УДК 517.928.2

# ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ И ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

**А.Б. Расулов**

Московский энергетический институт,

ул. Красноказарменная , 14, 111250, г. Москва, Россия, e-mail: rasulov- abdu@rambler.ru

**Аннотация.** В статье для эллиптических систем второго и третьего порядка с внутренней сверхсингулярной точкой найдено интегральное представление решения и соответствующие формулы обращения. Полученные интегральные представления могут быть применены в исследовании асимптотического поведения решений при $r = |z| \to 0$, а также в исследовании граничных задач.

**Ключевые слова:** эллиптическая система, интегральные представления, сверхсингулярная точка, краевые задачи.

## Введение

В области $D = D_0 \backslash \{0\}$ рассматриваются эллиптические системы второго и третьего порядка с сверхсингулярной точкой z=0 вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \overline{z}^2} + \frac{a(z)}{r^n}\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} + \frac{b(z)}{r^{2n}}U + \frac{c(z)}{r^{2n}}\overline{U} = \frac{f(z)}{r^{2n}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial \overline{z}^3} + \frac{a(z)}{r^n}\frac{\partial^2 U}{\partial \overline{z}^2} + \frac{b(z)}{r^{2n}}\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} + \frac{c(z)}{r^{3n}}U + \frac{d(z)}{r^{3n}}\overline{U} = \frac{f(z)}{r^{3n}}, \tag{2}$$

где $U(z) = U_1(x,y) + iU_2(x,y)$,

$a(z) = a_1(x,y) + ia_2(x,y) = e^{i\theta}a_0(z)$, $b(z) = b_1(x,y) + ib_2(x,y) = e^{i2\theta}b_0(z)$, $c(z) = c_1(x,y) + ic_2(x,y) = e^{i3\theta}c_0(z)$, $d(z) = d_1(x,y) + id_2(x,y)$, $f(z) = f(x,y) + if_2(x,y)$.

Система (1),(2) при $n < 1$ называется системой со слабой особенностью,при $n = 1$ системой с сингулярной точкой, а при $n > 1$ системой с сверхсингулярной точкой Система уравнений (1) в случае регулярных коэффициентов, т.е. вслучае $n = 0$ ,была исследована А.В.Бицадзе[1]. А.П.Солдатовым рассмотрены более общие системы с регулярными коэффициентами [2] . Заметим, что исследование системы уравнений (1) в случае ее вырождения ($n = 1$),было предложено еще в 80-х годах А.В.Бицадзе, но из-за ряда трудностей этот вопрос до настоящего времени оставался открытым. Вопросы исследования бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизной с изолированной точкой уплощения приводят нас к исследованию системы первого порядка с сингулярной точкой:

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} + \frac{a(z)}{r}U + \frac{b(z)}{r}\overline{U} = \frac{f(z)}{r} \tag{3}$$

Исследованию этой системы посвящено очень много работ, среди которых весомое значение имеют монографии Л.Г. Михайлова и Усманова З.Д. [3,4]. Последние результаты по исследованию системы(3) опубликованы в работах [5,6]. Актуальность выяснения корректной постановки задач для системы уравнений (2) впервые указана А.В.Бицадзе. Отметим , что даже в случае регулярных коэффициентов не имеется ни одной работы, посвященной исследованию этой системы. Поэтому система (2) нами исследована в регулярном(n=0),сингулярном (n=1) и сверхсингулярном (n>1) случаях. В ряде случаев для систем (1) и(2) удается найти явные решения, которые позволяют легко изучить свойства решений в рассматриваемой области,а также легко применить их к решению краевых задач. Во всех случаях явно выделяется особая часть решений, позволяющая детально изучить поведение решений в окрестности сингулярной точки.

## 1 Задачи типа Дирихле и Римана-Гильберта для эллиптической системы второго порядка с сверхсингулярной точкой

**Задача типа Дирихле.**

Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D)\bigcap C(D\bigcup\Gamma\bigcup\{0\})$ при следующих граничных условиях:

$$\mathrm{Re}\left[\exp(-\omega_a(z)+W_a(z)(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\varphi(z)U)\right]_\Gamma=g_1(t),\mathrm{Re}\left[\exp(-W_\varphi(z)U\right]_\Gamma=g_2(t);\qquad (D_1)$$

$$g_k(t)\in C(\Gamma);t\in\Gamma.$$

**Задача типа Римана-Гильберта.**

Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2_{\overline{z}}(D)$ такое, что

$$\exp\left[-W_\phi(z)U\right],\exp\left[-\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(z)\right](\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n})U(z))\in C^{0,\alpha}(\overline{D})$$

и удовлетворяющее на границе L условиям

$$\mathrm{Re}\left[(a_1(t)-ib_1(t))\exp(-\omega_{\lambda_2}(t)+W_{\lambda_2}(t))(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U(z))\right]_L=g_1(t),$$

$$\mathrm{Re}\left[a_1(t)-ib_1(t)\right)\exp(+W_\phi(t)U(t)]_L=g_2(t),\qquad (G_1)$$

где $a_k(t)-ib_k(t),g_k(t),k=1,2$ заданные функции, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем , причем $a_k(t)-ib_k(t),k=1,2;t\in L$.

**Теорема 1** *Пусть в системе (1) $n>1$ , функции $a(z),b(z),\in C_{\overline{z}}(D_0),c(z)=0$, корни характеристического уравнения являются различными и функции $a(z)$ и $b(z)$ между собой связаны при помощи формулы $b(z)=-r^n\varphi(z)(a(z)+r^n\varphi(z))$, где $\varphi(z)$ известная аналитическая функция. Кроме того, пусть*

$$\mathrm{Re}\,\omega_a(z)<0;$$
$$\exp\left[-\omega_a(z)\right](x^2+y^2)^{-n}f(z)\in Lp(\overline{D_0}),p>2$$
$$|a_0(z)-a_0(0)|\le nr^\gamma,\gamma>n-1.$$

*Тогда любое решение уравнения (1) из класса $C^2_{\overline{Z}}(D)$ представимо в виде*

$$U(z)=\exp\left[-W_\varphi(z)\right]\left\{\Psi(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[W_\varphi(\varsigma)-W_a(\varsigma)+\omega_a(\varsigma)\right]}{\varsigma-z}\times\right.$$

$$\times\left[\Phi(\varsigma)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[-\omega_a(t)+W_a(t)\right]f(t)dt}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^n(t-\varsigma)}\right]d\varsigma\Bigg\}\ (4)$$

*где* $W_a=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{e^{i\varphi}(a_0(\varsigma)-a_0(0))}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{n}{2}}(\varsigma-z)}d\varsigma, W_\varphi(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\varphi(\varsigma)d\varphi}{(\varsigma-z)}, \omega_a(z)=\frac{2a_0(0)}{(1-n)r^{n-1}}$, $k=\overline{1,2}; \Phi(z)$ *и* $\Psi(z)-$*произвольные аналитические функции комплексного переменного* $z$.

**Теорема 2** *Пусть в системе (1)* $n>1, a(z), b(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1,кроме* $\mathrm{Re}\,\omega_a(z)<0$ *и пусть* $\mathrm{Re}\,\omega_a(z)>0$ *и* $\forall z\in D$ *произвольная аналитическая функция* $\Phi(z)\equiv 0$. *Тогда любое решение уравнения (1) из класса* $C_{\bar{z}}^2(\overline{D})$ *представимо в виде*

$$U(z)=\exp\left[-W_\varphi(z)\right]\left\{\Psi(z)-\left[-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[-\omega_a(t)+W_a(t)\right]f(t)dt}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^n(t-\varsigma)}\right]d\varsigma\right\},\qquad(5)$$

*где* $\Psi(z)-$ *произвольные аналитические функции комплексного переменного* $z$.

**Теорема 3** *Пусть в системе (1), удовлетворяют условиям теоремы 1 и* $\mathrm{Re}\,\omega_a(z)=0$. *Кроме того, пусть функция* $f(z)\in C(\overline{D})$ *и при* $r\to 0$ *ее поведение определяется из асимптотической формулы* $(f(z)=0(r^{\gamma_1}),\ \gamma_1>n$.

**Лемма** *Поведения решений (4) в окрестности начала координат определяется формулой*

$$W(z)=\alpha_0 e^{\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z}}+\frac{2\beta_0}{1-n}E_{\frac{n}{n-1}}(a(0))e^{-i\theta}+e^{-i\theta}\omega_0(z),$$

*где* $E_{\frac{n}{n-1}}(a(0))=\int\limits_{R^{1+n}}^{\infty}e^{\frac{2a_0(0)}{1-n}\eta}\eta^{\frac{n}{n-1}}B_0(\eta)d\eta,$ *— обобщенная интегрально-показательная функция,* $\alpha_0,\beta_0-$ *постоянные,* $\omega_0-$*ограниченная функция при* $r\to 0$.

*Используя лемму доказано следующая теорема о единственности интегрального представления (4) в классе непрерывных функций.*

**Теорема 4** *Пусть выполнены условий теоремы 1.Тогда однородное система (1) в классы* $C^2(D)\bigcap C(D\bigcup\Gamma\bigcup 0)$ *имеет только тривиальное решение.*

**Теорема 5** *Пусть коэффициенты уравнения (1) и его правая часть удовлетворяют условиям теоремы 1 , тогда интегральное представление (4) обратимо. Соответствующие аналитические функции* $\Phi(z)$*и*$\Psi(z)$ *единственным образом внутри области* $D$ *находятся через значение* $U(z)$ *и* $\frac{\partial U}{\partial\bar{z}}$ *при помощи формул :*

$$\Phi(z)=\left[\frac{\partial U}{\partial\bar{z}}-\varphi(z)U\right]\exp\left[W_a(z)-\omega_a(z)\right]+\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[-\omega_a(\zeta)+W_a(\zeta)\right]f(\zeta)}{(\zeta-z)(\xi^2+\eta^2)^n}d\zeta,\qquad(6)$$

$$\Psi(z)=U(z)\exp\left[W_\varphi(z)\right]+\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[W_\varphi(\zeta)-W_a(\zeta)+\omega_a(\zeta)\right]}{(\zeta-z)(\zeta^2+\eta^2)^n}\times$$

$$\times\left[\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[-\omega_a(t)+W_a(t)\right]f(t)dt}{(\xi^2+\eta^2)^n(t-\zeta)}\right]d\zeta.\qquad(7)$$

**Теорема 6** *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача* $(D)$ *разрешима единственным образом и ее решение дается при помощи формулы (4), в которой аналитические функции* $\Phi(z)$ *и* $\Psi(z)$ *соответственно определяются формулами:*

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \tilde{g}_1(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta};$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \tilde{g}_2(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}; |z|<1,$$

*где* $\widetilde{g_k}(t), k=1,2-$ *известные функции.*

**Решение задачи типа Римана-Гильберта** $(G1)$ : Используя интегральные представления (4) и условия задачи $(G1)$, а также формулы обращения (6) и (7)получим

$$\mathrm{Re}\left[(a_1(t)-ib_1(t))(z)\right]_L = \mathrm{Re}\left[(a_1(t)-ib_1(t))\exp(-\omega_{\lambda_2}(t)+W_{\lambda_2}(t))\frac{\partial U}{\partial\overline{z}} - \frac{\lambda_1(z)}{r^n}U)_L\right]+$$

$$+\mathrm{Re}\left[(a_1(t)-ib_1(t))\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\exp[-\omega_{\lambda_2}(\zeta)+W_{\lambda_2}(\zeta))]f(\zeta)}{(\zeta^2+\eta^2)(\zeta-t)}d\zeta\right] = g_1(t)+$$

$$+(a_1(t)-ib_1(t))T_D(-\omega_{\lambda_2},W_{\lambda_2},f)(t) = \tilde{g}_1(t);$$

Отсюда

$$Re\left[(a_1(t)-ib_1(t))\Phi(z)\right] = \tilde{g}_1(t), \tilde{g}_1(t)\in H_\alpha(L). \qquad (G_1^1)$$

Используя второе условие задачи $(G_1^1)$, а также решение задачи и формулу обращения (7), получаем

$$\mathrm{Re}\left[(a_2(t)-ib_2(t))\Psi(z)\right] = g_2(t)+\mathrm{Re}\left\{(a_2(t)-ib_2(t))\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\exp[W_\phi(\zeta)-W_{\lambda_2}(\zeta)+\omega_{\lambda_2}(\zeta)]}{(\zeta-t)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\exp[-\omega_{\lambda_2}(t)+W_{\lambda_2}(t)]f(t)dt}{(\xi^2+\eta^2)(\zeta-t)}\right]_L d\zeta\right\} = \tilde{g}_2(t), (G_1^2)$$

$$\mathrm{Re}\left[(a_2(t)-ib_2(t))\Psi(z)\right] = \tilde{g}_2(t), \qquad (G_1^2)$$

где $\tilde{g}_1(t)\in H_\alpha(L)$. Пусть $\kappa_k = Ind\left[a_k(t)-ib_k(t)\right], k=\overline{1,2}$.

**Теорема 7** *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и* $\kappa_k = Ind\left[a_k(t)-ib_k(t)\right], k=\overline{1,2}, \kappa_k>0$ *где* $\kappa_1>0$ *является индексом задачи* $(G_1^1)$, *а* $\kappa_2>0$ *индексом задачи* $G_1^2$. *Если* $\kappa_k\geq 0$, *то задача* $(G_{11}^k)$ *разрешима и ее решение содержит* $\kappa_1+\kappa_2+2>0$ *произвольных постоянных. Если* $\kappa_1>0(\kappa_2<-2)((\kappa_2<-2)(\kappa_2>0))$, *то для разрешимости задачи* $(G_1 1)$ *необходимо и достаточно выполнение* $|\kappa_k>0|-2\ \ (\,|\kappa_1|-2))$ *условий разрешимости.* **Замечание.** Аналогичным образом иссследованы следующие задачи типа Дирихле и Римана- Гильберта.

**Задачи типа Дирихле.** Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D)\bigcap C(D\bigcup\Gamma\bigcup 0)$ при следующих граничных условиях:

$$\mathrm{Im}\left[\exp(-\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(z)).(\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U)\right]_L=g_1(t),$$

$$\mathrm{Im}\left[\exp(-W_{\varphi}(z)U\right]_L=g_2(t), \qquad (D_2)$$

$$\mathrm{Re}\left[\exp(-\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(z)).(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U)\right]_L=g_1(t),$$

$$\mathrm{Im}\left[\exp(-W_{\varphi}(z)U\right]_L=g_2(t), \qquad (D_3)$$

$$\mathrm{Re}\left[\exp(+W_{\varphi}(z))\,U(z)\right]_L=g_1(t)$$

$$\mathrm{Re}\left[\exp(-\omega_{\lambda_1}(z)+W_{\lambda_1}(z))U(z)\right]_L=g_1(t), \qquad (D_4)$$

$$\mathrm{Re}\left[\exp(\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U)\right]_L=g_2(t).$$

$$\mathrm{Re}\left[\exp(-\omega_{\lambda_1}(z)+W_{\lambda_1}(z))U(z)\right]_L=g_1(t),$$

$$\mathrm{Re}\left[\exp(\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U)\right]_L=g_2(t). \qquad (D_5)$$

## 2 Задачи типа Дирихле для эллиптической системы третьего порядка с сверхсингулярной точкой.

Задачи типа Дирихле. Требуется найти решение системы уравнений (2) из класса $C^3_{\overline{z}}(D)$ при следующих граничных условиях

$$\mathrm{Re}\left[exp\left(-\omega_{\lambda_3}(z)+W_{\lambda_3}(z)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}U\right)\right]_L=g_1(t),$$

$$\mathrm{Re}\left[exp\left(-\omega_{\lambda_2}(z)+W_{\lambda_2}(z)\right)\left(\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}\right)U\right]_L=g_2(t),$$

$$\mathrm{Re}\left[exp\left(-\omega_{\lambda_1}(z)+W_{\lambda_1}(z)\right)U\right]_L=g_3(t); \qquad D_6)$$

где $g_k(t)$, $k=\overline{1,3}$ непрерывные функции точек контура Нетрудно видеть, что задача (2) эквивалентна следующей задаче:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_3(z)}{r^n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_2(z)}{r^n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\frac{\lambda_1(z)}{r^n}\right)U=\frac{f(z)-\left[A(z)\frac{\partial U}{\partial\overline{z}}+B(z)U(z)\right]}{r^{3n}}, \qquad (8)$$

где $A(z)=r^{2n-1}A_1(z), B(z)=r^{n-1}B_1(z)$, причем

$$A_1(z)=\left[-ne^{i\theta}2^{-1}(2\lambda_1(z)+\lambda_2(z)+r(2\frac{\partial\lambda_1(z)}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial\lambda_2(z)}{\partial\overline{z}}\right],$$

$$B_1(z)=\left[|z|^{n+1}\frac{\partial^2\lambda_1(z)}{\partial\overline{z}^2}-|z|^n ne^{i\theta}\frac{\partial\lambda_1(z)}{\partial\overline{z}}+|z|^{n-1}2^{-2}n(n+2)e^{i2\theta}\lambda_1(z)\right]+$$

$$+|z|\left[\lambda_1(z)\frac{\partial\lambda_2(z)}{\partial\overline{z}}+(\lambda_2(z)+\lambda_3(z))\frac{\partial\lambda_1(z)}{\partial\overline{z}}\right]+e^{i\theta}\lambda_1(z)(\lambda_2(z)-2^{-1}\lambda_3(z)).$$

$(B_1(z)=0)$.

Введем следующие обозначения:

$$W_{\lambda_1-\lambda_2}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{e^{i\theta}\left[(\lambda^0{}_1(\varsigma)-\lambda_2(\varsigma))-(\lambda_1(0)-\lambda_2(0))\right]}{(\varsigma-z)|\varsigma|^n}d\varsigma,$$

$$W_{\lambda_1-\lambda_2}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{e^{i\theta}\left[(\lambda^0{}_1(\varsigma)-\lambda_2(\varsigma))-(\lambda_1(0)-\lambda_2(0))\right]}{(\varsigma-z)|\varsigma|^n}d\varsigma,$$

$$F_{\lambda_1-\lambda_2}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[\omega_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)-W_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)\right]}{\varsigma-z}d\varsigma.$$

Будем предполагать, что в окрестности начала $z=0$ координат выполняются условия:

$$\left|\lambda_j^0(z)-\lambda_j^0(0)\right|\le H_j|z|^{\gamma_j},\gamma_j>n-1,1\le j\le 3; \tag{9}$$

$$\mathrm{Re}\left[(\lambda^0{}_1(z)-\lambda^0{}_2(0))\right]>0; \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}\left[(\lambda_3^0(0)-\lambda_2^0(0)\right]>0; \tag{11}$$

$$\exp\left[(-\omega_3(z)\right]r^{-3n}f(z)\in Lp(D),p>2 \tag{12}$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 8** *Пусть в уравнении (2) коэффициенты $a_0(z).b_0(z),c_0(z)\in C^2(D_0)$ и ограничены в $\overline{D},n>1,d(z)=0$, а корни характеристического уравнения $\lambda_1(z),\lambda_2(z),\lambda_3(z)$ различны и удовлетворяют условиям (9),причем $\lambda_j(z),1\le j\le 3$ таковы, что имеют место равенства $A_1(z)=0,\ B_1(z)=0\forall z\in\overline{D}$). Пусть, кроме того, выполнены условия (9)-(12). Тогда любое решение уравнения (2) из класса $C^3(D)$ представимо в виде*

$$U(z)=\exp\left[\omega_{\lambda_1}(z)-W_{\lambda_1}(z)\right]\left\{\Phi_3(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\exp\left[\omega_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)-W_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)\right]\frac{\Phi_2(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\exp\left[\omega_{\lambda_3}(\varsigma)-\omega_{\lambda_2}(\varsigma)+W_{\lambda_2}(\varsigma)-W_{\lambda_3}(\varsigma)\right]\frac{F_{\lambda_1-\lambda_2}(z)-F_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)}{\varsigma-z}\Phi_1(\varsigma)d\varsigma-$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{\exp\left[W_{\lambda_3}(t)-\omega_{\lambda_3}(t)\right]}{(t-z)|t|^{3n}}\left[F_{\lambda_1-\lambda_2\lambda_3}(z)-F_{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_3}(t)\right]f(t)dt\right\}, \tag{13}$$

*где обозначено:*

$$F_{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_3}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{F_{\lambda_1-\lambda_2}(z)-F_{\lambda_1-\lambda_2}(\varsigma)}{(\varsigma-z)}\exp\left[\omega_{\lambda_3}(\varsigma)-\omega_{\lambda_2}(\varsigma)+W_{\lambda_2}(z)\right]d\varsigma,$$

*а $\Phi_j(z)(j=1,2,3)-$ произвольные аналитические функции комплексного переменного $z$.*

**Теорема 9** *Пусть в системе (2) $n > 1$ и коэффициенты уравнения $a(z), b(z), c(z), d(z)$ и его правая часть $f(z)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 9. Тогда интегральное представление (13) обратимо. Соответствующие аналитические функции $\Phi_j(z), j = \overline{1,3}$ находятся однозначно в области через значения $U(z), \frac{\partial U}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial^2 U}{\partial \overline{z}^2}$ при помощи формул*

$$\Phi_3(z) = \exp\left[-\omega_{\lambda_3}(z) + W_{\lambda_3}(z)\right]\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda_2(z)}{r^n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda_1(z)}{r^n}\right)U +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\exp\left[-\omega_{\lambda_3}(t_1) + W_{\lambda_3}(t_1)\right]f(t_1)dt_1}{(t_1 - z)|t_1|^{2n}}. \qquad (14)$$

$$\Phi_2(z) = \exp\left[-\omega_{\lambda 2}(z) + W_{\lambda_2}(z)\right]\left[\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda_2(z)}{r^n}U\right] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\exp\left[W_{\lambda 2}(\zeta) - \omega_{\lambda_2}(\zeta)\right]}{(\zeta - z)}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial \overline{\varsigma}} - \frac{\lambda_2}{\rho^n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{\varsigma}} - \frac{\lambda_1}{\rho^n}\right)U d\zeta. \qquad 15)$$

$$\Phi_1(z) = \exp\left[-\omega_{\lambda_1}(z) + W_{\lambda_1}(z)\right]U(z, \overline{z}) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\exp\left[-\omega_{\lambda_1}(\zeta) + W_{\lambda_1}(\zeta)\right]}{\zeta - z}\left(\frac{\partial U}{\partial \overline{\zeta}} - \frac{\lambda_1}{\rho^n}U\right)d\zeta. \qquad (16)$$

**Теорема 10** *Пусть выполнены все условия теоремы 8 и условия задачи . Тогда задача $(D_6)$ всегда разрешима и ее решение содержит три произвольные постоянные, которое даются формулой (13).*

## Литература


1. А. В. Бицадзе. Некоторые классы уравнений в частных производных. М "Наука 1981; -448 с.

2. А.П. Солдатов. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости. Изв. РАН т.70,№6,2006.с.161-192.

3. Л.Г. Михайлов. Новый класс особых интегральных уравнений и его приминение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе. Изд. АН Тадж. ССР,1963.

4. З.Д. Усманов. Обобщенные системы Коши-Римана с снгулярной точкой. Душанбе.Изд. АН Тадж. ССР,1993.

5. З.Д. Усманов. Связь многообразий решений обобщенных систем Коши- Римана. Математические заметки.1999г.№5.с301-307.

6. З.Д. Усманов, А.Л. Гончаров, С.Б. Климентов. Аналог теоремы Лиувилля для одного класса систем типа Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Владикавказский математический журнал,2005,вып.4.с.4-16.

## THE DIRICHLET AND HILBERT TYPE PROBLEMS FOR SECOND AND THIRD ORDER LINEAR ELLIPTIC SYSTEMS WITH INTERIOR SUPERSINGULAR POINT

**A.B. Rasulov**

Moscow Energy Institute,
Krasnokazarmennaya str., 14, Moscow, 111250, Russia, e-mail: rasulov-abdu@rambler.ru

**Abstract.** This paper is devoted to the integral representations and its inversions formulas for second and third order linear elliptic systems with interior supersingular point. The obtained integral representations can be applied to examination of an asymptotical solution behavior for $r = |z| \to 0$ and solution boundary value problems.

**Keywords:** elliptic systems, integral representations, supersingular point, boundary value problems.