УДК 517.983

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Х.К. Авад

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Аннотация. Доказывается разрешимость в банаховом пространстве интегрального уравнения, к которому сводится задача Коши для дифференциального уравнения дробного порядка с переменным оператором.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения дробного порядка, интегральное уравнение типа Вольтерра, функция Райта.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве E

$$D^{\alpha}_{\tau,t}u(t) = A(t)u(t), \quad t \in (\tau, b], \ \tau \geq 0\,, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to\tau} D^{\alpha-1}_{\tau,t}u(t) = u_0\,, \tag{2}$$

где $D^{\alpha-1}_{\tau,t}u(t) = I^{1-\alpha}_{\tau,t}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int\limits_{\tau}^{t}(t-s)^{-\alpha}u(s)\,ds$ – левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$, $0<\alpha<1$, $0 \leq \tau \leq t$, $D^{\alpha}_{\tau,t}u(t) = \dfrac{d}{dt}I^{1-\alpha}_{\tau,t}u(t)$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $A(t)$ – линейный, замкнутый оператор.

Условие 1.

a) Линейный оператор $A(t)$ при каждом $t \in [0,b]$ имеет плотную в E и независящую от t область определения D.

b) При любом λ с $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ оператор $\lambda I - A(t)$ имеет ограниченный обратный, причем

$$\left\|(\lambda I - A(t))^{-1}\right\| \leq \frac{M_1}{1+|\lambda|}, \quad M_1 > 0. \tag{3}$$

c) Кроме того, для любых $t, \tau, s \in [0,b]$ справедливо неравенство

$$\left\|(A(t) - A(\tau))A^{-1}(s)\right\| \leq M_2\,|t-\tau|^{\gamma}, \quad M_2 > 0, \ \gamma \in (0,1]. \tag{4}$$

Из условия (3) вытекает (см. [1]), что оператор $A(t)$ при $\tau \geq 0$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $e^{\tau A(t)}$ и

$$\left\|e^{\tau A(t)}\right\| \leq M_3\, e^{-\delta\tau}\,, \quad M_3 > 0,\ \delta > 0\,. \tag{5}$$

В дальнейшем нами будет использована неотрицательная функция (см. [2], с.357)

$$f_{\tau,\nu}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\left(tz - \tau z^{\nu}\right)\, dz, \quad t \geqslant 0, \\[2ex] 0, \quad t < 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\sigma > 0$, $\tau > 0$, $0 < \nu < 1$ и ветвь функции z^{ν} выбрана так, что $\operatorname{Re} z^{\nu} > 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (6) обеспечивается множителем $\exp\left(-\tau z^{\nu}\right)$.

Заметим также, что функция $f_{\tau,\nu}(t)$ при $t > 0$ может быть выражена через функцию Райта (см. [3], с.54])

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1}\phi\left(-\nu, 0; -\tau t^{-\nu}\right), \qquad \phi(a,b;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\ \Gamma(ak+b)},$$

или через более общую функцию типа Райта (см. [4], гл. 1])

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1}e^{1,0}_{1,\nu}\left(-\tau t^{-\nu}\right),\ e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)\ \Gamma(\delta-\beta k)},\ \alpha > \max\{0;\beta\},\ \mu, z \in C. \tag{7}$$

Отметим, что для функции Райта справедливо неравенство (см. [4], лемма 1.2.7)

$$\phi(-\nu, 0; -x) \leq M_4\left(1 + x^n\right)\exp\left(-\rho x^{1/(1-\nu)}\right)\,, \tag{8}$$

$$n \in \boldsymbol{N}\,, \quad n \geq \frac{1}{1-\nu}, \quad \rho = (1-\nu)\nu^{\nu/(1-\nu)},\ \ x \geq 0\,.$$

Введем в рассмотрение операторную функцию

$$T_\alpha(t-\tau; A(\tau)) = \int\limits_0^{\infty} f_{\xi,\alpha}(t-\tau)\ e^{\xi A(\tau)}\ d\xi\,. \tag{9}$$

При решении задачи (1), (2) методом Соболевского-Танабе [1] устанавливается, что ее разрешающий оператор $U_\alpha(t,\tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$U_\alpha(t,\tau) - T_\alpha(t-\tau; A(\tau)) = \int\limits_\tau^t U_\alpha(t,s)\ (A(s) - A(\tau))T_\alpha(s-\tau; A(\tau))\ ds\,. \tag{10}$$

При сделанных предположениях на оператор $A(t)$ и $u_0 \in D$ доказывается, что интегральное уравнение (10) разрешимо, а $u(t) = U_\alpha(t,\tau)u_0$ – единственное решение задачи (1), (2), для которого функция $I^{1-\alpha}_{\tau,t}u(t)$ сильно непрерывно дифференцируема при $t > \tau$.

Прежде чем переходить к решению интегрального уравнения (10), установим следующую лемму.

Лемма. *Пусть выполнено условие 1, тогда для определяемой равенством (9) операторной функции $T_\alpha(t-\tau;A(\tau))$ справедливы оценки*

$$\|T_\alpha(t-\tau;A(\tau))\| \le M_6(t-\tau)^{\alpha-1}\,, \tag{11}$$

$$\|A(\tau)T_\alpha(t-\tau;A(\tau))\| \le M_7(t-\tau)^{-1}\,. \tag{12}$$

□ Учитывая оценку (5) и равенство (2.2.31) [4], получим

$$\|T_\alpha(t-\tau;A(\tau))\| \le \int\limits_0^\infty f_{\xi,\alpha}(t-\tau)\ \|e^{\xi A(\tau)}\|\ d\xi \le$$

$$\le M_3 \int\limits_0^\infty f_{\xi,\alpha}(t-\tau)\ e^{-\delta\xi}\ d\xi = M_3(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\delta(t-\tau)^\alpha\right) \le M_6\ (t-\tau)^{\alpha-1}\,,$$

где $E_{\mu,\rho}(z) = \sum\limits_{k=0}^\infty \dfrac{z^k}{\Gamma(\mu k+\rho)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера. Неравенство (11) тем самым установлено, и мы переходим к доказательству неравенства (12).

Используя определение функции $f_{\xi,\alpha}(t-\tau)$ и ее асимптотику (8), интегрируя по частям, получим

$$A(\tau)T_\alpha(t-\tau;A(\tau)) = \int\limits_0^\infty f_{\xi,\alpha}(t-\tau)\ A(\tau)\ e^{\xi A(\tau)}\ d\xi = \int\limits_0^\infty f_{\xi,\alpha}(t-\tau)\ \frac{d}{d\xi}\ e^{\xi A(\tau)}\ d\xi =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\xi}\left(f_{\xi,\alpha}(t-\tau)\right)\ e^{\xi A(\tau)}\ d\xi\,. \tag{13}$$

Для производной функции типа Райта справедливо представление (см. [2], с. 362)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}f_{\xi,\alpha}(t-\tau) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(((t-\tau)r+\xi r^\alpha)\cos\theta_\alpha\right)\ \sin((t-\tau)r-\xi r^\alpha\sin\theta_\alpha)\ r^\alpha\ dr\,, \tag{14}$$

где $\theta_\alpha = \dfrac{\pi}{1+\alpha} > \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\theta_\alpha < 0$.

Из (13), (14) и (5) после элементарных преобразований будем иметь

$$\|A(\tau)T_\alpha(t-\tau;A(\tau))\| \le \frac{M_3}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left((t-\tau)r\cos\theta_\alpha\right)\, r^\alpha\, dr \int\limits_0^\infty \exp\left(\xi r^\alpha \cos\theta_\alpha - \delta\xi\right)\, d\xi =$$

$$= \frac{M_3}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left((t-\tau)r\cos\theta_\alpha\right)\, \frac{r^\alpha}{\delta - r^\alpha\cos\theta_\alpha}\, dr \le M\int\limits_0^\infty \exp\left((t-\tau)r\cos\theta_\alpha\right)\, dr = \frac{M_7}{t-\tau},$$

и оценка (12), а вместе с нею и лемма также доказаны. ■

Считая выполненным условие 1, будем решать методом последовательных приближений интегральное уравнение (10). Получим

$$U_\alpha(t,\tau) = \sum_{k=0}^\infty U_{\alpha,k}(t,\tau)\,, \tag{15}$$

где

$$U_{\alpha,0}(t,\tau) = T_\alpha(t-\tau;A(\tau)),$$

$$U_{\alpha,k+1}(t,\tau) = \int\limits_\tau^t U_{\alpha,k}(t,s)(A(s)-A(\tau))T_\alpha(s-\tau;A(\tau))\, ds\,. \tag{16}$$

Покажем, что

$$U_{\alpha,k}(t,\tau) = \int\limits_\tau^t T_\alpha(t-s;A(s))\Phi_k(s,\tau)\, ds, \quad k=1,\ 2, ..., \tag{17}$$

где $\Phi_1(t,\tau) = (A(t)-A(\tau))T_\alpha(t-\tau;A(\tau))$, а

$$\Phi_{k+1}(t,\tau) = \int\limits_\tau^t \Phi_k(t,s)\Phi_1(s,\tau)\, ds\,. \tag{18}$$

Действительно, это верно для $k=1$. Если это верно для $k=n$, то, в силу (16),

$$U_{\alpha,n+1}(t,\tau) = \int\limits_\tau^t U_{\alpha,n}(t,s)(A(s)-A(\tau))T_\alpha(s-\tau;A(\tau))\, ds =$$

$$= \int\limits_\tau^t \left(\int\limits_s^t T_\alpha(t-\xi;A(\xi))\Phi_n(\xi,s)\, d\xi\right)\Phi_1(s,\tau)\, ds\,.$$

Поменяв порядок интегрирования и учитывая (18), получим

$$U_{\alpha,n+1}(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}T_{\alpha}(t-\xi;A(\xi))\left(\int_{\tau}^{\xi}\Phi_n(\xi,s)\Phi_1(s,\tau)\,ds\right)\,d\xi=$$

$$=\int_{\tau}^{t}T_{\alpha}(t-\xi;A(\xi))\Phi_{n+1}(\xi,\tau)\,d\xi\,.$$

Следовательно, формула (17) справедлива при любом k. Положим

$$\Phi(t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t,\tau).$$

Легко видеть, что, в силу (18), этот оператор удовлетворяет уравнению

$$\Phi(t,\tau)=\Phi_1(t,\tau)+\int_{\tau}^{t}\Phi(t,s)\Phi_1(s,\tau)\,ds \tag{19}$$

и

$$U_{\alpha}(t,\tau)=T_{\alpha}(t-\tau;A(\tau))+\int_{\tau}^{t}T_{\alpha}(t-s;A(s))\Phi(s,\tau)\,ds\,. \tag{20}$$

Пример. Примером оператора $A(t)$, удовлетворяющего условию 1, служит оператор

$$A(t)u(t,x)=\sum_{i,j=1}^{m}a_{i,j}(t,x)\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}a_i(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}+a(t,x)u(t,x)\,,$$

область определения D которого состоит из всех функций пространства $W_p^2(\Omega)$, обращающихся на границе в нуль, $E=L_p(\Omega)$, $p>1$.

Предположим, что функции $a_{i,j}(t,x)$ непрерывно дифференцируемы по x, а все функции $\dfrac{\partial a_{i,j}(t,x)}{\partial x_m}$, $a_i(t,x)$, $a(t,x)$ непрерывны по совокупности переменных при $t\in[0,T]$ и $x\in\overline{\Omega}$. Пусть также все функции $a_{i,j}(t,x)$, $a_i(t,x)$, $a(t,x)$ удовлетворяют по t условию Гёльдера с показателем $\gamma>0$ и константой Гёльдера, не зависящей от x. Кроме того, $a_{i,j}(t,x)=\overline{a_{j,i}(t,x)}$ и для любых $\xi\in R^m$

$$-\sum_{i,j=1}^{m}a_{i,j}(t,x)\xi_i\overline{\xi_j}\ge\varepsilon\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^2,\quad \varepsilon>0\,.$$

Пусть, наконец, $\mathrm{Re}\,a(t,x)\ge a_0>0$, где a_0 – достаточно большая постоянная.

Из перечисленных условий вытекает (см. [1]), что оператор $A(t)$ удовлетворяет условию 1.

Литература

1. Соболевский П.Е. Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах // Тр.Моск. матем. общ. – 1961. – 10. – С.297-350.

2. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967.

3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations / A.A Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo J.J. – Elsevier, 2006.

4. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / А.В. Псху. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2005.

ON THE SOLVABILITY OF AN INTEGRAL EQUATION IN THE BANACH SPACE

H.K. Awad

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

Abstract. The solvability of integral equation in Banach space which reduces the Cauchy problem of fractional order differential equations with variable operator is proved.

Key words: fractional order differential equations, Volterra integral equation, Wright function.