УДК 511.35

О СУММИРОВАНИИ ФУНКЦИИ $\tau_k(n)$ ПО ЧИСЛАМ, ЛЕЖАЩИМ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

М.В. Шевцова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: shevtsova@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача получения асимптотической формулы для суммы значений функции $\tau_k(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии с разностью специального вида, при растущем k.

Ключевые слова: свойство ортогональности характеров, оценка суммы характеров по специальному модулю, процесс исчерпывания криволинейной области И.М.Виноградова.

Рассмотрим задачу получения асимптотической формулы для суммы значений функции $\tau_k(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии с разностью D, являющейся степенью простого нечетного числа, где $\tau_k(n)$ означает число решений в натуральных числах уравнения $x_1 \dots x_k = n$. Эта асимптотика при фиксированном $k \geq 2$ получена в [6]. При этом $D \leq \frac{3}{8} - \epsilon$, $0 < \epsilon < \frac{3}{8}$ произвольно мало. С ростом параметров k и D задача получения асимптотики усложняется, так как поведение $\tau_k(n)$ становится более сложным, а прогрессия более редкой. Специальный вид разности D позволяет получить лучший результат. В данной статье получена асимптотика для суммы значений $\tau_k(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии с разностью указанного вида, при растущем k.

Лемма 1 *Для любого неглавного характера χ по модулю D*

$$\sum_{1 \leq u \leq a} \chi(u) \ll D^{\frac{1}{8}} \ln D a^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство см. в [4].

Лемма 2 *(основная). Пусть $D \leq x^{\frac{3}{8}}$; $N_1, \dots N_k, \delta -$вещественные числа, $N_i \geq \frac{1}{2}$, $i = 1, \dots k$, $x^{\frac{1}{2}} \leq N_1 \dots N_k < x$, $0 < \delta \leq \frac{1}{2k}$; $N = \max\{N_i\}$;*

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\substack{N_1 < n_1 \leq 2N_1 \\ n_1 \dots n_k \leq x}} \dots \sum_{N_k < n_k \leq 2N_k} \chi(n_1 \dots n_k).$$

Тогда

$$S \ll \frac{x^{1+1,7\delta}}{D} N^{-1} \max_{N \leq T \leq 2N, \chi \neq \chi_0} \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} +$$
$$+ \frac{x^{\frac{3}{4}+1,7\delta} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} D^{-\frac{1}{3}} +$$
$$+ \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} \left(\ln x + k - 2\right)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}$$

равномерно по k, причем, константа в знаке $\ll$ зависит от p, δ.

Доказательство.

Будем предполагать,что $N_1 \geq N_2 \geq N_{r+1} \geq N_3 \geq N_{r+2} \geq \ldots$, где $r = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$.Положим $U = N_2 \ldots N_r$, $V = N_{r+1} \ldots N_k$.Тогда $N_1 V \geq U \geq V$,так как $N_1 \geq N_2, N_{r+1} \geq N_3, \ldots$ и $N_2 \geq N_{r+1}$, $N_3 \geq N_{r+2}, \ldots$.Кроме того,$N = N_1$ и $N_1 \geq x^{\frac{1}{2k}}$.

Пусть $\tau'_{r-1}(u), \tau''_{k-r}(v), \tau'_{k-1}(y)$ соответственно означают количество решений в натуральных числах уравнений

$$n_2 \ldots n_r = u, \qquad n_{r+1} \ldots n_k = v, \qquad n_2 \ldots n_k = y,$$

где $N_2 < n_2 \leq 2N_2, \ldots, N_k < n_k \leq 2N_k$.

Рассмотрим случай $U \leq x^{\delta}$. Имеем:

$$|S| = \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{N_2 < n_2 \leq 2N_2} \chi(n_2) \ldots \sum_{N_k < n_k \leq 2N_k} \chi(n_k) \sum_{N_1 < n_1 \leq 2N_1} \chi(n_1) \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{N_2 < n_2 \leq 2N_2} \chi(n_2) \ldots \sum_{N_k < n_k \leq 2N_k} \chi(n_k) \max_{N_1 < T' \leq T'' \leq 2N_1, \chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{T' < t \leq T''} \chi(t) \right| \right\}$$

В силу леммы 1 справедлива оценка

$$\sum_{T' < t \leq T''} \chi(t) \ll N_1^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{6}} \ln D.$$

следовательно,

$$S \ll N_2 \ldots N_k \sqrt{N_1} D^{\frac{1}{6}} \ln D.$$

Так как $N_1 \ldots N_k < x, V \leq U \leq x^{\delta}, D \leq x^{\frac{3}{8}}, \ln x \ll x^{\frac{\delta}{2}}$, то для суммы S получим:

$$S \ll N_2 \ldots N_k \sqrt{N_1} D^{\frac{1}{6}} \ln D = \sqrt{N_2 \ldots N_k} \sqrt{N_1 N_2 \ldots N_k} D^{\frac{1}{6}} \ln D <$$
$$< \sqrt{UV} \sqrt{x} D^{\frac{1}{6}} \ln D \leq x^{\frac{1}{2} + \delta} D^{\frac{1}{6}} \ln D \ll x^{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\delta} D^{-\frac{1}{3}}.$$

Пусть теперь $U > x^{\delta}$. Докажем,что в этом случае

$$S \ll x^{\frac{\delta}{2}} \max_{\substack{N_1 \leq T' \leq T'' \leq 2N_1 \\ UV \leq Y' \leq Y'' \leq 2^{k-1} UV}} \{|S'|\} + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} \left(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2\right)^{k-2}}{\varphi(D)\,(k-2)!}, \tag{1}$$

где

$$S' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T' < t \leq T''} \chi(t) \sum_{Y < y \leq Y''} \chi(y) \tau'_{k-1}(y).$$

Прямоугольной областью на плоскости (t, y) будем называть область, задаваемую неравенствами

$$T' < t \leq T'', \quad Y' < y \leq Y'',$$

где $N_1 \le T' < T'' \le 2N_1, UV \le Y' < Y'' \le 2^{k-1}UV$. Сумму S перепишем в виде

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\substack{N_1 < t \le 2N_1 \\ ty \le x}} \sum_{UV < y \le 2^{k-1}UV} \chi(t)\chi(y)\tau'_{k-1}(y).$$

Если $2N_1 \cdot 2^{k-1}UV \le x$, то (1) тривиально верно в силу того, что тогда область суммирования в S по переменным t и y прямоугольная.

Докажем (1) в случае, когда $N_1UV < x < 2^{k-1}UV$. Определим величины T_1, T_2, полагая

$$T_1 = \max\left\{N_1, \frac{x}{2^{k-1}UV}\right\}, \quad T_2 = \min\left\{2N_1, \frac{x}{UV}\right\}.$$

Так как $\frac{x}{2^{k-1}UV} < 2N_1$ и $N_1 < \frac{x}{UV}$, то

$$N_1 \le T_1 < T_2 \le 2N_1, \quad UV \le \frac{x}{T_2} < \frac{x}{T_1} \le 2^{k-1}UV. \tag{2}$$

Обозначим через $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ области на плоскости (t, y), задаваемые соответственно неравенствами

$$N_1 < t \le T_2, \quad UV < y \le \frac{x}{T_2};$$
$$N_1 < t \le T_2, \quad \frac{x}{T_2} < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x;$$
$$N_1 < t \le T_1, \quad \frac{x}{T_2} < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x;$$
$$T_1 < t \le T_2, \quad \frac{x}{T_2} < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x$$

(некоторые из них могут оказаться пустыми). Область Ω, которая задается на плоскости (t, y) неравенствами

$$N_1 < t \le 2N_1, \quad UV < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x$$

совпадает с областью, задаваемой неравенствами

$$N_1 < t \le T_2, \quad UV < y \le 2^{k-1}UV, \quad ty \le x.$$

Действительно, из неравенств $UV < y$ и $ty \le x$ следует $t \le \frac{x}{UV}$, а из неравенств $t \le 2N_1, t < \frac{x}{UV}$ имеем $t \le T_2$.Из этого в силу (2),а также из определения $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ получаем $\Omega =$
$= \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_3$, причем $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_4$ попарно не пересекаются. Область Ω_3 либо пустая, либо прямоугольная,Ω_1 также либо пустая, либо прямоугольная. Область Ω_3 прямоугольная. Ω_4 совпадает с областью, которая задается неравенствами

$$T_1 < t \le T_2, \quad \frac{x}{T_2} < y \le \frac{x}{t},$$

поскольку из определения T_1 и неравенств $y \le \frac{x}{t}, \quad T_1 < t$ следует $y < 2^{k-1}UV$.

Таким образом утверждение (1) достаточно доказать для

$$S_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1 < t \le T_2} \sum_{\frac{x}{T_2} < y \le \frac{x}{t}} \chi(t)\chi(y)\tau'_{k-1}(y).$$

Пусть T_0 и Δ таковы, что $T_1 \leq T_0 < T_0 + \Delta \leq T_2$. Область Ω', ограниченную на плоскости (t, y) неравенствами

$$T_0 < t \leq T_0 + \Delta, \quad \frac{x}{T_0 + \Delta} < y \leq \frac{x}{t},$$

будем называть криволинейным треугольником на плоскости (t, y) с основанием, равным Δ. любой криволинейный треугольник с основанием, равным Δ, можно представить как объединение попарно непересекающихся прямоугольной области и двух криволинейных треугольников с основанием, равным $\frac{\Delta}{2}$. Повторяя этот процесс s раз мы получим, что каждый криволинейный треугольник Ω' с основанием, равным Δ, есть объединение попарно непересекающихся областей—2^s криволинейных треугольников с основанием, равным $\frac{\Delta}{2^s}$ и $1 + 2 + \ldots + 2^{s-1} = 2^s - 1 < 2^s$ прямоугольных областей.

Положим $s_0 = \left[\frac{\delta}{2}\log_2 x\right]$. В сумме S_1 область суммирования по t и y является криволинейным треугольником с основанием, равным $T_2 - T_1$. Представим ее в виде объединения попрано непересекающихся подобластей — 2^{s_0} криволинейных треугольников с основанием, равным $\frac{T_2 - T_1}{2^{s_0}}$ и не более чем 2^{s_0} прямоугольных областей. Оценим сумму S_2 по одному из таких криволинейных треугольников. Пусть

$$S_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \leq T_2'} \sum_{\frac{x}{T_2'} < y \leq \frac{x}{t}} \chi(t)\chi(y)\tau_{k-1}'(y).$$

Если через S_3 обозначим такую же сумму, как и S_2, но суммирование по χ распространено на все характеры по $\bmod D$, то

$$\begin{aligned}
|S_2 - S_3| &= \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \leq T_2'} \sum_{\frac{x}{T_2'} < y \leq \frac{x}{t}} \chi_0(t)\chi_0(y)\tau_{k-1}'(y) \leq \\
&\leq \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \leq T_2'} \sum_{\frac{x}{T_2'} < y \leq \frac{x}{t}} \tau_{k-1}(y) \leq \\
\leq \frac{1}{\varphi(D)}(T_2' - T_1' + 1)&\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{x}{T_2'} - \frac{x}{T_1'} + 1\right)\left(\ln\left(\frac{x}{T_2'} - \frac{x}{T_1'} + 1\right) + k - 2\right)^{k-2} \leq \\
&\leq \frac{1}{\varphi(D)}\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{N_1}{2^{s_0}} + 1\right)\left(\frac{x}{2^{s_0}N_1} + 1\right)\left(\ln\frac{x}{2^{s_0}N_1} + k - 2\right)^{k-2},
\end{aligned} \tag{3}$$

в силу того,что основание криволинейного треугольника $T_2' - T_1' = \frac{T_2 - T_1}{2^{s_0}} \leq \frac{N_1}{2^{s_0}}$, а высота

$$\frac{x}{T_1'} - \frac{x}{T_2'} = \frac{x}{T_1'T_2'}(T_2' - T_1') \leq \frac{x}{N_1^2} \cdot \frac{N_1}{2^{s_0}} = \frac{x}{2^{s_0}N_1}.$$

Положим

$$S_4 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \leq T_2'} \sum_{\frac{x}{T_2'} < y \leq \frac{x}{T_1'}} \chi(t)\chi(y)\tau_{k-1}'(y).$$

S_3 и S_4 равны числу решений, соответственно, сравнений

$$\begin{gathered}
n_1 \ldots n_k \equiv l \pmod D, \quad T_1' < n_1 \leq T_2', \quad N_2 < n_2 \leq 2N_2, \ldots, N_k < n_k \leq 2N_k, \\
\frac{x}{T_2'} < n_2 \ldots n_k \leq \frac{x}{n_1}, \\
n_1 \ldots n_k \equiv l \pmod D, \quad T_1' < n_1 \leq T_2', \quad N_2 < n_2 \leq 2N_2, \ldots, N_k < n_k \leq 2N_k, \\
\frac{x}{T_2'} < n_2 \ldots n_k \leq \frac{x}{T_1'}.
\end{gathered}$$

Область на плоскости (t, y), задаваемая неравенствами $T_1' < t \leq T_2'$, $\frac{x}{T_2'} < y \leq \frac{x}{t}$ содержится в области, задаваемой неравенствами $T_1' < t \leq T_2'$, $\frac{x}{T_2'} < y \leq \frac{x}{T_1'}$.Поэтому

$$0 \leq S_3 \leq S_4.$$

Аналогично, как и при выводе (3), получаем

$$S_4 - \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \leq T_2'} \sum_{\frac{x}{T_2'} < y \leq \frac{x}{T_1'}} \chi(t)\chi(y)\tau_{k-1}'(y) \ll$$
$$\ll \frac{1}{\varphi(D)} \frac{1}{(k-2)!} \left(\frac{N_1}{2^{s_0}} + 1\right) \left(\frac{x}{2^{s_0} N_1} + 1\right) \left(\ln \frac{x}{2^{s_0} N_1} + k - 2\right)^{k-2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varphi(D)} \frac{1}{(k-2)!} \left(\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2\right)^{k-2} \left(\frac{x}{2^{2s_0}} + \frac{N_1}{2^{s_0}} + \frac{x}{2^{s_0} N_1} + 1\right) \ll$$
$$\ll \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} (\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0} \varphi(D)(k-2)!}.$$

Имеем

$$S_2 \ll S_3 + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} (\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0} \varphi(D)(k-2)!} \leq S_4 + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} (\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0} \varphi(D)(k-2)!} \ll$$
$$\ll \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{T_1' < t \leq T_2'} \sum_{\frac{x}{T_2'} < y \leq \frac{x}{T_1'}} \chi(t)\chi(y)\tau_{k-1}'(y) \right| + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} (\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0} \varphi(D)(k-2)!}.$$

В силу неравенств $T_1 \leq T_1' < T_2' \leq T_2$ и условий (2) справедливы неравенства

$$N_1 \leq T_1' < T_2' \leq 2N_1, \quad UV \leq \frac{x}{T_2'} < \frac{x}{T_1'} \leq 2^{k-1} UV.$$

Следовательно, для суммы S_2 получим

$$S_2 \ll \max_{\substack{N_1 \leq T' < T'' \leq 2N_1 \\ UV \leq Y' < Y'' \leq 2^{k-1} UV}} \{|S'|\} + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} (\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{2^{s_0} \varphi(D)(k-2)!}.$$

Так как S_1 является суммой $< 2^{s_0} \ll x^{\frac{\delta}{2}}$ слагаемых вида S' и $2^{s_0} \ll x^{\frac{\delta}{2}}$ слагаемых виды S_2, то неравенство (1) справедливо для S_1. Таким образом, доказательство неравенства (1) завершено.

Далее

$$\sum_{T' < t \leq T''} \chi(t) = \sum_{1 < t \leq T''} \chi(t) - \sum_{1 < t \leq T'} \chi(t),$$
$$\sum_{Y' < t \leq Y''} \chi(y)\tau_{k-1}'(y) = \sum_{1 < t \leq Y''} \chi(y)\tau_{k-1}'(y) - \sum_{1 < t \leq Y'} \chi(y)\tau_{k-1}'(y).$$

Поэтому из неравенства (1) получаем:

$$S \ll x^{\frac{\delta}{2}} \max_{\substack{N_1 \leq T \leq 2N_1 \\ UV \leq Y \leq 2^{k-1} UV}} \{|S_1'|\} + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} (\ln x^{1-\frac{3}{2}\delta} + k - 2)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}, \tag{4}$$

где

$$S_1' = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t \leq T} \chi(t) \sum_{y \leq Y} \chi(y) \tau_{k-1}'(y).$$

Возможны два случая: $V \leq x^\delta$ и $V > x^\delta$. Рассмотрим случай $V \leq x^\delta$. Оценим сумму $S_1' = S_1'(T, Y)$ при $N_1 \leq T \leq 2N_1, \quad UV \leq Y \leq 2^{k-1}UV$. Имеем:

$$|S_1'| = \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t \leq T} \chi(t) \sum_{V < v \leq 2^{k-r}V} \chi(v) \tau_{k-r}''(v) \sum_{U < u \leq U_v} \chi(u) \tau_{r-1}'(u) \right|,$$

где $U_v = \min\left\{2^{r-1}U, \frac{U}{v}\right\}$. Отсюда имеем:

$$|S_1'| \leq \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} \sum_{N_{r+1} < n_{r+1} \leq 2N_{r+1}} \cdots \sum_{N_k < n_k \leq 2N_k} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{U < u \leq U_v} \chi(u) \tau_{r-1}'(u) \right|. \quad (5)$$

Применив неравенство Коши, получим:

$$\sigma = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{U < u \leq U_v} \chi(u) \tau_{r-1}'(u) \right| \leq (\sigma_1)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{U < u \leq U_v} \chi(u) \tau_{r-1}'(u) \right|^2.$$

Заметим, что σ_1 равняется числу решений сранения

$$n_2 \ldots n_r \equiv n_2' \ldots n_r' \pmod D; \quad N_2 < n_2, n_2' \leq 2N_2, \ldots, N_r < n_r, n_r' \leq 2N_r,$$
$$U < n_2 \ldots n_r, n_2' \ldots n_r' \leq U_v.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U < u \leq U_v} \tau_{r-1}(u) \sum_{\frac{U-u}{D} < d \leq \frac{U_v - u}{D}} \tau_{r-1}(u + dD) \leq$$
$$\leq \sum_{U < u \leq U_v} \tau_{r-1}(u) e^{r-1} \left(\frac{U}{D} + 1 \right) \left(\ln \frac{U}{D} \right)^{r-2} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{r-2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{(r-2)!} \left(\frac{U^2}{D} + U \right) e^{r-1} \left(\ln \frac{U}{D} \right)^{r-2} (\ln U + r - 2)^{r-2} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{r-2}.$$

Отсюда

$$\sigma \ll \frac{e^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{(r-1)!}} \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right) (\ln U + r - 2)^{r-2} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{\frac{r-2}{2}}. \quad (6)$$

Из (5), (6), а также по лемме (1) получим:

$$S_1' \ll \max_{\chi \neq \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \leq T} \chi(t) \right| \right\} V \frac{e^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{(r-1)!}} \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right) (\ln U + r - 2)^{r-2} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{\frac{r-2}{2}} \ll$$
$$\ll V N_1^{1/2} D^{1/6} \ln D \frac{e^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{(r-1)!}} \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right) (\ln U + r - 2)^{r-2} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{\frac{r-2}{2}}.$$

Так как

$$N_1^{1/2}U = (N_1U)^{1/2}(U^2)^{1/4} \ll x^{1/2}(N_1UV)^{1/4} \le x^{3/4},$$
$$(N_1U)^{1/2} \ll x^{1/2}, \quad x^{1/2}D^{1/6} \ll x^{3/4}D^{-1/3},$$

то

$$S_1' \ll x^{1,1\delta}(x^{3/4}D^{-1/3} + x^{1/2}D^{1/6})\frac{e^{\frac{k}{4}}}{\sqrt{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{\frac{k}{2}-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом при $V \le x^\delta$ получаем:

$$S \ll x^{3/4+1,6\delta}D^{-1/3}\frac{e^{\frac{k}{4}}}{\sqrt{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{\frac{k}{2}-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} + \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}(\ln x + k - 2)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}.$$

Рассмотрим оставшийся случай, когда $V > x^\delta$. Покажем, что для суммы $S_1' = S_1'(T,Y)$ при $N_1 < T \le 2N_1, \quad UV < Y \le 2^{k-1}UV$ справедлива оценка

$$S_1' \ll x^\delta \max_{\substack{U \le U' < U'' \le 2^{r-1}U \\ V \le V' < V'' \le 2^{k-r}V}} \{|S''|\} + \frac{x^{1-\delta}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}-1\right)!\left(\frac{k}{2}-2\right)!}, \tag{7}$$

где

$$S'' = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \ne \chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{t \le T}\chi(t)\sum_{U' < u \le U''}\sum_{V' < v \le V''}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\chi(v)\tau_{k-r}''(v).$$

Прямоугольной областью на плоскости (u,v) будем называть область, задаваемую неравенствами

$$U' < u \le U'', \quad V' < v \le V'',$$

где $U \le U' < U'' \le 2^{r-1}U, \quad V \le V' < V'' \le 2^{k-r}V$.

Сумма S_1' переписывается в виде

$$S_1' = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \ne \chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{t \le T}\chi(t)\sum_{U < u \le 2^{r-1}U}\sum_{V < v \le 2^{k-r}V, uv \le Y}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\chi(v)\tau_{k-r}''(v).$$

Положим

$$U_1 = \max\left\{U, \frac{Y}{2^{k-r}V}\right\}, \quad U_2 = \min\left\{2^{r-1}U, \frac{Y}{V}\right\}.$$

Если $Y \ge 2^{k-1}UV$, то область суммирования по u,v в сумме S_1' прямоугольная и утверждение (7)справедливо.

Пусть $UV < Y < 2^{k-1}UV$. Тогда $U_1 < U_2$. Из определения U_1 и U_2 получаем:

$$U \le U_1 < U_2 \le 2^{r-1}U, \quad V \le \frac{Y}{U_2} < \frac{Y}{U_1} \le 2^{k-r}V. \tag{8}$$

Обозначим через $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ на плоскости (u, v) следующие области соответственно:

$$\begin{aligned}
&U < u \le U_2, \quad V < v \le 2^{k-r}V, \quad uv \le Y,\\
&U < u \le U_2, \quad V < v \le \frac{Y}{U_2},\\
&U < u \le U_2, \quad \frac{Y}{U_2} < v \le 2^{k-r}V, \quad uv \le Y,\\
&U < u \le U_1, \quad \frac{Y}{U_2} < v \le 2^{k-r}V, \quad uv \le Y,\\
&U_1 < u \le U_2, \quad \frac{Y}{U_2} < v \le 2^{k-r}V, \quad uv \le Y.
\end{aligned}$$

Область суммирования в сумме S'_1 по переменным u, v совпадает с областью ω. При этом $\omega = \omega_1 \cup \omega_2 = \omega_1 \cup \omega_3 \cup \omega_4$, а $\omega_1, \omega_3, \omega_4$ попарно не пересекаются. Область ω_3 либо пустая, либо прямоугольная. Это же справедливо и для ω_1. Область ω_4 совпадает с областью, задаваемой неравенствами $U_1 < u \le U_2, \quad \frac{Y}{U_2} < v \le \frac{Y}{u}$. Таким образом, (7) достаточно доказать для суммы

$$S'_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t \le T} \chi(t) \sum_{U_1 < u \le U_2} \sum_{\frac{Y}{U_2} < v \le \frac{Y}{u}} \chi(u) \tau'_{r-1}(u) \chi(v) \tau''_{k-r}(v).$$

Криволинейным треугольником на плоскости (u, v) с основанием, равным Δ_1 назовем область

$$U_0 < u \le U_0 + \Delta_1, \quad \frac{Y}{U_0 + \Delta_1} < v \le \frac{Y}{u},$$

где $U_1 \le U_0 < U_0 + \Delta_1 \le U_2$. Положим $s_1 = [\delta \log_2 x]$. Как и при выводе (1) область суммирования по u, v в сумме S'_2 представим в виде объединения поперно непересекающихся областей, из которых $< 2^{s_1}$ прямоугольных и 2^{s_1} криволинейных треугольников с основанием, равным $\frac{U_2 - U_1}{2^{s_1}}$. Оценим сумму S'_2 по одному из таких треугольников. Пусть

$$S'_3 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t \le T} \chi(t) \sum_{U'_1 < u \le U'_2} \sum_{\frac{Y}{U'_2} < v \le \frac{Y}{u}} \chi(u) \tau'_{r-1}(u) \chi(v) \tau''_{k-r}(v).$$

Если S'_4—такая же сумма, как S'_3, но суммирование по χ распространено на все характеры по $mod \quad D$, то

$$S'_4 - S'_3 \le \frac{N_1}{\varphi(D)(r-2)!(k-r-1)!} \left(U'_2 - U'_1 + 1\right) \left(\frac{Y}{U'_2} - \frac{Y}{U'_1} + 1\right) (\ln U + r - 2)^{r-2} \cdot$$

$$\cdot \left(\ln \frac{Y}{U} + k - r - 1\right)^{k-r-1}.$$

Положим

$$S'_5 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (mod D)} \overline{\chi}(l) \sum_{t \le T} \chi(t) \sum_{U'_1 < u \le U'_2} \sum_{\frac{Y}{U'_2} < v \le \frac{Y}{U'_1}} \chi(u) \tau'_{r-1}(u) \chi(v) \tau''_{k-r}(v).$$

Так как область суммирования по u, v суммы S_4' содержится в области суммирования по u, v суммы S_5' и S_4', S_5' выражают количество решений сравнения, то

$$0 \le S_4' \le S_5'.$$

Оценивая слагаемое с $\chi = \chi_0$ в сумме S_5', получаем:

$$S_3' \ll \tfrac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi \ne \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{t \le T} \chi(t) \sum_{U_1' < u \le U_2'} \sum_{\frac{Y}{U_2'} < v \le \frac{Y}{U_1'}} \chi(u) \tau_{r-1}'(u) \chi(v) \tau_{k-r}''(v) \right| +$$
$$+ \tfrac{N_1}{\varphi(D)(r-2)!(k-r-1)!} \left(U_2' - U_1' + 1\right) \left(\tfrac{Y}{U_2'} - \tfrac{Y}{U_1'} + 1\right) \left(\ln U + r - 2\right)^{r-2} \left(\ln \tfrac{Y}{U} + k - r - 1\right)^{k-r-1}.$$

Так как $U_2' - U_1' = \frac{U_2 - U_1}{2^{s_1}}$, $\quad U_1 \le U_1' \le U_2' \le U_2$ и U_1, U_2 удовлетворяют (8),то

$$\tfrac{N_1}{\varphi(D)(r-2)!(k-r-1)!} \left(U_2' - U_1' + 1\right) \left(\tfrac{Y}{U_2'} - \tfrac{Y}{U_1'} + 1\right) \left(\ln U + r - 2\right)^{r-2} \left(\ln \tfrac{Y}{U} + k - r - 1\right)^{k-r-1} \le$$
$$\le \tfrac{N_1}{\varphi(D)(r-2)!(k-r-1)!} \left(\tfrac{U}{2^{s_1}} + 1\right) \left(\tfrac{Y}{U_1 2^{s_1}} + 1\right) \left(\ln x + \tfrac{k}{2} - 1\right)^{k-3} \le$$
$$\le \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}}{\varphi(D) \left(\frac{k}{2} - 1\right)! \left(\frac{k}{2} - 2\right)!} \left(\frac{N_1 UV}{2^{2s_1}} + \frac{N_1 UV}{2^{s_1}} \left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right) + \frac{N_1 UV}{UV} \right) \le$$
$$\le \frac{x^{1-\delta} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}}{2^{s_1} \varphi(D) \left(\frac{k}{2} - 1\right)! \left(\frac{k}{2} - 2\right)!}.$$

Отсюда

$$S_3' \ll \max_{\substack{U \le U' < U'' \le 2^{r-1} U \\ V \le V' < V'' \le 2^{k-r} V}} \{|S''|\} + \frac{x^{1-\delta} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}}{2^{s_1} \varphi(D) \left(\frac{k}{2} - 1\right)! \left(\frac{k}{2} - 2\right)!}.$$

Сумма S_2' равна сумме $< 2^{s_1}$ слагаемых вида S'' и 2^{s_1} слагаемых вида S_3'. Поэтому

$$S_2' \ll x^{\delta} \max_{\substack{U \le U' < U'' \le 2^{r-1} U \\ V \le V' < V'' \le 2^{k-r} V}} \{|S''|\} + \frac{x^{1-\delta} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}}{2^{s_1} \varphi(D) \left(\frac{k}{2} - 1\right)! \left(\frac{k}{2} - 2\right)!}.$$

Таким образом (7) доказано.

Оценим сумму S''. Имеем:

$$S'' \le \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \ne \chi_0} \left| \sum_{t \le T} \chi(t) \right| \left| \sum_{U' < u \le U''} \chi(u) \tau_{r-1}'(u) \right| \left| \sum_{V' < v \le V''} \chi(v) \tau_{k-r}''(v) \right| \le$$
$$\le \max_{\chi \ne \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \le T} \chi(t) \right| \right\} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (mod D)} \left| \sum_{U' < u \le U''} \chi(u) \tau_{r-1}'(u) \right| \left| \sum_{V' < v \le V''} \chi(v) \tau_{k-r}''(v) \right|.$$

Применяя неравенство Коши, получаем:

$$S'' \ll \max_{\chi \ne \chi_0} \left\{ \left| \sum_{t \le T} \chi(t) \right| \right\} \cdot \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (mod D)} \left| \sum_{U' < u \le U''} \chi(u) \tau_{r-1}'(u) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi (mod D)} \left| \sum_{V' < v \le V''} \chi(v) \tau_{k-r}''(v) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим,что сумма

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(modD)}\left|\sum_{U'<u\le U''}\chi(u)\tau'_{r-1}(u)\right|^2$$

равна количеству решений сравнения

$$n_2\ldots n_r\equiv n'_2\ldots n'_r \pmod D;\quad N_2<n_2,n'_2\le 2N_2,\ldots,N_r<n_r,n'_r\le 2N_r,$$
$$U'<n_2\ldots n_r, n'_2\ldots n'_r\le U''.$$

Для количества решений этого сравнения имеем оценку:

$$\sum_{U'<u\le U''}\tau_{r-1}(u)\sum_{\frac{U'-u}{D}<d\le\frac{U''-u}{D}}\tau_{r-1}(u+dD)\le$$
$$\le\frac{e^{r-1}}{(r-2)!}\left(\frac{U^2}{D}+U\right)\left(\ln\frac{U}{D}\right)^{r-2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-2}(\ln U+r-2)^{r-2}\ll$$
$$\ll\frac{e^{r-1}}{(r-2)!}\left(\frac{U^2}{D}+U\right)\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{2(r-2)}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{r-2}.$$

Аналогично имеем:

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi(modD)}\left|\sum_{V'<u\le V''}\chi(v)\tau''_{k-r}(v)\right|^2\ll$$
$$\ll\frac{e^{k-r}}{(k-r-1)!}\left(\frac{V^2}{D}+V\right)\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{2(k-r-1)}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-r-1}.$$

Следовательно,

$$S''\ll\max_{\chi\ne\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}\frac{e^{\frac{k-1}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{D}}+\sqrt{V}\right)\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}.$$

В силу неравенств $T\le 2N_1,\quad V\le U\le N_1V,\quad N_1UV<x,\quad D\le x^{\frac{3}{8}}$ и леммы 1 получим:

$$\max_{\chi\ne\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\le T}\chi(t)\right|\right\}\frac{e^{\frac{k-1}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\frac{U\sqrt{V}+\sqrt{U}V}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right)\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}\ll$$
$$\ll N_1^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{6}}\ln x\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right)\frac{e^{\frac{k-1}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}\ll$$
$$\ll\frac{x^{0,2\delta}e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\frac{\sqrt{U}\sqrt{N_1UV}}{D^{\frac{1}{3}}}+\sqrt{N_1UV}D^{\frac{1}{6}}\right)\ll$$
$$\ll\frac{x^{0,2\delta}e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}\left(\frac{x^{1/2}(N_1UV)^{1/4}}{D^{1/3}}+x^{1/2}D^{1/6}\right)\ll$$
$$\ll\frac{x^{3/4+0,2\delta}e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{(\frac{k}{2}-1)!}D^{-1/3}$$

И так как $\frac{UV}{D} < \frac{x}{N_1 D}$ имеем:

$$S'' \ll \frac{x^{1+0,2}\delta}{D} N_1^{-1} \max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\leq T}\chi(t)\right|\right\} \frac{e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!} +$$
$$+\frac{x^{3/4+0,2\delta} e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!} D^{-1/3}.$$

Из (7) следует, что

$$S_1' \ll \frac{x^{1+1,2}\delta}{D} N_1^{-1} \max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{t\leq T}\chi(t)\right|\right\} \frac{e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!} +$$
$$+\frac{x^{3/4+1,2\delta} e^{\frac{k-1}{2}}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!} D^{-1/3} + \frac{x^{1-\delta}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}-1\right)!\left(\frac{k}{2}-2\right)!}.$$

В силу (4) получаем:

$$S \ll \frac{x^{1+1,7\delta}}{D} N^{-1} \max_{N\leq T\leq 2N,\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{t\leq T}\chi(t)\right| \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!} +$$
$$+\frac{x^{\frac{3}{4}+1,7\delta}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!} D^{-\frac{1}{3}} +$$
$$+\frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}\left(\ln x + k - 2\right)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}$$

Доказательство леммы 2 завершено.

Лемма 3 *Пусть $\chi-$произвольный неглавный характер по mod D, $D = p^n$, $p \geq 3$, $p-$ фиксированное простое число, $S_a = \sum_{m\leq a}\chi(m)$, $\rho = \frac{\ln D}{\ln a}$. Тогда существуют константы $c > 0, \gamma > 0$, зависящие от p, такие, что при $1 \leq \rho \leq 0,5n$ выполняется оценка*

$$|S_a| < ca^{1-\frac{\gamma}{\rho^2}}$$

Доказательство(см. [3]).

Теорема 1 *При $(l, D) = 1$, $\quad D \leq x^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$ справедлива формула*

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{xQ_{k-1}(\ln x)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\varkappa}\right),$$

где $Q_{k-1}(z)-$многочлен степени $k-1$ от переменной z с коэффициентами, зависящими от k и p, $\varkappa = \min\left\{\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\gamma}{10k^3}\right\}$, $\gamma > 0-$константа, зависящая от p. Данная формула имеет место для всех $k \leq \left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{1/4}$.

Доказательство.

Из ортогональности характеров имеем:

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(modD)}} \tau_k(n) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi(modD)} \overline{\chi}(l) \sum_{n_1\dots n_k\le x} \chi(n_1\dots n_k).$$

В сумме по характерам χ выделим слагаемое с $\chi=\chi_0$:

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(modD)}} \tau_k(n) = W+R,$$

где

$$W=\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\substack{n_1\dots n_k\le x\\ n_1\dots n_k\not\equiv 0(modD)}} 1, \quad R=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{n_1\dots n_k\le x}\chi(n_1\dots n_k).$$

Запишем W в виде

$$W=\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\substack{n_1\not\equiv 0(modp)\\ n_1\dots n_k\le x}} 1\dots \sum_{n_k\not\equiv 0(modp)} 1.$$

Представим каждую сумму по переменным суммирования $n_i\not\equiv 0(modp)$ как разность суммы, где переменная суммирования n_i пробегает все значения, и суммы, где переменная суммирования n_i пробегает значения, сравнимые с нулем по модулю p. Воспользуемся также асимптотической формулой:

$$\sum_{n\le x_1}\tau_k(n) = x_1P_{k-1}(\ln x_1) + O\left(x_1^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

где $P_{k-1}(z)$—многочлен степени $k-1$ от переменной z (см. [7]). Тогда

$$\begin{gathered}
W=\frac{1}{\varphi(D)}\left(\sum_{n_1}1-\sum_{n_1\equiv 0(modp)}1\right)\dots\left(\sum_{n_k}1-\sum_{n_k\equiv 0(modp)}1\right)= \\
n_1\dots n_k\le x \\
=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sum_{1\le s_1<\dots<s_j\le k}\sum\dots\sum_{\substack{n_1\dots n_k\le x\\ n_{s_1}\equiv 0(modp),\dots,n_{s_j}\equiv 0(modp)}}1= \\
=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\sum_{n_1\equiv 0(modp)}\dots\sum_{n_j\equiv 0(modp)}\sum_{n_{j+1}}\dots\sum_{n_k}1 \qquad (9)\\
n_1\dots n_k\le x= \\
=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\sum_{x\le\frac{x}{p^j}}\tau_k(n)=\frac{x}{\varphi(D)}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}P_{k-1}\left(\ln\frac{x}{p^j}\right)+ \\
+O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right)=\frac{x}{\varphi(D)}Q_{k-1}(\ln x)+O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right),
\end{gathered}$$

где $Q_{k-1}(z)$—многочлен степени $k-1$ с коэффициентами, зависящими от p и k.

Оценим сумму R, представив ее как сумму $\ll \ln^k x$ слагаемых вида

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\substack{N_1 < n_1 \leq 2N_1 \\ n_1 \ldots n_k \leq x}} \ldots \sum_{N_k < n_k \leq 2N_k} \chi(n_1 \ldots n_k).$$

Пусть $N = \max N_i$, $\quad A = N^{-1} \sum_{t \leq T} \chi(t)$, где $N \leq T \leq 2N$, $D_1 = p^{m_1}$—модуль, по которому характер χ примитивный. Оценим величину A. Так как $N = \max N_i \geq x^{\frac{1}{k}}$, $\quad D_1 \leq D \leq x^{\frac{3}{8}}$, то $\dfrac{\ln D_1}{\ln T} \leq k$. Возможны случаи:

- $\frac{m_1}{20} > k$, $\frac{\ln D_1}{\ln T} > 1$, $m_1 > 81$. В этом случае по лемме 3 величина $A \ll N^{-\frac{\gamma}{k^3}} \ll x^{-\frac{\gamma}{2k^3}}$, так как $N \geq x^{\frac{1}{2k}}$.

- $T \geq D_1$. Тогда

$$A \ll \frac{\sqrt{D_1} \ln D_1}{N} \leq \frac{\sqrt{T} \ln T}{N} \ll N^{-\frac{1}{2}} \ln x \leq x^{-\frac{1}{4k}} \ln x.$$

- $m_1 \leq \max\{81, 20k\} \leq 41k$. В этом случае сумму характеров оценим модулем D_1. Имеем:

$$A \leq \frac{p^{m_1}}{N} \leq \frac{p^{41k}}{N} \ll \frac{x^{k \frac{\ln p}{\ln x}}}{x^{\frac{1}{k}}} \leq \frac{x^{\overline{\frac{c}{(\ln x)^{3/4}}}}}{x^{\frac{1}{k}}} \leq x^{\frac{c}{k^3} - \frac{1}{k}}.$$

  Так как $\frac{1}{2k^3} < \frac{1}{4k}$ и в лемме константа $\gamma < 1$, то во всех случаях $A \ll x^{-\frac{\gamma}{2k^3}}$.

Таким образом, по лемме 1 имеем:

$$S \ll \frac{x^{1+1{,}7\delta - \frac{\gamma}{2k^3}}}{D} \cdot \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} +$$
$$+ \frac{x^{\frac{3}{4}+1{,}7\delta} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} D^{-\frac{1}{3}} +$$
$$+ \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} (\ln x + k - 2)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}$$

Учитывая, что в R входит $\ll \ln^k x$ слагаемых вида S, получаем, что

$$R \ll \frac{x^{1+1{,}7\delta - \frac{\gamma}{2k^3}}}{D} \cdot \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} +$$
$$+ \frac{x^{\frac{3}{4}+1{,}7\delta} \left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)!} D^{-\frac{1}{3}} +$$
$$+ \frac{x^{1-\frac{\delta}{2}} (\ln x + k - 2)^{2k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}$$

Выберем параметр $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\gamma}{5k^3}\right\}$, то есть в любом случае $\delta \le \frac{\gamma}{5k^3}$. Отсюда и из условия $D \le x^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$ находим:

$$R \ll +\frac{x^{\frac{3}{4}+1,7\delta}\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!} D^{-\frac{1}{3}} +$$
$$+\frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}\left(\ln x + k - 2\right)^{2k-2}}{\varphi(D)(k-2)!} \ll$$
$$\ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}-1\right)!}\left(x^{1+1,7\delta-\frac{2}{3}\varepsilon} + x^{1-\delta/2}\right).$$

В силу определения величины δ, если $\frac{\varepsilon}{4} < \frac{\gamma}{5k^3}$, то

$$R \ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!}\left(x^{1-\frac{\varepsilon}{4}} + x^{1-\frac{\varepsilon}{8}}\right) \ll$$

$$\ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\frac{\varepsilon}{8}},$$

а если $\frac{\varepsilon}{4} > \frac{\gamma}{5k^3}$, то

$$R \ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!}\left(x^{1-0,9\frac{\gamma}{5k^3}} + x^{1-\frac{\gamma}{10k^3}}\right) \ll$$
$$\ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\frac{\gamma}{10k^3}},$$

следовательно,

$$R \ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\varkappa}, \varkappa = \min\left\{\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\gamma}{10k^3}\right\}.$$

Заметим, что остаток в (9) не превосходит величины

$$\ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\frac{1}{2k}} \ll \frac{\left(\ln x + \frac{k}{2} - 1\right)^{2k-3} e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\varphi(D)\left(\frac{k}{2}\right)!} x^{1-\varkappa},$$

поскольку $\frac{\gamma}{10k^3} < \frac{1}{10k^3} < \frac{1}{2k}$.

Для определения верхней границы возможных k сравним полученную формулу с неравенством Марджанишвили (см. [3]):

$$\sum_{n \le x} \tau_k(n) \le \frac{x\left(\ln x + k - 1\right)^{k-1}}{D(k-1)!}.$$

То есть необходимо:

$$\frac{x^{1+1,7\delta-\frac{\gamma}{2k^3}}}{D}\cdot\frac{\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}+$$
$$+\frac{x^{\frac{3}{4}+1,7\delta}\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}D^{-\frac{1}{3}}+$$
$$+\frac{x^{1-\frac{\delta}{2}}\left(\ln x+k-2\right)^{k-2}}{\varphi(D)(k-2)!}\ll\frac{x\left(\ln x+k-1\right)^{k-1}}{D(k-1)!}.$$

Сравнивая последнее слагаемое, имеем:

$$\frac{x(\ln x)^k(\ln x+k-2)^{k-2}}{x^{\delta/2}\varphi(D)(k-2)!}\le\frac{x}{D}\frac{(\ln x+k)^{k-1}}{(k-1)!},$$
$$(\ln x)^k\le x^{\delta/2}<x^{\frac{\gamma}{k^3}}$$
$$k\ln\ln x\le\tfrac{\gamma}{k^3}\ln x,$$
$$k^4\le\frac{\ln x}{\ln\ln x},\quad k\le\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{1/4}.$$

Сравнивая первое слагаемое, имеем:

$$\frac{x^{1+1,7\delta-\frac{\gamma}{2k^3}}}{D}\cdot\frac{\left(\ln x+\frac{k}{2}-1\right)^{k-3}e^{\frac{k-1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{k-3}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)!}\le\frac{x}{D}\frac{(\ln x+k)^{k-1}}{(k-1)!},$$
$$\frac{(\ln x)^{k-2}}{x^{0,8\delta}}\le\frac{e^{\frac{k^2}{2\ln x}}}{k^{k/2}},$$
$$k\ln\ln x-\frac{\ln x}{k^3}\le\frac{k^2}{\ln x}-k\ln k,$$
$$k\ln\ln x<k\ln\ln x+k\ln k<\frac{k^2}{\ln x}+\frac{\ln x}{k^3}<\frac{\ln x}{k^3},$$
$$k\le\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{1/4}.$$

Аналогичную оценку для k получаем и для второго слагаемого. Таким образом, равномерную оценку суммы $\sum\limits_{\substack{n\le x\\ n\equiv l\ (\mathrm{mod}\ D)}}\tau_k(n)$ возможно получить для $k\le\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^{1/4}$.

Теорема доказана.

Литература

1. Виноградов И. М. Избранные труды. — М., изд. Ан СССР, 1952.
2. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976.
3. Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел. 2-е изд.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.
4. Линник Ю. В. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод. — Ленинград, Наука, 1980.
5. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах.– Издательство ЛГУ, 1961.
6. Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью,равной степени простого нечетного числа. Докл. АН СССР, Серия математическая, 43, номер 4(1979),с.892-908.
7. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М., ИЛ, 1953.

ABOUT SUMMATION OF FUNCTION $\tau_k(n)$ ON NUMBERS LYING IN ARITHMETICAL PROGRESSION

M.V. Shevtsova

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: shevtsova@bsu.edu.ru

Abstract. Consider the problem of getting the asymptotic formula for the sum of the values of function $\tau_k(n)$ on numbers lying in arithmetical progression with difference of special kind for rising k.

Keywords: property of character's orthogonality, estimation of character sums modulo of special kind, I. M. Vinogradov's process of the depletion of curvilinear domain.