neq \varnothing\}$ или, что эквивалентно, случайным множеством левых концов этих полуинтервалов. При этом если заданы распределения вероятностей P_m в вероятностных пространствах $\langle \mathcal{K}_m, \mathfrak{K}_m, \mathsf{P}_m\rangle$, $m \in \mathbb{N}$, то определено распределение вероятностей P конструируемого случайного множества в виде предела

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{m\to\infty} \mathsf{P}_m(\mathsf{R}_m(A))$$

для любого случайного события A из σ-алгебры

$$\mathfrak{K} = \lim_{m\to\infty} \mathfrak{K}_m.$$

Распределение вероятностей для случайных множеств с марковскими измельчениями определяется посредством специального задания последовательности $\langle \mathsf{P}_m; m \in \mathbb{N}\rangle$

распределений вероятностей. Значения этих распределений $\mathsf{P}_m(Z) = \Pr\{\mathsf{R}_m(\tilde{X}) = Z\}$, $Z \in \mathfrak{K}_m$, $m \in \mathbb{N}$ связываются в марковскую цепь. А именно, для любой пары $Z \in \mathfrak{K}_{m+1}$, $Y \in \mathfrak{K}_m$ такой, что $\mathsf{R}_m(Z) = Y$ имеет место

$$\mathsf{P}_{m+1}(Z) = \Pr\{\mathsf{R}_{m+1}(\tilde{X}) = Z | \mathsf{R}_m(\tilde{X}) = Y\}\mathsf{P}_m(Y)\,, \tag{3}$$

где условная вероятность определяется однородным марковским *условием ветвления*

$$\Pr\{\mathsf{R}_{m+1}(\tilde{X}) = Z | \mathsf{R}_m(\tilde{X}) = Y\} = \prod_{\delta \in \mathsf{S}_m(Y)} q\left[\mathsf{S}_1\left(\mathsf{T}_m(Z \cap \delta)\right)\right]\,. \tag{4}$$

Здесь T_m – операция, состоящая из такого сдвига множества $Z \cap \delta \subset \delta$, который совмещает левый конец полуинтервала δ с нулём, и из последующего растяжения относительно нуля сдвинутого множества в N^m раз так, что перенесённый полуинтервал совмещается с $[0,1)$. Посредством $\mathsf{S}_m(Y)$ в (4) обозначен набор тех полуинтервалов, принадлежащих $\mathcal{K}_m$, из которых составляется множество Y, то есть $\mathsf{S}_m(Y) = \{\delta \in \mathcal{K}_m : \delta \cap Y \neq \varnothing\}$.

Не всякое множество, сконструированное по описанной схеме, является, в действительности, случайным. Для наличия случайности (множественности) предельных реализаций $\tilde{X}$ необходима и достаточна *невырожденность* распределения вероятностей $q[\cdot]$. Это распределение мы называем *вырожденным*, если в $\mathcal{K}_1$ найдётся такая совокупность $\Gamma \subset \mathcal{K}_1$ полуинтервалов δ, для которой $q[\Gamma] = 1$. Среди вырожденных распределений $q[\cdot]$ есть такое, которое мы называем *тривиальным* и при котором $\tilde{X}_m = [0,1)$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Для тривиального распределения $\Gamma = \mathcal{K}_1$.

Теорема о несепарабельности. Нам понадобится следующее определение сепарабельности случайного множества [2], [3].

Определение 1 [3]. *Случайное замкнутое множество $\langle \Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}\rangle$ в $\mathbb{R}$ со случайными реализациями $\tilde{X} \in \Omega$ называется сепарабельным, если для любого счётного, всюду плотного в пространстве погружения множества Λ выполняется*

$$\Pr\{\tilde{X} = \mathsf{cl}(\tilde{X} \cap \Lambda)\} = 1\,.$$

Таким образом, случайное множество $\langle \Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}\rangle$ в пространстве погружения $[0,1)$ является несепарабельным (по Матерону), если в $[0,1)$ найдётся счётное, всюду плотное множество Λ, для которого

$$\Pr\{\tilde{X} = \mathsf{cl}(\tilde{X} \cap \Lambda)\} < 1\,.$$

Для случайных множеств с марковскими измельчениями роль пространства Ω элементарных событий выполняет

$$\mathcal{K} = \lim_{m\to\infty} \mathcal{K}_m = 2^{[0,1)}\,,$$

а роль σ-алгебры $\mathfrak{A}$ выполняет σ-алгебра $\mathfrak{K}$. Докажем теперь основное утверждение настоящей работы.

Теорема. *При любом значении параметра дробления N и при любом нетривиальном распределении вероятностей $q[\cdot]$ случайное множество $\langle \mathcal{K}, \mathfrak{K}, \mathsf{P} \rangle$ с марковскими измельчениями несепарабельно.*

□ **А.** Пусть $\langle \mathcal{K}, \mathfrak{K}, \mathsf{P} \rangle$ – случайное множество с марковским измельчением, определяемое значением N параметра дробления и распределением вероятностей $q[\cdot]$ на $\mathcal{K}_1$.

Докажем, что для нетривиального $q[\cdot]$ в $\mathcal{K}_1$ всегда найдется такой полуинтервал $\delta_r = [r/N, (r+1)/N)$, что имеет место неравенство

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_1 : \delta \subset Z} q[\mathsf{S}_1(Z)] < 1 \,. \tag{5}$$

Допустим противное, что для любого $\delta \in \mathcal{K}_1$ имеет место

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_1 : \delta_r \subset Z} q[\mathsf{S}_1(Z)] = 1 \,. \tag{6}$$

Система из всех N уравнений (6) для неотрицательных чисел $q[\mathsf{S}_1(Z)]$ таких, что $q[\varnothing] = 0$ и

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_1} q[\mathsf{S}_1(Z)] = 1 \,, \tag{7}$$

имеет единственное решение

$$q_*[\mathsf{S}_1(Z)] = \begin{cases} 1 & ; \mathsf{S}_1(Z) = \mathcal{K}_1 \quad (\text{или } Z = [0,1)), \\ 0 & ; \mathsf{S}_1(Z) \neq \mathcal{K}_1 \quad (\text{или } Z \neq [0,1)), \end{cases} \tag{8}$$

удовлетворяющее (7). Единственность этого решения устанавливается следующим образом. Рассмотрим любое решение системы (6), которое представляет собой набор неотрицательных чисел, связанных условием (7). Зафиксируем полуинтервал $\delta \in \mathcal{K}_1$. Из уравнения системы (6) для этого полуинтервала и условия (7) следует, что

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_1 : \delta \cap Z = \varnothing} q[\mathsf{S}_1(Z)] = 0 \,.$$

Так как все числа $q[\mathsf{S}_1(Z)]$ неотрицательны, то отсюда следует, что $q[\mathsf{S}_1(Z)] = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{K}_1$, для которых $\delta \cap Z = \varnothing$. Ввиду произвольности полуинтервала $\delta \in \mathcal{K}_1$, получаем, что $q[\mathsf{S}_1(Z)] > 0$ только в том случае, когда $Z \cap \delta \neq \varnothing$ для всех полуинтервалов δ из $\mathcal{K}_1$. Тогда имеется единственная возможность – $Z = [0,1)$. Так как, по предположению, $q[\cdot]$ нетривиально, то сделанное нами предположение неверно, и, по крайней мере, для одного полуинтервала δ выполняется неравенство (5).

B. Рассмотрим счётное множество N-адических периодических дробей

$$\Lambda = \{0, (\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} r)_N ; \alpha_j \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}, j = 1 \div (k-1)\} \,.$$

Это множество всюду плотно в $[0,1)$. Действительно, пусть $x = 0, (\xi_1 \xi_2 ... \xi_n ...)_N \in [0,1)$, то есть имеет место разложение

$$x = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_l}{N^l} \,. \tag{9}$$

Тогда

$$|x - 0,(\xi_1\xi_2...\xi_{k-1}r)_N| < (N-1)\sum_{l=k}^{\infty}\frac{1}{N^l} = \frac{1}{N^{k-1}},$$

и поэтому последовательность $\langle x_k = 0,(\xi_1\xi_2...\xi_{k-1}r)_N; k \in \mathbb{N}\rangle$ чисел из Λ такова, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

C. Вычислим вероятность события $\{\mathsf{R}_m(\{x\}) \subset \mathsf{R}_m(\tilde{X})\}$ для произвольной точки $x = 0,(\xi_1\xi_2...)_N \in \Lambda$ с некоторым периодом $k \in \mathbb{N}$, где $\xi_{j+k} = \xi_j$, $j \in \mathbb{N}$ и $\xi_{kl} = r$ при всех $l \in \mathbb{N}$. Введём обозначение для значений сумм

$$q_j = \sum_{Z\in\mathfrak{K}_1:\,\delta_j\subset Z} q[\mathsf{S}_1(Z)].$$

Будем считать, что полуинтервал, существование которого доказывается в п. **A**, имеет номер r, и поэтому $\delta_r < 1$.

Искомая нами вероятность $Q_m = \Pr\{\mathsf{R}_m(\{x\}) \subset \mathsf{R}_m(\tilde{X})\}$ выражается суммой

$$Q_m = \sum_{Z\in\mathfrak{K}_m:\,\mathsf{R}_m(\{x\})\subset Z} \mathsf{P}_m(Z). \tag{10}$$

Вероятности Q_m и Q_{m+1} связаны рекуррентным соотношением. С целью его получения сначала воспользуемся формулой (3)

$$Q_{m+1} = \sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})\subset Z} \mathsf{P}_{m+1}(Z) =$$

$$= \sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})\subset Z} \Pr\{\mathsf{R}_{m+1}(\tilde{X}) = Z | \mathsf{R}_m(\tilde{X}) = \mathsf{R}_m(Z)\}\mathsf{P}_m(\mathsf{R}_m(Z)),$$

а затем – условием марковского ветвления (4),

$$Q_{m+1} = \sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})\subset Z} \mathsf{P}_m(\mathsf{R}_m(Z)) \prod_{\delta\in\mathsf{S}_m(\mathsf{R}_m(Z))} q\left[\mathsf{S}_1\left(\mathsf{T}_m(Z\cap\delta)\right)\right].$$

Последнюю операцию суммирования представим в виде двух повторных суммирований следующего вида

$$\sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})\subset Z} ... = \sum_{Y\in\mathfrak{K}_m:\,\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})\subset Y}\ \sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})\subset Z,\,\mathsf{R}_m(Z)=Y} ....$$

В результате получим

$$Q_{m+1} = \sum_{Y\in\mathfrak{K}_m:\,\mathsf{R}_m(\{x\})\subset Y} \mathsf{P}_m(Y) \sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})\subset Z,\mathsf{R}_m(Z)=Y}\ \prod_{\delta\in\mathsf{S}_m(Y)} q\left[\mathsf{S}_1\left(\mathsf{T}_m(Z\cap\delta)\right)\right],$$

где мы воспользовались тем, что для множеств $Y \subset \mathfrak{K}_m$ условия $\mathsf{R}_{m+1}(\{x\}) \subset Y$ и $\mathsf{R}_m(\{x\}) \subset Y$ эквивалентны. Далее, переставим вторую операцию суммирования в правой части последнего равенства с операцией вычисления произведения, согласно правилу

$$\sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})\subset Z,\mathsf{R}_m(Z)=Y}\ \prod_{\delta\in\mathsf{S}_m(Y)} \ldots = \prod_{\delta\in\mathsf{S}_m(Y)}\ \sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_m(Z)=\delta,Z\supset\delta\cap\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})} \ldots .$$

Условие $Z \supset \delta \cap \mathsf{R}_{m+1}(\{x\}) \neq \varnothing$ вырезает в сумме, отмеченной полуинтервалом $\delta \ni x$ только слагаемые с множествами Z, содержащими полуинтервал $\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})$.

В результате указанного преобразования получаем

$$Q_{m+1} = \sum_{Y\in\mathfrak{K}_m:\,\mathsf{R}_m(\{x\})\subset Y} \mathsf{P}_m(Y) \prod_{\delta\in\mathsf{S}_m(Y)}\ \sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_m(Z)=\delta,\,Z\supset\delta\cap\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})} q\left[\mathsf{S}_1\left(\mathsf{T}_m(Z)\right)\right] . \quad (11)$$

Для всех полуинтервалов δ, для которых $\delta \cap \mathsf{R}_{m+1}(\{x\}) = \varnothing$ выполняется

$$\sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_m(Z)=\delta} q\left[\mathsf{S}_1\left(\mathsf{T}_m(Z)\right)\right] = \sum_{Z\in\mathfrak{K}_1} q\left[\mathsf{S}_1\left(Z\right)\right] = 1 .$$

Для единственного же полуинтервала δ среди всей совокупности $\mathcal{K}_m$, для которого $\mathsf{R}_{m+1}(\{x\}) \subset \delta$ имеем

$$\sum_{Z\in\mathfrak{K}_{m+1}:\,\mathsf{R}_m(Z)=\delta,Z\supset\mathsf{R}_{m+1}(\{x\})} q\left[\mathsf{S}_1\left(\mathsf{T}_m(Z)\right)\right] = \sum_{Z\in\mathfrak{K}_1:\,Z\supset\mathsf{T}_m(\mathsf{R}_{m+1}(\{x\}))} q\left[\mathsf{S}_1\left(Z\right)\right] = q_{\xi_{m+1}} , \quad (12)$$

так как множество $\mathsf{T}_m(\mathsf{R}_{m+1}(\{x\}))$ представляет собой полуинтервал $\delta_{\xi_{m+1}}$ из набора $\mathcal{K}_1$ с левой граничной точкой ξ_{m+1}/N, то есть имеющий номер, равный величине $(m+1)$-й компоненты в N-м разложении (9) числа $x = 0,(\xi_1\xi_2\ldots)_N$.

Результат (12) не зависит от множеств Y, по которым происходит суммирование во внешней сумме в (11). Тогда из (11) следует искомое рекуррентное соотношение между вероятностями Q_{m+1} и Q_m,

$$Q_{m+1} = q_{\xi_{m+1}} Q_m .$$

Используя это соотношение, индукцией по $m \in \mathbb{N}$, учитывая, что

$$\mathsf{P}_0 = \Pr\{\mathsf{R}_{m+1}(\{x\}) \subset [0,1)\} = 1 ,$$

находим выражение для вероятности Q_m,

$$Q_m = \prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{Z\in\mathfrak{K}_1:\,Z\supset\delta_{\xi_j}} q[\mathsf{S}_1(Z)]\right) = \prod_{j=1}^{m} q_{\xi_j} . \quad (13)$$

D. Теперь докажем, что рассматриваемое случайное множество с марковским измельчением несепарабельно. Для этого достаточно показать, что $\Pr\{\tilde{X} \cap \Lambda \neq \varnothing\} = 0$. Заметим, что

$$\Pr\{\tilde{X} \cap \Lambda \neq \varnothing\} \leqslant \sum_{x\in\Lambda} \Pr\{\tilde{X} \ni x\} . \quad (14)$$

Оценим сверху вероятность события $\{x \in \tilde{X}\}$ для произвольной точки $x \in \Lambda$. Для этого представим эту вероятность следующим образом:

$$\Pr\{x \in \tilde{X}\} = \lim_{m\to\infty} \Pr\{\tilde{X} \cap \mathsf{R}_m(\{x\}) \neq \varnothing\} = \lim_{m\to\infty} \Pr\{\mathsf{R}_m(\{x\}) \subset \mathsf{R}_m(\tilde{X})\} = \lim_{m\to\infty} Q_m\,. \tag{14}$$

Из (13) следует оценка

$$Q_m \leqslant \prod_{l=1}^{[\frac{m}{k}]} q_{\xi_{lk}} = q_r^{[m/k]}\,,$$

ввиду периодичности дроби $x = 0,(\xi_1\xi_2...\xi_{k-1},r)_N$, $\xi_{lk} = r$. Здесь $[m/k]$ обозначает целую часть дроби m/k. Из этой оценки и того факта, что $q_r < 1$, из представления (14) следует

$$\Pr\{x \in \tilde{X}\} = 0\,.$$

Тогда

$$\Pr\{\tilde{X} \cap \Lambda \neq \varnothing\} \leqslant \sum_{x\in\Lambda} \Pr\{x \in \tilde{X}\} = 0\,.$$

Поэтому $\Pr\{\tilde{X} = \mathsf{cl}(\tilde{X} \cap \Lambda)\} = 0$. ■

Литература

1. Virchenko Yu.P., Shpilinskaya O.L. Random Point Fields with Markivian Refinements and the Geometry of Fractally Disordered Media // Theor. and Mathem. Phys. – 2000. – 124;3.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 2003.
3. Matheron G. Random Sets and Integral Geometry / G.Matheron. – New York: John Wiley and Sons, 1975.

NONSEPARABILITY OF RANDOM SETS WITH MARKOVIAN REFINEMENTS IN ONE-DIMENSIONAL SPACE

Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Single Crystal Institute of NASU,
Lenin Av., 60, Kharkov, Ukraine, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Abstract. The nonseparability of random sets with markovian refinements being contained in the half-interval of the real axe is proved.

Key words: random sets, markovian refinements, nonseparability.