УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ[†)]

Р.Н. Зимин

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: reshat85@mail.ru

Аннотация. Изучается задача о продолжении функций, заданных на периодических множествах, с сохранением их дифференциальных свойств.

Ключевые слова: продолжение функций, периодические множества, дифференциальные свойства

Введение

Пусть область $\overline{\Omega}$ (например единичный куб Y) из $\mathbb{R}^3$ получена периодическим повторением элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}$, где $\varepsilon > 0$ малый параметр,

$$\overline{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y, \quad Y = (0,1)\times(0,1)\times(0,1), \quad \varepsilon Y = (0,\varepsilon)\times(0,\varepsilon)\times(0,\varepsilon),$$

где $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ граница между множествами Y_f и Y_s.

Посредством $\overline{\Omega}_f^{\varepsilon}$ обозначим периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}_f$, а через $\overline{\Omega}_s^{\varepsilon}$ – периодическое повторение $\varepsilon\overline{Y}_s$. Тогда

$$\Omega = \Omega_f^{\varepsilon} \cup \Omega_s^{\varepsilon} \cup \Gamma^{\varepsilon},$$

где $\Gamma^{\varepsilon} = \partial\Omega_f^{\varepsilon} \cap \partial\Omega_s^{\varepsilon}$ – периодическое повторение границы $\varepsilon\gamma$.

Целью настоящей работы является продолжение функций $\boldsymbol{u} \in \mathbb{W}_2^1(\Omega_f^{\varepsilon})$ из области Ω_f^{ε} в область Ω так, чтобы продолжение $\boldsymbol{v}$ удовлетворяло соотношениям

$$\int_{\Omega} |\boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x} \le C \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} |\boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

$$\int_{\Omega} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})|^2 d\boldsymbol{x} \le C \int_{\Omega_f^{\varepsilon}} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})|^2 d\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

где постоянная C не зависит от ε.

При этом рассмотрим только две простейшие геометрии элементарной ячейки Y_s. А именно, в первом случае –

Геомерия А.

Область Y_s полностью окружена областью Y_f (см. рис. 1), то есть $\overline{Y}_s \cap \partial Y = \varnothing$ и для такой геометрии выполнено следующее условие на границе γ:

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{u} \; d\sigma = 0. \tag{3}$$

[†]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613).

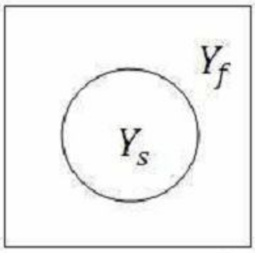

Рис. 1. Элементарная ячейка геометрии $\boldsymbol{A}$.

Во втором случае –

Геометрия B.

Область Y_s есть объединение трех цилиндров с осями, параллельными координатным осям и пересекающимися в центре куба Y (см. рис. 2).

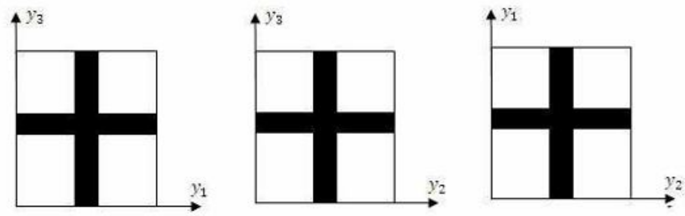

Рис. 2. Сечение элементарной ячейки геометрии $\boldsymbol{B}$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Для **геомерии A** в работе построено также продолжение соленоидальными функциями, т.е. для функций $\boldsymbol{u} \in \mathbb{W}_2^1(\Omega_f^\varepsilon)$, $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ продолжение $\boldsymbol{v}$, помимо соотношений (1) и (2), удовлетворяет следующему условию:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,. \tag{4}$$

Построение этого продолжения основано на простой идее, предложенной C.Conca в [1].

1. Стандартное продолжение для геометрии A

Пусть

$$\overline{\Omega} = \bigcup_k \overline{\Omega}^{(k)},$$

где $\overline{\Omega}^{(k)}$ – параллельный перенос ячейки $\varepsilon\overline{Y}$,

$$\boldsymbol{u}^{(k)}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}(\varepsilon\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_k)\,,$$

где $\boldsymbol{x}_k$ – вершина куба $\Omega^{(k)}$, в которую переходит начало координат при отображении $Y \to \Omega^{(k)}$, заданного формулой

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k}{\varepsilon}\,. \tag{5}$$

Следуя [1], строим продолжение функции $\boldsymbol{u}$ в каждой области $\Omega^{(k)}$. А именно, пусть $\boldsymbol{v}^{(k)}(\boldsymbol{y})$ есть продолжение из Y_f в Y такое, что

$$\int_Y |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^{(k)})|^2 d\boldsymbol{y} \le C \int_{Y_f} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^{(k)})|^2 d\boldsymbol{y}\,. \tag{6}$$

Тогда, полагая $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}^{(k)}((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)/\varepsilon)$, имеем

$$\int_{\Omega^{(k)}} |\boldsymbol{v}^{(k)}|^2 d\boldsymbol{x} \le C \int_{\Omega_f^{(k)}} |\boldsymbol{u}^{(k)}|^2 d\boldsymbol{x}\,, \tag{7}$$

$$\int_{\Omega^{(k)}} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}^{(k)})|^2 d\boldsymbol{x} \le C \int_{\Omega_f^{(k)}} |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}^{(k)})|^2 d\boldsymbol{x}\,, \tag{8}$$

что, после суммирования по всем k, даёт (1) и (2). В формулах (7) и (8) $\Omega_f^{(k)}$ есть образ области Y_f при отображении (5).

Итак, пусть $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{W}_2^1(Y_f) = \boldsymbol{H}$ (для простоты изложения опустим индекс "k"). В гильбертовом пространстве рассмотрим замкнутое подпространство $\boldsymbol{H}_0$,

$$\boldsymbol{H}_0 = \{\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}_0 \;\mid\; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_0) = 0\}\;.$$

Из [1] известно, что это подпространство составляют все линейные функции вида $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{b}$.

Посредством $\boldsymbol{H}_1$ обозначим ортогональное дополнение в $\boldsymbol{H}$ к $\boldsymbol{H}_0$ такое, что

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \oplus \boldsymbol{H}_1$$

и

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{y})\,.$$

Функция $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{y})$, являясь линейной, естественным образом продолжается в Y. Поэтому ищем продолжение $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ в виде

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{y})\,,$$

где $\boldsymbol{v}_1$ – какое-то продолжение из Y_f в Y, сохраняющее класс. Такое продолжение всегда существует и

$$\int_Y \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_1) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_1) d\boldsymbol{y} \le C \int_{Y_f} \left[|\boldsymbol{u}_1|^2 + |\nabla \boldsymbol{u}_1|^2\right] d\boldsymbol{y} \le$$

$$\leq C\int_{Y_f}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1)d\boldsymbol{y}\equiv C\int_{Y_f}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})d\boldsymbol{y}\,. \tag{9}$$

Первое неравенство в (9) – свойство выбранного продолжения, сохраняющее дифференциальные свойства функций (класс), а второе – следствие выбора подпространства $\boldsymbol{H}_1$. Действительно, если $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1)=0$, то $\boldsymbol{u}_1\in\boldsymbol{H}_0$, что, в силу принадлежности $\boldsymbol{u}_1\in\boldsymbol{H}_1$, влечёт $\boldsymbol{u}_1=0$, то есть выражение

$$\int_{Y_f}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1):\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_1)d\boldsymbol{y}$$

является нормой в $\boldsymbol{H}$. Поскольку $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_1)$, то (9) эквивалентно (6).

2. Стандартное продолжение для геометрии B

В первую очередь построим продолжение функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ в цилиндры $G^{(m)}\subset\Omega_s^{\varepsilon}$ такие, что половина цилидра находится в подобласти $\Omega^{(k)}$, а вторая — в примыкающей к ней подобласти $\Omega^{(n)}$. Для этого выберем параллелепипед $\Pi^{(m)}$, содержащий $G^{(m)}$ и лежащий полностью (за исключением $G^{(m)}$) в Ω_f^{ε} (см. рис. 3).

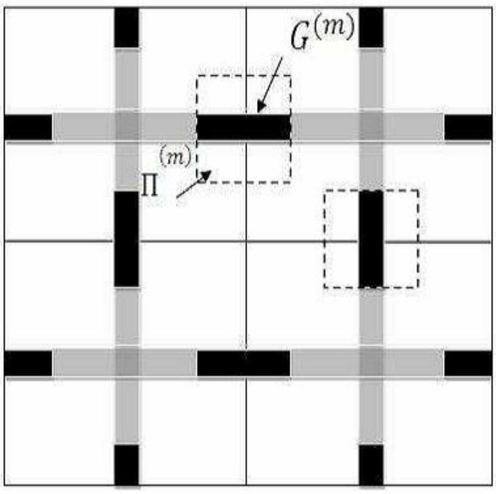

Рис. 3.

Для продолжения в $G^{(m)}$ из $\Pi^{(m)}$ воспользуемся описанной выше процедурой. После продолжения $\boldsymbol{u}$ в области $G^{(m)}$ получаем геометрию **A**, в которой продолжение также описано.

3. Продолжение соленоидальными функциями для геометрии А

В случае соленоидального продолжения повторяем процедуру стандартного продолжения до момента продолжения функции $\boldsymbol{u}^{(k)}(\boldsymbol{y})$ из области Y_f в область Y_s. В силу предположения (3)

$$\int_\gamma \boldsymbol{u}^{(k)}(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0\,, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{n}$ – вектор единичной нормали к γ.

Поскольку $\boldsymbol{u}_0^{(k)}(\boldsymbol{y})$ есть решение уравнения $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_0^{(k)}) = 0$ то, в частности,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0^{(k)} = 0 \tag{11}$$

и, в силу (10) и (11),

$$\int_\gamma \boldsymbol{u}_1^{(k)}(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0\,. \tag{12}$$

Обозначим $\alpha(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}_1^{(k)}(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y} \in \gamma$. Нам необходимо построить соленоидальное векторное поле $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{W}_2^1(Y_s)$, совпадающее с $\alpha(\boldsymbol{y})$ на границе γ. Ищем $\boldsymbol{v}_1$ в виде

$$\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{c} + \nabla\varphi\,.$$

Поскольку $\nabla \cdot (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c}) = 0\ \forall \boldsymbol{c}$, то соленоидальность $\boldsymbol{v}_1$ влечёт

$$\triangle\varphi = 0,\ \ \boldsymbol{y} \in Y_s\,. \tag{13}$$

В качестве граничного условия выберем условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}} = \alpha \cdot \boldsymbol{n}\,,\ \text{при } \boldsymbol{y} \in \gamma \tag{14}$$

и выделим единственное решение положив

$$\int_{Y_s} \varphi d\boldsymbol{y} = 0\,.$$

Условие (12) является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (13), (14). При этом из принадлежности $\alpha\cdot\boldsymbol{n} \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\gamma)$ (функция α есть след на γ функции $\boldsymbol{u}_1^{(k)} \in \mathbb{W}_2^1(Y_f)$, $\boldsymbol{n}$ – гладкая функция) следует, что $\varphi \in \mathbb{W}_2^2(Y_s)$ [2].

Таким образом, задача свелась к построению векторного поля $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y})$ по заданному значению

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c} = \alpha - \alpha \cdot \boldsymbol{n} \tag{15}$$

на границе γ. С помощью разбиения единицы сведём её к локальной процедуре. А именно, пусть $\{\psi_m(\boldsymbol{y})\}_{m=1}^N$ – разбиение единицы окрестности границы γ такое, что при всех m в окрестности части границы γ_m где $\psi_m(\boldsymbol{y}) > 0$ существует ортогональная криволинейная система координат $\{z_1, z_2, z_3\}$, у которой направление z_3 на γ_m совпадает с направлением нормали $\boldsymbol{n}$ к границе. Тогда в этих координатах $\boldsymbol{c}^m = \psi_m\cdot\boldsymbol{c} = (\widetilde{c}_1^{\,m}, \widetilde{c}_2^{\,m}, \widetilde{c}_3^{\,m})$, $\psi_m\cdot(\alpha-\alpha\cdot\boldsymbol{n}) = (\widetilde{\alpha}_1^m, \widetilde{\alpha}_2^m, 0)$,

$$\begin{cases} (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c})_1 = \partial\widetilde{c}_2^{(m)}/\partial z_3 - \partial\widetilde{c}_3^{(m)}/\partial z_2 = \widetilde{\alpha}_1^{(m)} \\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c})_2 = \partial\widetilde{c}_3^{(m)}/\partial z_1 - \partial\widetilde{c}_1^{(m)}/\partial z_3 = \widetilde{\alpha}_2^{(m)} \\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{c})_3 \ = \ \partial\widetilde{c}_1^{(m)}/\partial z_2 - \partial\widetilde{c}_2^{(m)}/\partial z_1 \ = \ 0\,. \end{cases} \tag{16}$$

Положим

$$\begin{gathered} \widetilde{c}_1^{(m)} = \widetilde{c}_2^{(m)} = \widetilde{c}_3^{(m)} \qquad \text{при } z_3 = 0 \\ \partial\widetilde{c}_2^{(m)}/\partial z_3 = \widetilde{\alpha}_1^{(m)}, \quad \partial\widetilde{c}_1^{(m)}/\partial z_3 = -\widetilde{\alpha}_2^{(m)}\,. \end{gathered} \tag{17}$$

В итоге, построение векторного поля $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y})$ свелось к задаче о продолжении функции $u(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{W}_2^2(\mathbb{R}_+^3)$ в полупространство $\{z_3 > 0\} = \mathbb{R}_+^3$, принимающей на границе $z_3 = 0$ краевые условия

$$u = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z_3} = \beta(\boldsymbol{z}') \quad \text{при} \quad z_3 = 0, \tag{18}$$

(здесь $\boldsymbol{z}' = (z_1, z_2)$) с финитной функцией $\beta \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $v^0(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{W}_2^2(\mathbb{R}_+^3)$ – какое-либо продолжение функции $\beta(\boldsymbol{z})$. Согласно [1] такое продолжение всегда существует (при этом функцию v^0 можно считать финитной). Далее рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{gathered} \triangle v = 0,\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}_+^3 \\ v(\boldsymbol{z}', 0) = v^0(\boldsymbol{z})\,, \end{gathered} \tag{19}$$

эквивалентную интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} \nabla v \cdot \nabla\varphi\ d\boldsymbol{z} = 0, \quad v - v^0 \in \mathring{\mathbb{W}}_2^1(\mathbb{R}_+^3)\,.$$

Решение этой задачи существует, единственно и

$$\|v\|_{\mathbb{W}_2^1(\mathbb{R}_+^3)} \le \|v^0\|_{\mathbb{W}_2^1(\mathbb{R}_+^3)} \le C\|\beta\|_{\mathbb{W}_2^{1/2}(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{20}$$

При этом решение дается интегралом Пуассона

$$v(\boldsymbol{z}) = \frac{z_3}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\beta(\boldsymbol{y}')\ d\boldsymbol{y}'}{\left[|\boldsymbol{z}' - \boldsymbol{y}'|^2 + z_3^2\right]^{3/2}}\,. \tag{21}$$

Покажем, что искомым продолжением $u(\boldsymbol{z})$ будет функция

$$u(\boldsymbol{z}) = z_3 v(\boldsymbol{z}) \tag{22}$$

и она есть обобщённое решение уравнения Пуасона

$$\triangle u = 2\frac{\partial v(\boldsymbol{z})}{\partial z_3} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}_+^3))\,, \tag{23}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u(\boldsymbol{z}',0)=0. \tag{24}$$

В самом деле, из цепочки равенств

$$\nabla u\cdot\nabla\varphi=\nabla(z_3v)\cdot\nabla\varphi=\boldsymbol{e}_3\cdot\nabla\varphi v+z_3\nabla v\cdot\nabla\varphi=$$
$$=-\boldsymbol{e}_3\cdot\nabla v\varphi+\nabla v\cdot\nabla(z_3\varphi)-\boldsymbol{e}_3\cdot\nabla v\varphi=\nabla v\cdot\nabla(z_3\varphi)-2\boldsymbol{e}_3\cdot\nabla v\varphi$$

следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^3_+}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,d\boldsymbol{z}=-2\int_{\mathbb{R}^3_+}\frac{\partial v}{\partial z_3}\varphi\,d\boldsymbol{z}+\int_{\mathbb{R}^3_+}\nabla v\cdot\nabla(z_3\varphi)\,d\boldsymbol{z}=-2\int_{\mathbb{R}^3_+}\frac{\partial v}{\partial z_3}\varphi\,d\boldsymbol{z}\,,$$

поскольку $\int_{\mathbb{R}^3_+}\nabla v\cdot\nabla(z_3\varphi)\,d\boldsymbol{z}=0$ для всех $\varphi\in\dot{\mathbb{W}}^1_2(\mathbb{R}^3_+)$.

В силу единственности решения задачи (23), (24) и результатов о гладкости [2], $u\in\dot{\mathbb{W}}^2_2(\mathbb{R}^3_+)$. Нам осталось показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial z_3}=\beta(\boldsymbol{z}')\quad\text{при}\quad z_3=0\,.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z_3}=v+z_3\frac{\partial v}{\partial z_3}\to\beta\quad\text{при}\quad z_3\to 0$$

если мы покажем, что

$$z_3\frac{\partial v}{\partial z_3}\to 0\quad\text{при}\quad z_3\to 0\,.$$

Имеем,

$$\frac{\partial v}{\partial z_3}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\left(\frac{1}{r}\right)\beta(\boldsymbol{y}')\,d\boldsymbol{y}'=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\triangle'\left(\frac{1}{r}\right)\beta(\boldsymbol{y}')\,d\boldsymbol{y}'\,,$$

где $r^2=|\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{y}'|^2+z_3^2$, $\triangle'=\partial^2/\partial y_1^2+\partial^2/\partial y_2^2$. Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\triangle'\left(\frac{1}{r}\right)\beta(\boldsymbol{z}')\,d\boldsymbol{y}'=0\,,$$

то

$$\frac{\partial v}{\partial z_3}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\triangle'\left(\frac{1}{r}\right)[\beta(\boldsymbol{y}')-\beta(\boldsymbol{z}')]\,d\boldsymbol{y}'\,.$$

Далее воспользуемся неравенством Гёльдера с весом $\overline{r}^{3/2}$, $\overline{r}^2=(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}')$. Имеем

$$\left|\frac{\partial v}{\partial z_3}\right|^2\le\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2}\overline{r}^3\left|\triangle'\left(\frac{1}{r}\right)\right|^2d\boldsymbol{y}'\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\beta(\boldsymbol{y}')-\beta(\boldsymbol{z}')|^2}{\overline{r}^3}d\boldsymbol{y}'$$

или

$$\left|\frac{\partial v}{\partial z_3}\right|^2\le\frac{1}{4\pi^2}\mathfrak{I}^2\|\beta\|^2_{\mathbb{W}_2^{1/2}(\mathbb{R}^2)}\,,$$

где

$$\mathcal{J}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}'|^3 \left| \frac{3|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}'|^2}{(|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}'|^2 + z_3^2)^{5/2}} - \frac{2}{(|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{z}'|^2 + z_3^2)^{3/2}} \right|^2 d\boldsymbol{y}' =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{y}'|^3 \left| \frac{3|\boldsymbol{y}'|^2}{(|\boldsymbol{y}'|^2 + z_3^2)^{5/2}} - \frac{2}{(|\boldsymbol{y}'|^2 + z_3^2)^{3/2}} \right|^2 d\boldsymbol{y}' =$$
$$= \frac{1}{z_3} \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{y}'|^3 \left| \frac{3|\boldsymbol{y}'|^2}{(|\boldsymbol{y}'|^2 + 1)^{5/2}} - \frac{2}{(|\boldsymbol{y}'|^2 + 1)^{3/2}} \right|^2 d\boldsymbol{y}' = \frac{\mathcal{J}_0^2}{z_3}.$$

Следовательно,

$$z_3^2 \left| \frac{\partial v}{\partial z_3} \right|^2 \leq z_3 \mathcal{J}_0^2 \|\beta\|^2_{\mathbb{W}_2^{1/2}(\mathbb{R}^2)} \to 0$$

при $z_3 \to 0$.

Таким образом, с помощью задачи (18) мы построили решение задачи (17). Ясно, что вектор-функция

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{y}) = \sum_m \boldsymbol{c}^{(m)}(\boldsymbol{z}) \psi_{(m)}(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{W}_2^2(Y_s),$$

где $\psi_{(m)}(\boldsymbol{z}) = 0$ вблизи $z_3 = 0$ и исчезает при $z_3 \geq \delta > 0$ (δ – достаточно мало), является искомым векторным полем.

Литература

1. Conca C., Díaz J.I., Liñán A., Timofte C. Homogenization in chemical reactive flows // Electronic Journal of Differential Equations. – 2004. – 40. – P.1-22.

2. Ладыженская О.А., Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.

INDICATOR RANDOM PROCESS AND SEPARABLE RANDOM CLOSED SETS

R. N. Zimin

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: reshat85@mail.ru

Abstract. The extension of functions on the periodic structures which preserves their differential properties is studied.

Key words: extension of functions, periodic sets, differential properties