УДК 51-73

ПОСТРОЕНИЕ ГАУССОВСКОЙ ФЛУКТУАЦИОННОЙ МОДЕЛИ РАВНОВЕСНОГО ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ[5)]

М.А. Сапрыкин, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Предложена стохастическая модель равновесного теплового электромагнитного излучения в твёрдом диэлектрике, которая удовлетворяет условию сохранения заряда при наличии структурных флуктуаций среды.

Ключевые слова: тепловое излучение, флуктуации, корреляционная функция.

1. Введение. Радиационно-кондуктивный теплообмен представляет собой один из трёх элементарных типов переноса тепловой энергии в среде (помимо теплопроводности и конвекции). В твёрдотельных средах, в отсутствие явления конвекции он может играть при достаточно сильной их нагретости существенную роль в переносе тепла. В этом случае радиационно-кондуктивный теплообмен феноменологически осуществляется при любой ненулевой температуре посредством следующих друг за другом актов испускания каждым элементом объёма области пространства, заполняемой средой, электромагнитного излучения со сплошным спектром (теплового излучения), за счёт превращения внутренней энергии вещества в энергию электромагнитных волн (фотонов, с квантовой точки зрения), последующего переноса этого излучения в пространстве среды и затем его поглощения средой в другом элементе объёма, который сопровождается превращением его снова во внутреннюю энергию. Существующая в настоящая время математическая формулировка теории радиационно-кондуктивного теплообмена [1] аналогична теории переноса частиц (например, нейтронов) в среде и не основана на каком-либо теоретическом микроскопическом анализе этого явления. Более того, в этой формулировке совершенно отсутствует само электромагнитное поле. Попыткой хотя бы частичного преодоления этого недостатка, в смысле построения математической схемы, в которой бы явным образом присутствовало переносящее тепловую энергию электромагнитное поле, могут служить работы С.М.Рытова, суммированные в монографии [2]. Несколько отличный от построений, описанных в [2], подход был предложен нами в работе [3]. В настоящей статье мы развиваем этот подход и уточняем некоторые его базовые положения. Попутно мы показываем, в чём состоит существенное различие нашей формулировки с описанной в [3]. Конкретно в данной работе мы описываем математически, на языке стохастического электромагнитного поля, порождаемого случайными тепловыми флуктуациями среды, полностью заполняющей пространство, имеющийся в ней равновесный радиационно-кондуктивный обмен.

2. Постановка задачи. Запишем эволюционные уравнения Максвелла для электромагнитного поля в диэлектрике:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + [\nabla, \mathbf{E}] = 0\,, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} - [\nabla, \mathbf{H}] = 0\,, \quad (\nabla, \mathbf{D}) = 0 \tag{2}$$

[5]Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

в отсутствие сторонних зарядов, где c – скорость света в вакууме. Здесь $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ – соответственно напряжённости изменяющихся в пространстве $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ и времени $t \in \mathbb{R}$ электрического и магнитного полей, а также поля электрической и магнитной индукций. Мы будем далее предполагать наличие простейшей формы материальных уравнений, связывающих соответствующие друг другу поля напряжённостей и индукций:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{3}$$

где коэффициенты ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости диэлектрика, которые предполагаются постоянными. Уравнения (1) - (3), в отсутствие каких-либо источников, и в предположении об однородности физического состояния имеют только постоянные решения, которые не описывают распространение переносящих тепло электромагнитных волн. Следовательно, для описываемой физической ситуации решения уравнений (1) и (2) полагаются нулевыми.

Наша теория радиационно-кондуктивного теплообмена основана на предположении о наличии случайных флуктуаций зарядов $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$ и токов $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ в объёме диэлектрика, вызванных случайными актами излучения и поглощения фотонов, передаваемых от атома к атому (от молекулы к молекуле) и переносящих тепловую энергию от одного элемента объёма к другому. Средние значения этих полей равны нулю:

$$\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r},t) \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t) \rangle = 0 \tag{4}$$

(здесь и далее угловые скобки, окружающие математическое выражение, содержащее случайную функцию, обозначают усреднение по распределению вероятностей этой функции). В этом случае уравнения (1), (2) заменяются на стохастические уравнения

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{B}} + [\nabla, \tilde{\mathbf{E}}] = 0, \qquad (\nabla, \tilde{\mathbf{B}}) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{D}} - [\nabla, \tilde{\mathbf{H}}] = -\frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}}, \qquad (\nabla, \tilde{\mathbf{D}}) = 4\pi\tilde{\rho} \tag{6}$$

для случайных полей $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$. Уравнения (5), (6) содержат стохастические источники в виде случайных полей $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$. При этом материальные уравнения (3) остаются справедливыми для всех случайных реализаций полей. Уравнения же для средних значений $\langle\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)\rangle$, $\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)\rangle$, $\langle\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)\rangle$, $\langle\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)\rangle$, в силу свойства (4), совпадают с уравнениями (1),(2), и, следовательно, эти средние значения, согласно сформулированному основному предположению теории, равны нулю. Стохастические свойства полей $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$ полностью определяются стохастическими свойствами источников. Нашей задачей является построение простейшей схемы усреднения для источников, которая бы удовлетворяла разумным физическим ограничениям и позволила бы вычислять такие важные для теории радиационно-кондуктивного теплообмена величины, как среднюю плотность энергии и среднюю плотность потока энергии теплового электромагнитного поля, удовлетворяющего системе уравнений (3), (5), (6), и при этом дала возможность связать указанные величины с температурой среды.

3. Конструкция модели. Сформулируем основные требования, предъявляемые к источникам, вытекающие из физической постановки задачи.

1). Случайные поля $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ будем предполагать стационарными во времени и однородными в пространстве (в дальнейшем для упрощения терминологии будем называть эти их свойства просто *стационарностью*). Естественность этих свойств связана с тем, что мы строим стохастическое описание равновесного теплового излучения, находящегося в равновесии с термодинамически однородной средой.

2). Источники $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ будем предполагать гауссовскими, так как они описывают очень малые короткодействующие флуктуации. А для флуктуаций такого типа достаточно учесть только парную корреляционную функцию. Ввиду линейности уравнений (3), (5), (6), поля $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$ также являются гауссовскими.

Напомним, что гауссовские поля с нулевым средним полностью характеризуются парными корреляционными функциями. По этой причине основной задачей теории является вычисление всего набора парных корреляционных функций $\langle \tilde{E}_k(\mathbf{r},t)\tilde{E}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle \tilde{H}_k(\mathbf{r},t)\tilde{H}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle \tilde{E}_k(\mathbf{r},t)\tilde{H}_{l'}(\mathbf{r}',t')\rangle$; $k,k'=1,2,3$ электромагнитного поля, переносящего тепло. Начиная с этого места мы будем предпочтительно пользоваться индексными обозначениями векторов с использованием соглашения о суммировании по повторяющимся индексам. Так как поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$ полностью определяются стохастическими характеристиками случайных гауссовских источников, то указанные парные корреляционные функции однозначным образом связаны с парными корреляционными функциями $\langle \tilde{j}_k(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle$; $k,k'=1,2,3$. Наложим на эти последние величины следующие естественные ограничения.

3). Корреляционные функции $\langle \tilde{j}_k(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle$; $k,k'=1,2,3$ должны стремиться к нулю (при наличии равенств нулю средних значений заряда и тока), когда $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to\infty$.

4). Флуктуации зарядов и токов должны подчиняться уравнению непрерывности (условие сохранения заряда):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+(\nabla,\tilde{\mathbf{j}})=0\,, \tag{7}$$

следующему из (6). Из этого условия следует, что

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle+\frac{\partial}{\partial x_k}\langle \tilde{j}_k(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle=0\,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle+\frac{\partial}{\partial x_k}\langle \tilde{j}_k(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle=0\,.$$

Тогда, учитывая условие 3), получаем

$$\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle=-\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial x_k}\langle \tilde{j}_k(\mathbf{r},s)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle ds\,,$$

$$\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle=-\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial x_k}\langle \tilde{j}_k(\mathbf{r},s)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle ds\,.$$

Полученные соотношения показывают, что корреляционные функции для компонент флуктуаций тока $\tilde{j}_k(\mathbf{r},t)$, $k=1,2,3$ полностью определяют искомую стохастическую модель. Они, в силу стационарности случайного поля $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$, зависят только от разностей $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, $(t-t')$. Потребуем, чтобы случайное поле $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ было стохастически изотропным, что отражает физическую равнозначность флуктуаций по всем направлениям в пространстве.

Стохастическая изотропия случайного поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r})$ означает его эквивалентность любому из полей $\mathsf{U}\,(\mathsf{A}(\mathbf{r})\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}))$, где $\mathsf{A}(\mathbf{r})$ – произвольные ортогональные при каждом $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ матрицы, поворачивающие значения поля в каждой пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, а U – ортогональная матрица, поворачивающая пространство $\mathbb{R}^3$. Свойство стохастической изотропии выражается в том, что характеристический функционал поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r})$, по определению, равный

$$\left\langle \exp\left(i \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi_\alpha(\mathbf{r}) u_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \right\rangle ,$$

где $u_\alpha(\mathbf{r})$ – произвольная финитная непрерывная функция, совпадает с характеристическим функционалом

$$\left\langle \exp\left(i \int\limits_{\mathbb{R}^3} [\mathsf{U}\,(\mathsf{A}(\mathbf{r})\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}))]_\alpha u_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \right\rangle$$

поля $\mathsf{U}\,(\mathsf{A}(\mathbf{r})\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}))$. Для гауссовского случайного поля с нулевым средним это приводит к тому, что зависимость его парной корреляционной функции от пространственных координат сводится к зависимости только от взаимного расстояния $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ между радиус-векторами, и, кроме того, зависимость её от тензорных индексов l, l', имеет вид

$$\langle \tilde{j}_l(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{l'}(\mathbf{r}',t')\rangle = \delta_{l,l'} G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, t-t')$$

с некоторой положительно-определённой функцией $G(\cdot,\cdot)$. Для определения вида функций $G(|\mathbf{r}|,t)$ мы потребуем наличия более жёсткого свойства. Нужно выбрать такой её вид, который бы обеспечивал стационарность по времени пары случайных полей, являющихся решениями системы уравнений (3), (5), (6). Этого мы добиваемся наложением следующего условия (именно в этом пункте наши построения серьёзно расходятся со схемой, предложенной в [2]).

5). Будем считать, что флуктуации тока определяются соотношением

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t) = \sigma\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)\,, \tag{8}$$

где $\sigma > 0$ и $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$ – случайное поле в точках $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, изменяющееся во времени t. Это поле будем считать стационарным и гауссовским с нулевым средним $\langle\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)\rangle = 0$. Установление корректности конструируемой модели теплового электромагнитного поля состоит в доказательстве того, что формула (8) обеспечивает выполнимость сформулированных выше свойств поля $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ и стационарность теплового электромагнитного поля. Заметим, что наличие поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$ в формуле (8) существенно, так как в его отсутствие система уравнений (3), (5), (6) была бы самосогласованной и не содержала стохастических источников, что, с точки зрения моделируемой нами ситуации, приводило бы только к тривиальным решениям $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{H}} = 0$. Это связано с тем,что из уравнения непрерывности (7) и выражения для дивергенции поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ в (6) получается уравнение для флуктуаций заряда $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\,\tilde{\rho} = 0\,, \tag{9}$$

которое уже не является стохастическим, и единственное его стационарное (с точки зрения теории случайных процессов) решение тривиально $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t) = 0$.

Наличие гауссовского стационарного поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$, обладающего нулевым средним значением, связано с тепловыми флуктуациями среды. Для завершения конструкции нашей стохастической модели теплового электромагнитного поля, необходимо определить его посредством задания парной корреляционной функцией. Мы выбираем её следующий общий вид:

$$\langle\tilde{\varphi}_l(\mathbf{r},t)\tilde{\varphi}_{l'}(\mathbf{r}',t')\rangle = \delta_{l,l'}K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,t-t')\,, \tag{10}$$

где $K(|\mathbf{r}|,t)$ – локализованная по обоим аргументам функция. Такая форма корреляционной функции обеспечивает стохастическую изотропию поля $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ флуктуаций тока и, следовательно, решений уравнений (3), (5),(6). Тот факт, что поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$ определяется тепловыми флуктуациями тока и, следовательно, электромагнитного поля, отражается в том, что корреляционная функция должна зависеть от абсолютной температуры T как от параметра.

4. Флуктуирующее электромагнитное поле. В этом пункте мы вычислим компоненты корреляционной функции $\langle\tilde{E}_k(\mathbf{r},t)\tilde{E}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$ теплового электромагнитного поля, или, что эквивалентно, корреляционной функции $\langle\tilde{\tilde{E}}_k(\mathbf{r},\omega)\tilde{\tilde{E}}^*_{k'}(\mathbf{r}',\omega')\rangle$, где

$$\tilde{E}_k(\mathbf{r},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}_k(\mathbf{r},t)e^{-i\omega t}dt$$

на основе сформулированной нами модели.

Дифференцируя по t уравнение (5) и используя (3), (6), находим

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\ddot{\tilde{E}}_k = \frac{1}{c}\epsilon_{klm}\nabla_l\dot{\tilde{H}}_m - \frac{4\pi}{c^2}\dot{\tilde{j}}_k = -\mu^{-1}\epsilon_{klm}\nabla_l\epsilon_{mij}\nabla_i\tilde{E}_j - \frac{4\pi}{c^2}(\sigma\dot{\tilde{E}}_k + \dot{\tilde{\varphi}}) =$$

$$= \mu^{-1}\Delta\tilde{E}_k - \frac{4\pi}{\varepsilon\mu}\nabla_k\tilde{\rho} - \frac{4\pi}{c^2}(\sigma\dot{\tilde{E}}_k + \dot{\tilde{\varphi}}_k)\,.$$

Вводя показатель преломления $n = (\varepsilon\mu)^{1/2}$ и декремент затухания $\nu = 4\pi\mu\sigma$, полученное соотношение запишем в виде уравнения для поля $\tilde{E}_k(\mathbf{r},t)$,

$$\frac{n^2}{c^2}\ddot{\tilde{E}}_k - \Delta\tilde{E}_k + \frac{\nu}{c^2}\dot{\tilde{E}}_k = -\tilde{\psi}_k\,, \tag{11}$$

где введено случайное поле

$$\tilde{\psi}_k = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(\nabla_k\tilde{\rho} + \frac{n^2}{c^2}\dot{\tilde{\varphi}}_k\right)\,. \tag{12}$$

Вычислим корреляционную функцию случайного поля $\tilde{\psi}_k(\mathbf{r},t)$. Для этого заметим, что правая часть (12) полностью определяется случайным полем $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$. Это следует из того, что, согласно (7),(8), имеет место

$$\dot{\tilde{\rho}} + \frac{\nu}{n^2}\tilde{\rho} = -\nabla_k\tilde{\varphi}_k\,,$$

и поэтому стационарное поле $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$ выражается через поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$ посредством следующей формулы:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r},t) = -\nabla_k\int\limits_{-\infty}^{t}\tilde{\varphi}_k(\mathbf{r},s)\exp\left[-\frac{\nu}{n^2}(t-s)\right]ds\,.$$

Это следует из формулы (П6) при $a = \nu/n^2$ и $\tilde{\xi}(\mathbf{r},t) = -\nabla_k \tilde{\varphi}_k(\mathbf{r},t)$.

Таким образом, на основании (12)

$$\tilde{\psi}_k(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(\frac{n^2}{c^2}\dot{\tilde{\varphi}}_k(\mathbf{r},t) - \nabla_k \int\limits_{-\infty}^{t} \nabla_l \tilde{\varphi}_l(\mathbf{r},s)\exp\left[-\frac{\nu}{n^2}(t-s)\right] ds\right) . \qquad (13)$$

Введём спектральную амплитуду

$$\bar{\tilde{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_k(\mathbf{r},t)e^{-i\omega t}dt$$

и вычислим её корреляционную функцию. Согласно (12) запишем

$$\bar{\tilde{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left((\nabla_k \bar{\tilde{\rho}})(\mathbf{r},\omega) + \frac{n^2}{c^2}\bar{\dot{\tilde{\varphi}}}_k(\mathbf{r},\omega)\right) .$$

После этого воспользуемся для преобразования первого слагаемого формулой (П7) при $a = \nu/n^2$, положив в ней $\bar{\tilde{\xi}}(\mathbf{r},\omega) = -(\nabla_l \bar{\tilde{\varphi}}_l)(\mathbf{r},\omega)$, а для преобразования второго слагаемого – формулой (П8), заменив в ней $\bar{\tilde{\xi}}(\mathbf{r},\omega)$ на векторно-значное поле $\bar{\tilde{\varphi}}_k(\mathbf{r},\omega)$. В результате получим

$$\bar{\tilde{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(i\frac{\omega n^2}{c^2}\,\bar{\tilde{\varphi}}_k(\mathbf{r},\omega) - \frac{(\nabla_k\nabla_l\bar{\tilde{\varphi}}_l)(\mathbf{r},\omega)}{\nu/n^2 + i\omega}\right) . \qquad (14)$$

Вычисленная спектральная амплитуда $\bar{\tilde{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega)$ определяет спектральную амплитуду $\bar{\tilde{E}}_k(\mathbf{r},\omega)$, которая, согласно (11), удовлетворяет уравнению

$$\Delta \bar{\tilde{E}}_k(\mathbf{r},\omega) + \frac{\omega}{c^2}\left(\omega n^2 - i\nu\right)\bar{\tilde{E}}_k(\mathbf{r},\omega) = \bar{\tilde{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega)\,. \qquad (15)$$

Заметим, что на основании (10)

$$\langle \bar{\varphi}_l(\mathbf{r},\omega)\bar{\varphi}^*_{l'}(\mathbf{r}',\omega')\rangle = 2\pi\delta(\omega-\omega')\delta_{l,l'}\bar{K}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\omega)\,, \qquad (16)$$

где

$$\bar{K}(|\mathbf{r}|,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(|\mathbf{r}|,t)e^{-i\omega t}dt\,.$$

Тогда, используя (14),

$$\langle\bar{\tilde{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega)\bar{\tilde{\psi}}^*_k(\mathbf{r}',\omega')\rangle = \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\left\langle\left[i\frac{\omega n^2}{c^2}\,\bar{\tilde{\varphi}}_k(\mathbf{r},\omega)\right]\cdot\left[-i\frac{\omega' n^2}{c^2}\,\bar{\tilde{\varphi}}^*_{k'}(\mathbf{r}',\omega')\right]\right\rangle =$$

$$= \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\omega\omega'\left[\frac{n}{c}\right]^4\delta_{kl}\delta_{k',l'}\langle\bar{\tilde{\varphi}}_l(\mathbf{r},\omega)\bar{\tilde{\varphi}}^*_{l'}(\mathbf{r}',\omega')\rangle =$$

$$= \frac{32\pi^3}{\varepsilon^2}\delta(\omega-\omega')\left[\frac{\omega n^2}{c^2}\right]^2\delta_{kl}\delta_{k',l'}\delta_{l,l'}\bar{K}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\omega)\,. \qquad (17)$$

Это выражение записывается более компактно для корреляционной функции пространственных спектральных амплитуд

$$\tilde{\tilde{\psi}}_k(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}_k(\mathbf{r},\omega) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})} d\mathbf{r}\,, \quad k=1,2,3 \tag{18}$$

случайных полей $\tilde{\tilde{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega)$, используя тот факт, что корреляционная функция для пространственных спектральных амплитуд

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_k(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\varphi}_k(\mathbf{r},\omega) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})} d\mathbf{r}\,, \quad k=1,2,3$$

полей $\tilde{\tilde{\varphi}}_k(\mathbf{r},\omega)$, на основании (16), равна

$$\langle \tilde{\tilde{\varphi}}_m(\mathbf{k},\omega)\tilde{\tilde{\varphi}}^*_{m'}(\mathbf{k}',\omega')\rangle = (2\pi)^4\delta(\omega-\omega')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{m,m'}\hat{K}(\mathbf{k},\omega)\,,$$

где

$$\hat{K}(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})}\bar{K}(|\mathbf{r}|)d\mathbf{r}\,.$$

Тогда, вычисляя преобразования Фурье по пространственным переменным $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ от обеих частей формулы (17), получаем искомое выражение для корреляционной функции спектральных амплитуд (18)

$$\langle \tilde{\tilde{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega)\tilde{\tilde{\psi}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega')\rangle = (2/\varepsilon)^2(2\pi)^6\delta(\omega-\omega')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\left[\frac{\omega n^2}{c^2}\right]^2\delta_{l,l'}\hat{K}(\mathbf{k},\omega)\,. \tag{19}$$

Это выражение определяет общий вид корреляционной функции спектральных амплитуд случайного поля $\tilde{\psi}_k(\mathbf{r},t)$. Спектральные же амплитуды

$$\tilde{\tilde{E}}_l(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{E}_l(\mathbf{r},\omega) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})} d\mathbf{r}\,, \quad l=1,2,3$$

поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ на основании уравнения (15) связаны с амплитудами $\tilde{\tilde{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega)$ как

$$\tilde{\tilde{E}}_l(\mathbf{k},\omega) = \frac{c^2\tilde{\tilde{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega)}{\omega(\omega n^2 - i\nu)-(c\mathbf{k})^2}\,, \quad l=1,2,3\,.$$

Поэтому корреляционная функция этих амплитуд следующим образом выражается через корреляционную функцию амплитуд $\tilde{\tilde{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega)$,

$$\langle \tilde{\tilde{E}}_l(\mathbf{k},\omega)\tilde{\tilde{E}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega')\rangle = \frac{c^4\langle \tilde{\tilde{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega)\tilde{\tilde{\psi}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega')\rangle}{((n\omega)^2-(ck)^2)^2+\omega^2\nu^2}\,. \tag{20}$$

6. Заключение. Нами построена стохастическая модель электромагнитного поля, находящегося в тепловом равновесии в диэлектрической среде. Следующим шагом в построении теории радиационно-кондуктивного теплообмена на её основе является обобщение модели на случай термодинамически неравновесной среды и вычисление плотности потока энергии. Однако, даже в равновесном случае, которому посвящена настоящая статья, остался невыясненным вопрос о точной взаимосвязи предложенной модели и модели, описанной в монографии [2]. В следующей публикации мы намереваемся ответить на этот вопрос.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Стационарный случайный процесс, связанный со стохастическим дифференциальным уравнением 1-го порядка

Рассмотрим стационарный процесс $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, траектории которого удовлетворяют простейшему стохастическому дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) + a\tilde{\rho}(t) = \tilde{\xi}(t)\,, \tag{П1}$$

где $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ – заданный стационарный случайный процесс с известным распределением вероятностей, $a > 0$ – постоянная и точкой над буквой обозначена производная по времени. Общее решение при фиксации значения $\tilde{\rho}(t_0)$ случайного процесса $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ в произвольный момент времени t_0 имеет вид

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t_0)e^{-a(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-a(t-s)}\tilde{\xi}(s)ds\,. \tag{П2}$$

Устремив t_0 к $-\infty$, получим форму для траекторий процесса $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, стохастически инвариантную относительно трансляций времени

$$\tilde{\rho}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)}\tilde{\xi}(s)ds\,, \tag{П3}$$

где интеграл сходится с вероятностью единица. Если $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ – стационарный процесс, то очевидным образом процесс $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ также стационарный. Это связано с тем, что

$$\tilde{\rho}(t+T) = \int\limits_{-\infty}^{t+T} e^{-a(t+T-s)}\tilde{\xi}(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)}\tilde{\xi}(s+T)ds\,,$$

и если процесс $\langle\tilde{\xi}(t+T); t \in \mathbb{R}\rangle$ стохастически эквивалентен процессу $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, то процесс $\langle\tilde{\rho}(t+T); t \in \mathbb{R}\rangle$ стохастически эквивалентен процессу $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$.

Введём спектральные амплитуды $\langle\tilde{\tilde{\xi}}(\omega); \omega \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle\tilde{\tilde{\rho}}(\omega); \omega \in \mathbb{R}\rangle$ стационарных процессов $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$:

$$\tilde{\tilde{\xi}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\tilde{\xi}(t)dt\,, \quad \tilde{\tilde{\rho}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\tilde{\rho}(t)dt$$

соответственно. Тогда, согласно (П2),

$$\tilde{\bar{\rho}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)} \tilde{\xi}(s) ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{as} \tilde{\xi}(s) ds \int_{s}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{\tilde{\bar{\xi}}(\omega)}{a + i\omega}.$$

Формула (П3) и полученное соотношение

$$\tilde{\bar{\rho}}(\omega) = \frac{\tilde{\bar{\xi}}(\omega)}{a + i\omega} \tag{П4}$$

тривиальным образом распространяется на тот случай, если имеется случайное поле $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ такое, что относительно переменной t оно представляет собой стационарный процесс, случайные реализации которого подчиняются стохастическому дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{\rho}}(\mathbf{r}, t) + a\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t), \quad a > 0, \tag{П5}$$

где $\langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ – заданное стационарное случайное поле (возможно, обобщённое) с известным распределением вероятностей. Тогда

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)} \tilde{\xi}(\mathbf{r}, s) ds \tag{П6}$$

и для спектральных амплитуд по переменной t полей $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ и $\langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$, определяемых соотношениями

$$\tilde{\bar{\xi}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t) dt, \quad \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) dt,$$

справедливо соотношение

$$\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\tilde{\bar{\xi}}(\mathbf{r}, \omega)}{a + i\omega}. \tag{П7}$$

Сделаем ещё одно замечание. Спектральные амплитуды $\langle \tilde{\bar{\xi}}(\mathbf{r}, \omega); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \omega \in \mathbb{R} \rangle$ и $\langle \bar{\dot{\tilde{\xi}}}(\mathbf{r}, \omega); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \omega \in \mathbb{R} \rangle$ стационарных случайных процессов $\langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ и $\langle \dot{\tilde{\xi}}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ связаны соотношением

$$\bar{\dot{\tilde{\xi}}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \tilde{\bar{\xi}}(\mathbf{r}, \omega), \tag{П8}$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t) dt = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t) dt.$$

Литература

1. Спэрроу Э.М. Теплообмен излучением / Э.М. Спэрроу, Р.Д. Сесс, пер. с англ. – Л.: Энергия, Ленингр. отд., 1972. – 296 с.

2. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч.II. Случайные поля. 2-е изд. / С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов Ю.А., В.И. Татарский. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

3. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2009. – 5(60); 16. – С. 47-67.

GAUSSIAN FLUCTUATION MODEL OF EQUILIBRIUM THERMAL IRRADIATION

M.A. Saprykin, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

The stochastic model of thermal equilibrium electromagnetic irradiation in dielectric solids is proposed. It satisfies the charge conservation when the medium fluctuations exist.

Key words: thermal irradiation, fluctuations, correlation function.