УДК 621.396

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ТРАЕКТОРИЙ ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Ю.П. Вирченко,[1] **А.С. Мазманишвили**[2]

[1] Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
[2] Сумской государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2 , г. Сумы,40007, Украина, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

Изучается задача вычисления плотности $p(\varepsilon)$ распределения вероятностей случайных значений квадратичного функционала от траекторий многомерного случайного процесса Орнштейна-Уленбека в $\mathbb{C}^d$. Получено представление этой плотности распределения в виде разложения по экспоненциальным функциям $\exp(-\lambda_n\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ – спектр собственных значений корреляционного оператора этого процесса. Оно генерируется представлением плотности $p(\varepsilon)$ в виде бесконечной последовательности свёрток экспоненциальных распределений.

Ключевые слова: процесс Орнштейна-Уленбека, корреляционный оператор, квадратичный функционал, разложение Адамара, экспоненциальное разложение.

1. Введение

Рассмотрим следующую задачу. Пусть векторный процесс Орнштейна-Уленбека определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dz(t) \;=\; Az(t)dt + dw(t)\,, \tag{1}$$

где процесс $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ принимает значения в $\mathbb{C}^d$; A — диссипативная $d \times d$ матрица; $w(t)$ — d-мерный комплекснозначный винеровский процесс с вещественной и симметричной ковариационной $d \times d$–матрицей D, т.е.

$$\langle w(t) \otimes w(t)\rangle \;=\; D\min(t, t')\,. \tag{2}$$

Пусть, кроме того, задан положительно определенный квадратичный функционал

$$J_{\mathrm{T}}[z] \;=\; \int\limits_0^T (z(t), Vz(t))dt\,, \tag{3}$$

где V — заданная самосопряженная, неотрицательная $d \times d$-матрица; $V^+ = V$ (здесь и ниже знак $^+$ означает эрмитовское сопряжение); T — действительный положительный параметр, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$.

Введём в рассмотрение распределение вероятностей случайных значений функционала $J_{\mathrm{T}}[z]$

$$\mathrm{P}(\varepsilon) \;=\; \Pr\{z(t)\;:\; J_{\mathrm{T}}[z] \le \varepsilon\} \tag{4}$$

от траекторий $z(t)$, которое зависит от T и матриц A, D, V. Это распределение, очевидным образом, обладает плотностью $p(\varepsilon)$. Настоящая работа посвящена изучению плотности $p(\varepsilon)$, а именно, получению представления этой плотности в виде следующего разложения

$$p(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp\left(-\lambda_m\right) ,$$

$\langle \lambda_m > 0; m \in \mathbb{N} \rangle$ – неограниченно возрастающая, неубывающая последовательность, $\langle a_m \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{N} \rangle$ с $a_1 > 0$. Это разложение сходится при любом положительном ε, причём оно сходится равномерно на полуоси $[\delta, \infty)$ при $\delta > 0$.

Уточним смысл математических объектов, определяющих постановку задачи. Символом $\langle . \rangle$ ниже мы обозначаем математическое ожидание по вероятностной мере случайного процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R} \rangle$.

Комплекснозначный гауссовский процесс $\langle z(t); t \in \mathbb{R} \rangle$ как функционал вида $z(t) = x(t) + iy(t)$ от траекторий пары гауссовских процессов $\langle \langle x(t); t \in \mathbb{R} \rangle, \langle y(t); t \in \mathbb{R} \rangle \rangle$, если для любой непрерывной, финитной комплекснозначной вектор-функции $v(s)$, $s \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение (все интегрирования, в которых не указаны пределы, выполняются по $\mathbb{R}$)

$$\left\langle \exp\left\{ i \,\mathrm{Re} \int (v(s), z(s))\, ds \right\} \right\rangle =$$

$$= \exp\left\{ i \,\mathrm{Re} \int (v(s), \langle z(s) \rangle)\, ds \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{4} \int ds \int (v(s), G(s,s')v(s'), v(s))\, ds' \right\} ,$$

где комплекснозначная матриц-функция

$$G(t,t') \;=\; \frac{1}{2} \Big\langle (z(s) - \langle z(s) \rangle) \otimes (z^*(s') - \langle z^*(s') \rangle) \Big\rangle , \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

значениями которой являются комплексные $d \times d$-матрицы.

Отметим, что $G^+(t,t') = G(t',t)$ при $t, t' \in \mathbb{R}$ и, следовательно, интеграл

$$\int ds \int (v(s), G(s,s')v(s'))ds'$$

вещественен и неотрицателен.

Для комплекснозначных гауссовских процессов математические ожидания

$$A(t_1, \ldots, t_n; t'_1, \ldots, t'_{n'}) \;\equiv$$

$$\equiv\; \langle (z(t_1) - \langle z(t_1) \rangle) \otimes \ldots \otimes (z(t_n) - \langle z(t_n) \rangle) \otimes$$

$$\otimes (z^*(t'_1) - \langle z^*(t'_1) \rangle) \otimes \ldots \otimes (z^*(t'_{n'}) - \langle z^*(t'_{n'}) \rangle) \rangle .$$

отличны от нуля, только если $n = n'$, и при этом справедливо правило Вика [2]

$$A(t_1, \ldots, t_n; t'_1, \ldots, t'_{n'}) \;=\; \sum_{\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n} \prod_{j=1}^{n} 2G(t_j, t_{\mathsf{P}j}) ,$$

где суммирование выполняется по всем элементам P группы перестановок $\mathbb{P}_n$ набора $\{1, \ldots, n\}$.

Комплекснозначным винеровским процессом $\langle w(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ будем называть комплекснозначный гауссовский процесс, для траекторий $w(t)$ которого случайные процессы $\langle x(t) = \mathrm{Re}\, w(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ и $\langle y(t) = \mathrm{Im}\, w(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ – стохастически эквивалентные и независимые d-мерные винеровские процессы, начинающиеся в $x(0) = y(0) = 0$ и обладающие общей для них ковариационной $d \times d$-матрицей $D = D^+$, $\langle x(t) \otimes x(t')\rangle = \langle y(t) \otimes y(t')\rangle = \frac{1}{2} D \min(t, t')$. Эти свойства процессов $\langle x(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ и $\langle y(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ являются необходимыми для гауссовости процесса $\langle w(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$.

Мера стационарного процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ получается из меры случайного процесса $\langle z(t); t \in [t_0, \infty)\rangle$ – решения стохастического уравнения (1) с начальным условием $z(t_0) = z_0 \in \mathbb{C}$ предельным переходом $t_0 \to -\infty$. Эта мера не зависит от выбора начального значения z'.

Замечание 1 Распределение вероятностей для вещественного случайного процесса $\langle x(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ Орнштейна–Уленбека в пространстве $\mathbb{R}^d$, определяемого уравнением

$$dx(t) = Ax(t)\, dt + dw(t)$$

и вещественными матрицами A, D, V (A – гурвицева, а D, V – симметричны), нельзя получить из распределения вероятностей комплекснозначного процесса посредством стремления к нулю статистических характеристик процесса $\langle \mathrm{Im} z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, что, заведомо, бессмысленно, так как процессы $\langle x(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle y(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ связаны условием совпадения их статистических характеристик.

Однако, вещественный процесс $\langle x(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ можно комплексифицировать, вводя компекснозначный функционал $z(t) = x(t) + iy(t)$, где процесс $\langle y(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, стохастически эквивалентный процессу $\langle x(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ и стохастически независимый от него. Тогда имеется очевидная связь между характеристической функцией $Q(i\lambda; z)$ случайной величины (4) и характеристической функцией $Q(i\lambda; x)$ соответствующей вещественной случайной величины (точное определение см.(15)), а именно,

$$Q(i\lambda, z) \ = \ Q^2(i\lambda, x)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

Замечание 2 Стохастический дифференциал в (1) мы понимаем по Стратоновичу [3], поскольку, в отличие от дифференциала Ито, он более отвечает физической ситуации [4,5], описываемой конструкцией (1-4).

Замечание 3 Ниже, при вычислении характеристической функции

$$Q(i\lambda, z) = \langle \exp(-i\lambda J_{\mathrm{T}}[z])\rangle\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

неотрицательность матрицы V не используется. Требование неотрицательности этой матрицы продиктовано соображениями значимости этого случая для приложений.

Замечание 4 Так как траектории винеровского процесса непрерывны с вероятностью единица [6], то траектории процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ также непрерывны с той же вероятностью, поэтому интеграл в определении (3) можно понимать как обычный интеграл Римана. Действительно, уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению

$$z(t) = z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Az(s)ds + w(t)\,, \tag{6}$$

которое имеет единственное решение в $[C(0,T)]^{2d}$, в чем можно убедиться последовательными итерациями.

2. Предельная плотность стационарного процесса Орнштейна–Уленбека

Рассмотрим условную плотность $p(z, z_0; t)$ распределения вероятностей перехода из точки $z(t_0) = z_0$ в точку $z(t) = z$:

$$p(z, z_0; t) = \left[(2\pi)^d \det D(t)\right]^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(z - \mathrm{e}^{At} z_0\right), D^{-1}(t)\left(z - \mathrm{e}^{At} z_0\right)\right)\right\}, \qquad (7)$$

$$D(t) \;=\; \int_0^t \exp(As) D \exp(A^+ s) ds\,. \qquad (8)$$

Такое представление для плотности $p(z, z_0; t)$ предполагает, что $\det D(t) \neq 0$.

Лемма *Если для некоторого $t > 0$ имеет место $\det D(t) \neq 0$, то существует нетривиальное подпространство $H \subset \ker D$, инвариантное относительно A^+, и обратно, если такое подпространство существует, то для всех $t > 0$ выполняется $\det D(t) = 0$.*

□ Если $\det D(t) = 0$, то существует вектор z такой, что

$$(z, D(t)z) \;=\; \int_0^t \left(\exp(A^+ s) z, D \exp(A^+ s) z\right) ds = 0\,.$$

Поскольку $D \geq 0$ и, следовательно, $\exp(As) D \exp(A^+ s) \geq 0$, $(\exp(A^+ s)z, D\exp(A^+ s)z) = 0$. Это означает, что $\exp(A^+ s)z = 0$ при почти всех $s \in [0, t]$, а так как эта вектор-функция непрерывна по s, то равенство нулю имеет место при всех $s \in [0, t]$. В частности, при $s = 0$, $Dz = 0$, $z \in \ker D$, а также для любого натурального n, $D(A^+)^n z = 0$, $(A^+)^n z \in \ker D$. Тогда минимальное подпространство $H \subset \ker D$, натянутое на $(A^+)^n z$, $n \in \mathbb{N}$, инвариантно относительно A^+. Доказательство второй части леммы очевидно. ■

Наличие подпространства $H \in \ker D$, инвариантного относительно A^+, означает, что существует неособенная матрица W, действием которой в $\mathbb{C}^d$ можно представить уравнение (1) в виде двух несвязанных уравнений такого же типа во взаимно ортогональных пространствах H и $\bar{H}$. При этом уравнение в H уже не будет стохастическим. Таким образом, наличие подпространства H не изменяет наших дальнейших построений, так как его с помощью матрицы W можно исключить из рассмотрения. Однако такая процедура приводит к излишнему усложнению всех последующих построений. Конечный результат, как это будет видно ниже, не зависит от W. В связи с этим, далее будем пользоваться следующей регуляризацией задачи. Она состоит в таком изменении матриц A и D, которая обеспечивает отличие от нуля $\det D(t)$. В конце же вычислений, необходимо вернуться к первоначальным значениям этих матриц.

Утверждение 1 *Плотность распределения вероятностей (ПРВ)*

$$(2\pi)^{-d} (\det M)^{-d} \exp\left\{-\frac{1}{2}((z - Lz'), M^{-1}(z - Lz'))\right\} \qquad (9)$$

непрерывно зависит от матриц L и M и имеет слабый предел при $\det M \to 0$.

□ Доказательству подлежит только вторая часть утверждения. Если $M \to M_0$, $\det M_0 = 0$ и $H = \ker M_0$, то, в смысле вычисления математического ожидания любой непрерывной функции $f(z)$ случайной величины z, плотность (9) стремится к

$$(2\pi)^{-d+\dim H}(\det \bar{M}_0)^{-1}\delta\left(P_H(z - Lz')\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(P_{\bar{H}}(z - Lz'), \bar{M}_0^{-1}P_{\bar{H}}(z - Lz')\right)\right\}, \qquad (10)$$

где P_H – проектор на H и $\bar{M}_0$ – сужение оператора M_0 на $\bar{H}$, $\delta(\cdot)$ – обобщённая функция Дирака. ■

Дадим теперь ответ на вопрос, поставленный в начале раздела. Для этого рассмотрим ПРВ (7) в регуляризованном случае, когда $\det D(t) \neq 0$.

Утверждение 2 *Для существования предела $p(z, z'; t)$ при $t \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы матрица A^+ была диссипативной. Это означает, что в жордановом каноническом представлении оператора A диагональные элементы имеют отрицательную реальную часть.*

□ Необходимо, чтобы существовал $\lim \exp(A^+t)\, z$, $t \to \infty$, для всех векторов z. Из представления Данфорда [7] $A^+ = B + N$, $[B, N] = 0$, где B – оператор скалярного типа, N – нильпотентный оператор, немедленно следует, что

$$\exp(A^+t) = \exp(Bt) \cdot \mathcal{P}(t)\,,$$

где $\mathcal{P}(t)$ – полином от t. В связи с этим, собственные числа μ_i, $i = 1 \div d$ матрицы B должны иметь отрицательную реальную часть. Кроме того, из $\operatorname{Re}\mu_i < 0$, $i = 1 \div d$ следует существование предела $\lim\limits_{t\to\infty} D(t)$.

3. Корреляционная функция процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$

Заметим, что построенный в предыдущем разделе стационарный процесс – гауссовский, так как он является пределом при $t \to -\infty$ последовательности гауссовских процессов $\langle z(t, t_0); t \in [t_0, \infty]\rangle$, определенных уравнением (1) и фиксированным начальным условием $z(t_0) = z_0$, которое статистически не зависит от $w(t)$. Гауссовость процессов из этой последовательности устанавливается вычислением характеристического функционала

$$G[v(t)] = \left\langle \left\{ i \operatorname{Re} \int_{t_0}^{t} (v(s), z(s))\, ds \right\} \right\rangle, \qquad (11)$$

где $v(s)$ – произвольная финитная непрерывная функция на $s \in [t_0, t]$ со значениями в $\mathbb{C}^d$. Подстановка в (11) решения уравнения (1) даёт

$$G[(v(t)] = \exp\left\{ i \int_{t_0}^{t} \left(\exp[(s - t_0)A]v(s),\, z(t_0)\right) ds \right\} G'\,,$$

а математическое ожидание G' имеет вид

$$G' = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\sum_{\alpha}\left|\int_{s'}^{t}\left(v(s)\mathrm{e}^{A(s-s')}\right)_{\alpha}ds\right|^2 ds'\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}ds_1\int_{t_0}^{t}(v(s_1), g(s_1,s_2)v(s_2))ds_2\right\}, \qquad (12)$$

при этом матричное ядро $g(s_1, s_2)$ определяется формулой

$$g(s_1,s_2) = \int_{\min(s_1,s_2)}^{t} \exp[A(s_1-s')]\,\exp[A^+(s_2-s')]ds'\,.$$

Гауссовость $\langle z(t,t_0); t\in[t_0,\infty)\rangle$ непосредственно видна из (12).

Найдем теперь корреляционную функцию $K_{\alpha\beta}(t,t') = \langle z_\alpha(t) z^*_\beta(t')\rangle$, которая, вследствие гауссовости процесса $\langle z(t); t\in\mathbb{R}\rangle$, полностью его определяет.

Утверждение 3 *Корреляционная функция $K_{\alpha\beta}(t,t')$ определяется формулой*

$$K_{\alpha\beta}(t,t') = \theta(t-t')\left(\mathrm{e}^{A(t-t')}K\right)_{\alpha\beta} + \theta(t'-t)\left(K\mathrm{e}^{A^+(t'-t)}\right)_{\alpha\beta}, \qquad (13)$$

где $\alpha,\beta = 1\div d$; $\theta(t)$ – функция Хевисайда; матрица K удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова

$$AK + KA^+ = -D\,. \qquad (14)$$

□ Согласно определению, дифференциал Стратоновича

$$\langle z_\alpha(t)\,dw^*_\beta(t)\rangle = \frac{1}{2}D_{\alpha\beta}dt\,.$$

Поэтому независящая от t (в силу стационарности процесса $\langle z_\alpha(s); s\in\mathbb{R}\rangle$) матрица $K_{\alpha\beta}(t,t) \equiv K_{\alpha\beta}$ может быть вычислена на основе уравнения (1)

$$\langle z_\alpha(t)(Az(t))^*_\beta\,dt\rangle + \langle (Az(t))_\alpha z^*_\beta(t)\,dt\rangle +$$

$$= \langle z_\alpha(t)\,dw^*_\beta(t)\rangle + \langle dw_\alpha(t)\,z^*_\beta(t)\rangle =$$

$$= \langle z_\alpha(t)\,dz^*_\beta(t)\rangle + \langle dz_\alpha(t)\,z^*_\beta(t)\rangle = 0\,,$$

что эквивалентно уравнению (14). Наконец, усредняя уравнение (1), умноженное на $z^*(t')$, получаем (при $t>t'$)

$$\frac{d}{dt}K_{\alpha\beta}(t,t') = A_{\alpha\gamma}K_{\gamma\beta}(t,t')\,,$$

так как при $t>t'$ благодаря статистической независимости $\langle dw_\alpha(t) z^*_\beta(t')\rangle = 0$. Отсюда следует часть утверждения (3) при $t>t'$. Случай $t<t'$ рассматривается аналогично. ■

Замечание 5 Ввиду диссипативности матрицы A, уравнение (14) имеет единственное решение, так как в этом случае из него вытекает следующее интегральное представление для матрицы K

$$K = \int_0^\infty \exp(At) D \exp(A^+ t) dt\,,$$

которое показывает, что $K^+ = K$, и поскольку K является пределом при $t \to \infty$ монотонно возрастающей матричной функции $D(t)$ (см. (8)), то $\det K \neq 0$.

4. Производящая функция $Q(\lambda, z)$ функционала $J_{\mathrm{T}}[z]$

Целью настоящего раздела будет вычисление следующего математического ожидания

$$Q(\lambda, z) = \left\langle \exp\left(-\lambda J_{\mathrm{T}}[z]\right) \right\rangle. \tag{15}$$

Вычисление производящей функции $Q(\lambda, z)$ осуществим, методом Карунена-Лоэва [6,8], который основан на следующем утверждении.

Теорема (Карунен–Лоэв)

Пусть $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ — стационарный гауссовский процесс со значениями в $\mathbb{C}^d$ и $K_{\alpha\beta}(t, t')$, $\alpha, \beta = 1 \div d$, $t, t' \in \mathbb{R}$ суть его корреляционная функция; $e_n(t)$ — неслучайные собственные вектор-функции интегрального оператора с матриц-ядром $K_{\alpha\beta}(t, t')$ и λ_n – соответствующие им собственные числа;

$$e_n(t) \;=\; \lambda_n \int_0^T K(t, t')\, e_n(t') dt'\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{16}$$

Тогда для случайных траекторий $z(t)$ процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ справедливо сходящееся с вероятностью единица разложение Фурье

$$z(t) \;=\; \sum_{n=1}^\infty z_n e_n(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{17}$$

где случайные коэффициенты z_n – комплексные статистически независимые величины такие, что каждая из них имеет плотность распределения вероятностей

$$\rho_n(z_n) \;=\; \left(\frac{\lambda_n}{2\pi}\right) \exp\left(-\lambda_n |z_n|^2/2\right)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{18}$$

Сформулированное утверждение справедливо тогда, когда отсутствуют нулевые собственные функции $e_m(t)$, для которых

$$\int_0^T K(t, t')\, e_m(t')\, dt' \;=\; 0\,,$$

так как в противном случае необходимо положить $\lambda_m = \infty$ и $\rho_m(z_m) = \delta(z_m)$. Можно показать, что для ядра (13) указанное условие сводится к требованию отсутствия нетривиального подпространства $H \subset \ker D$, $H = \mathrm{inv} A^+$, либо, что эквивалентно, $\ker K = 0$.

Последнее условие в дальнейшем будем предполагать выполненным. В противном случае, всегда можно добиться его выполнимости посредством регуляризации распределения вероятностей случайного процесса $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$.

Доказательство теоремы приведено в [6].

Воспользовавшись функциями

$$p_n(t) \;=\; \int\limits_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} K e_n(s)\, ds\,, \qquad q_n(t) \;=\; \int\limits_t^T \mathrm{e}^{A^+(s-t)} e_n(s)\, ds\,, \tag{19}$$

уравнение (16) с ядром (13) запишем в виде

$$e_n(t) \;=\; \lambda_n \left(p_n(t) + K q_n(t) \right)\,.$$

С помощью этого соотношения и определения (19) найдем дифференциальное уравнение для вектора $\langle p_n(t), q_n(t)\rangle$ в пространстве $\mathbb{C}^{2d}$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_n(t) \\ q_n(t) \end{pmatrix} \;=\; H \begin{pmatrix} p_n(t) \\ q_n(t) \end{pmatrix}\,, \tag{20}$$

при этом оператор H в $\mathbb{C}^{2d}$ имеет следующую матричную структуру:

$$H \;=\; \begin{pmatrix} A + \lambda_n K & \lambda_n K^2 \\ -\lambda_n & -A^+ - \lambda_n K \end{pmatrix}\,. \tag{21}$$

Здесь в блоках матрицы H указаны операторы, действующие в $\mathbb{C}^d$. Кроме того, функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$ удовлетворяют, вследствие определения (19), граничным условиям

$$p_n(0) \;=\; 0\,, \qquad\qquad q_n(T) \;=\; 0\,. \tag{22}$$

Легко видеть, что задача об определении собственных чисел и собственных функций, отвечающих ядру (13), при связи (19), эквивалентна решению краевой задачи (20)–(22). Решение этой краевой задачи выражается в терминах матрицы $\exp(Ht)$ и поэтому, ввиду (22),

$$\begin{pmatrix} p_n(t) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \exp(Ht)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q_n(0) \end{pmatrix}\,. \tag{23}$$

Представим теперь $\exp(Ht)$ в виде

$$\exp(Ht) = \begin{pmatrix} E_1(\lambda_n, t) & E_2(\lambda_n, t) \\ E_3(\lambda_n, t) & E_4(\lambda_n, t) \end{pmatrix}\,, \tag{24}$$

где $E_k(\lambda, t)$, $k = 1, 2, 3, 4$ – операторы, действующие в $\mathbb{C}^d$ и функционально зависимые от параметров λ и t. Тогда для существования нетривиального решения краевой задачи при фиксированном λ, необходимо и достаточно существование нетривиального решения однородного уравнения

$$E_4(\lambda, t)\, q_n(0) \;=\; 0\,, \tag{25}$$

что непосредственно следует из (23). Отсюда вытекает, что уравнение

$$\Phi_d(\lambda, T) \;\equiv\; \det E_4(\lambda, T) \;=\; 0 \tag{26}$$

определяет спектр собственных значений $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ интегрального уравнения (16) с ядром (13).

Отметим, что в отличие от случая $d = 1$ [9] нельзя гарантировать простоту спектра $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$. Число собственных функций, отвечающих данному λ_n, равно $(d - \mathrm{rank}E_4(\lambda_n, T))$. То, что это число может принимать произвольное значение, не превышающее d, вытекает из следующего примера. В качестве исходной системы стохастических дифференциальных уравнений возьмем d статистически независимых экземпляров одного и того же процесса Орнштейна–Уленбека. Тогда $A = -\nu I$, $D = \sigma I$, где I – единичная матрица, и ν, $\sigma > 0$. В этом случае [10]

$$\Phi_1(\lambda, T) \;=\; r^{-1}\left[(r+\nu)^2\exp(rT) - (r-\nu)^2\exp(-rT)\right]\,, \tag{27}$$

$$r \;=\; (\nu^2 - \lambda\sigma)^{1/2}\,,$$

откуда следует, что

$$\Phi_d(\lambda, T) \;=\; [\Phi_1(\lambda, T)]^d\,.$$

Таким образом, уравнение для собственных значений может иметь кратные корни. В связи с этим, вопрос о связи кратности каждого собственного значения λ_n, $n \in \mathbb{N}$ с кратностью каждого из нулей уравнения $\Phi_d(\lambda, T) = 0$ должен быть исследован дополнительно (см. Приложение 3). Ввиду того, что каждый нуль уравнения $\Phi_d(\lambda, T) = 0$ является собственным значением ядра (13) и, обратно, равенство кратностей этих величин означает, что функция $\Phi_d(\lambda, T)$ пропорциональна детерминанту Фредгольма ядра $K(t, t')$. С целью получения аналитического выражения для $Q_T(\lambda, z)$ (15) будем считать, что равенство кратностей имеет место. Учтем прежде всего, что $\Phi_d(\xi, T)$ – целая функция ξ с нулями λ_n с учетом их кратности и не имеет никаких других нулей. Кроме того, эта функция имеет порядок роста меньший единицы (доказательство этого утверждения приведено в Приложении 2). Поэтому для неё справедливо сходящееся разложение Адамара

$$\Phi_d(\xi, T) \;=\; \mathrm{const}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\xi}{\lambda_n}\right)\,. \tag{28}$$

Возвратимся теперь к определению (15) и учтем, что $z(t)$ – стационарный гауссовский процесс. Пусть сначала $V = I$. Используя теорему Карунена–Лоэва, получаем сходящееся с вероятностью единица разложение

$$\int_0^T \big(z(t), z(t)\big)\, dt \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2\,.$$

Тогда вычисление математического ожидания $\exp\left(-\lambda\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|^2\right)$ на основе плотностей (18) приводит к выражению

$$Q(\lambda, z) \;=\; \prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2\lambda/\lambda_n)^{-1}\,, \tag{29}$$

т.е. существование производящей функции при $\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$ обусловлено сходимостью этого бесконечного произведения и тем, что $\lambda_n > 0$ (см. Приложение 1). Из сопоставления выражений (28) и (29) вытекает, что это произведение сходится и

$$Q(\lambda, z) \;=\; \mathrm{const}\,[\Phi_d(-2\lambda, T)]^{-1}\,.$$

Поскольку $Q(0, z) = 1$, то получим окончательно

$$Q(\lambda, z) \;=\; \Phi_d(0, T)/\Phi_d(-2\lambda, T)\,. \tag{30}$$

Рассмотрим теперь общий случай $V \neq I$. Будем считать $\det V \neq 0$, что не приводит к потере общности в силу непрерывной зависимости всех результирующих выражений от V. Пусть $V^{1/2}$ – некоторый фиксированный корень из матрицы V (конечный результат не будет зависеть от конкретного выбора вида $V^{1/2}$). Введем случайный процесс $\langle z_V(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, который индуцируется процессом $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ посредством формулы для его траекторий $z_V(t) = V^{1/2} z(t)$ и многомерный винеровский процесс $\langle w_V(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ с траекториями $w_V(t) = V^{1/2} w(t)$, имеющий ковариационную матрицу $D_V = V^{1/2} D V^{1/2}$ и $D_V^+ = D_V$. Так как матрица $A_V = V^{1/2} A V^{-1/2}$ диссипативна и траектории $z_V(t)$ удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered} dz_V(t) \;=\; A_V z_V(t)\,dt \;+\; dw_V(t)\,, \\ z_V(t') = (z_V)_0\,, \qquad t_0 \to -\infty, \end{gathered} \tag{31}$$

то процесс $\langle z_V(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ так же, как и $\langle z(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, является многомерным процессом Орнштейна–Уленбека. Из (15) вытекает

$$Q(\lambda, z_V) \;=\; \left\langle \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^T (z_V(t), z_V(t))\; dt \right\} \right\rangle_V,$$

где символ $\langle . \rangle_V$ означает усреднение по мере процесса $\langle z_V(t); t \in \mathbb{R}\rangle$. Следовательно

$$Q(\lambda, z_V) \;=\; \Phi_{Vd}(0, T)/\Phi_{Vd}(-2\lambda, T)\,. \tag{32}$$

Здесь $\Phi_{Vd}(\xi, T) = \det E_{V4}(\xi, T)$, $E_{V4}(\xi, T)$ – правый нижний блок матрицы $\exp(H_V T)$ и

$$H_V \;=\; \begin{pmatrix} A_V + \xi K_V & \xi K_V^2 \\ -\xi & -A_V^+ - \xi K_V \end{pmatrix}. \tag{33}$$

а K_V – решение уравнения Ляпунова $A_V K_V + K_V A_V^+ = -D_V$, которое в силу (14) имеет вид $K_V = V^{1/2} K V^{1/2}$. После простых преобразований находим $H_V = U H(V) U^{-1}$,

$$U \;=\; \begin{pmatrix} V^{1/2} & 0 \\ 0 & V^{-1/2} \end{pmatrix},$$

$$H(V) \;=\; \begin{pmatrix} A_V + \xi K V & \xi K V K \\ -\xi V & -A^+ - \xi V K \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Тогда $\exp(H_V T) \;=\; U \exp(H(V)T) U^{-1}$ и

$$E_{V4}(\xi, T) \;=\; V^{-1/2} E_4(\xi, T; V) V^{1/2}\,, \tag{35}$$

где $E_{V4}(\xi, T; V)$ – правый нижний блок матрицы $\exp(H(V)T)$. Поэтому на основании (32) можно записать

$$\begin{gathered} Q(\lambda, z) \;=\; \Phi_d(0, T; V)/\Phi_d(-2\lambda, T; V)\,, \\ \Phi_d(\xi, T; V) \;=\; \det E_4(\xi, T; V)\,. \end{gathered} \tag{36}$$

Отметим, что в полученное выражение (36) матрица V везде входит в целых положительных степенях. Кроме того, в силу непрерывной зависимости от V выражения (36), оно также имеет место и при $\det V = 0$.

Замечание 6 Если W – неособенная матрица, $\det W \neq 0$, то, определив случайный процесс $\langle z'(t) = Wz(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, перейдем к эквивалентной задаче о вычислении математического ожидания, в которой

$$A \Rightarrow A' = WAW^{-1}, \qquad D \Rightarrow D' = WAW^{+},$$

$$V \Rightarrow V' = (W^{+})^{-1}VW^{-1}, \qquad K \Rightarrow K' = WKW^{+}.$$

Тогда матрица H_V преобразуется в

$$H'_V = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & (W^{-1})^{+} \end{pmatrix} H_V \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & W^{+} \end{pmatrix},$$

и поэтому $E'_4 = (W^{+})^{-1}E_4W^{+}$. Следовательно, функция $\Phi_d(\lambda, T; V)$ при таком преобразовании не меняется. Выбирая подходящим образом W, например, такое, которое приводит A к жордановой форме, можно добиться, чтобы для всех z выполнялось $\mathrm{Re}(Az, z) < 0$.

5. Плотность распределения функционала $J_T[z]$

В этом разделе мы получим экспоненциальное разложение плотности $p(\varepsilon)$ распределения вероятностей (4). Исследуем прежде всего асимптотическое поведение собственных чисел $\{\lambda_m\}_1^\infty$ при $m \to \infty$.

Теорема *Пусть* $\det D \det V \neq 0$, *спектр* D_V *– простой. Тогда при* $m \to \infty$ *множество собственных чисел* $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ *распадается на* d *серий* $\{\lambda_{mk}\}$, $k = 1 \div d$ *с учетом их кратности, где*

$$\lambda_{mk} = \left(\frac{\pi m}{T}\delta_k^{-1/2} + O(1)\right)^2, \tag{37}$$

а $\{\delta_k; k = 1 \div d\}$ *– собственные числа матрицы* VD *(либо, что то же самое, матрицы* DV*).*

□ Заметим, что на основании уравнений (П12), (П13)

$$\begin{aligned} R_1(\lambda) &= i\sqrt{\lambda}D_V^{1/2} + O(1), \\ R_2(\lambda) &= i\sqrt{\lambda}D_V^{1/2} + O(1), \\ S(\lambda) &= -i(2\sqrt{\lambda})^{-1}D_V^{-1/2} + O(\lambda^{-1}), \qquad \lambda \to \infty, \end{aligned} \tag{38}$$

При этом выбор корня $D_V^{1/2}$ обусловлен выбором решений в (П12). Конкретизация этого выбора не влияет на асимптотическое поведение $\langle\lambda_m; m \in \mathbb{N}\rangle$. Ввиду соотношений (38) матрица $\lambda^{-1/2}R_1(\lambda)$ при больших значениях λ является матрицей скалярного типа, так как спектр D_V – простой. Таким образом, матрица $R_1(\lambda)$ имеет спектральное разложение

$$R_1(\lambda) = \lambda^{1/2}\sum_{k=1}^{d}\theta_k^{(1)}(\lambda)I_k(\lambda), \tag{39}$$

где собственные числа $\theta_k^{(1)}(\lambda)$ и соответствующие проекционные операторы $I_k(\lambda)$, $k = 1 \div d$ имеют, в силу (38), асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \theta_k^{(1)}(\lambda) &= i\delta_k^{1/2} + O(\lambda^{-1/2}), \\ I_k(\lambda) &= I_k + O(\lambda^{-1/2}), \end{aligned} \tag{40}$$

а I_k, $k = 1 \div d$ – проекторы на собственные векторы матрицы D_V. Аналогичное рассуждение справедливо для матрицы $R_2(\lambda)$. Из формулы (39) имеем

$$\exp\left(R_1(\lambda)T\right) = \sum_{k=1}^{d} \exp\left(\sqrt{\lambda}\,\theta_k^{(1)}(\lambda)T\right) \cdot I_k(\lambda)$$

и поэтому

$$\exp\left(R_1(\lambda)T\right) = \exp\left(\tilde{R}_1(\lambda)T\right) + o(1), \tag{41}$$

где

$$\tilde{R}_1(\lambda) = \lambda^{1/2}\sum_{k=1}^{d}\theta_k^{(1)}(\lambda)I_k, \qquad \left[\tilde{R}_1(\lambda), D_V\right] = 0.$$

Для оператора $R_2(\lambda)$ справедлива формула, аналогичная (41),

$$\exp\left(-R_2(\lambda)T\right) = \exp\left(-\tilde{R}_2(\lambda)T\right) + o(1), \tag{42}$$

где

$$\tilde{R}_2(\lambda) = \lambda^{1/2}\sum_{k=1}^{d}\theta_k^{(2)}(\lambda)I_k, \quad [\tilde{R}_2(\lambda), D_V] = 0, \quad \theta_k^{(2)}(\lambda) = i\delta_k^{1/2} + O(\lambda^{-1/2}). \tag{43}$$

Найдем теперь асимптотику матричных элементов матрицы $E_4(\lambda, T; V)$. Из (П14) и формул (38)–(43) получаем

$$E_4(\lambda, T; V) = V^{1/2}\left\{\exp(-\tilde{R}_2(\lambda)T) - \exp(\tilde{R}_1(\lambda)T)\right\} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{2i} D_V^{-1/2} K_V V^{-1/2} + O(1). \tag{44}$$

Тогда, уравнение для собственных чисел $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$, $\lambda^{-d/2}\Phi_d(\lambda, T; V) = 0$, согласно (44), представим в виде

$$\det\left[\exp(-\tilde{R}_2(\lambda)T) - \exp(\tilde{R}_1(\lambda)T)\right] + o(1) = 0,$$

так как произведение $\det D \cdot \det V$ отлично от нуля. Поскольку $\lambda_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то из этого уравнения следует, что можно указать такие $\lambda_m^{(0)}$ такие, что при больших m имеет место асимптотическое соотношение $\lambda_m = \lambda_m^{(0)} + o(1)$. При этом числа $\lambda_m^{(0)}$, $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{k=1}^{d}\left[\exp(T\sqrt{\lambda}\theta_k^{(1)}(\lambda)) - \exp(-T\sqrt{\lambda}\theta_k^{(2)}(\lambda))\right] = 0.$$

Тогда, все $\lambda_m^{(0)}$, $m \in \mathbb{N}$ распадаются на d серий $\lambda_{mk}^{(0)}$, $k = 1 \div d$ с учетом их кратности, т.е.

$$\lambda_{mk}^{(0)} \;=\; \left(\frac{\pi m}{T}\delta_k^{-1/2} \;+\; O(1)\right)^2 , \qquad m \to \infty ,$$

откуда и следует утверждение теоремы. ■

Следствие *Интегральный оператор с ядром (13) является оператором Гильберта–Шмидта, так как*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-2} \;<\; \infty . \tag{45}$$

Согласно определению (15) плотность распределения вероятностей $p(\varepsilon)$ является обратным преобразованием Лапласа от функции $Q(\lambda)$

$$p(\varepsilon) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} Q(\lambda)\, \mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} d\lambda . \tag{46}$$

Поскольку интеграл

$$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{2\lambda}{\lambda_m}\right)^{-1} \mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} d\lambda$$

сходится равномерно относительно n на обоих пределах интегрирования и на каждом компакте в $(-i\infty, i\infty)$ и сходимость бесконечного произведения в (29) в силу (45) равномерна по λ, то

$$p(\varepsilon) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{2\lambda}{\lambda_m}\right)^{-1} \mathrm{e}^{\lambda\varepsilon} \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Res}\left[Q(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda\varepsilon}\right]\Big|_{\lambda=-\lambda_m/2} .$$

Отсюда следует экспоненциальное разложение плотности $p(\varepsilon)$,

$$p(\varepsilon) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp\left(-\frac{1}{2}\,\varepsilon\lambda_m\right) , \tag{47}$$

где

$$a_m \;=\; \left(\frac{\lambda_m}{2}\right)^{l_m} \sum_{k=0}^{l_m-1} \binom{l_m-1}{k} \varepsilon^{l_m-k-1} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} Q_m(\lambda)\right)_{\lambda=-\lambda_m/2}$$

и

$$Q_m(\lambda) \;=\; \prod_{n=1,\; n\neq m}^{\infty} \left(1 + \frac{2\lambda}{\lambda_n}\right)^{-1} , \quad m \in \mathbb{N} .$$

Здесь l_m — кратность точки спектра λ_m, $m \in \mathbb{N}$. Если спектр $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ – простой, то набор коэффициентов $\{a_m; m \in \mathbb{N}\}$ обладает свойством знакочередуемости,

$$a_m \;=\; (-1)^{m-1} \left|\mathrm{Res}\, Q_m(\lambda)\right|_{\lambda=-\lambda_m/2} , \quad m \in \mathbb{N} .$$

Полученное разложение для плотности $p(\varepsilon)$ определяет её асимптотику при $\varepsilon \to \infty$.

Теорема *Если* $\det D \cdot \det V \neq 0$, *то при любом* $\delta > 0$ *для* $\varepsilon \geq \delta$ *ряд (47) сходится равномерно и абсолютно и, следовательно, при* $\varepsilon \to \infty$ *имеет место*

$$p(\varepsilon) \;=\; a_1 \exp(-\lambda_1 \varepsilon/2) + O\left(\mathrm{e}^{-\lambda_2 \varepsilon/2}\right) . \tag{48}$$

□ Утверждение теоремы немедленно вытекает из (37) и следующей равномерной по $m \in \mathbb{N}$ оценки на коэффициенты $\{a_m; m \in \mathbb{N}\}$

$$|a_m| \;\leq\; \mathrm{const}\, \varepsilon^{d-1}, \qquad \varepsilon \to \infty, . \tag{49}$$

Доказательство этой оценки состоит в следующем. Каждая k-ая серия $k = 1 \div d$ коэффициентов $\{a_{mk}; m \in \mathbb{N}\}$ соответствует k-ой серии собственных чисел $\{\lambda_{mk}; m \in \mathbb{N}\}$. Сначала допустим, что асимптотически все нули $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ – простые. Общий случай может быть получен с помощью предельного перехода, который может приводить к совпадению некоторых из чисел δ_k, $k = 1 \div d$. В случае простоты нулей, имеем

$$a_{mk} \;=\; \Phi_d(0, T; V) \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_d(-2\lambda, T; V)\right]^{-1} \Bigg|_{\lambda = -\lambda_{m,k}/2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Согласно (44)

$$\Phi_d(\lambda, T; V) \;=\; \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2i}\right)^d \det K \cdot \left(\frac{\det V}{\det D}\right)^{1/2} \;\times$$

$$\times \prod_{k=1}^{d} \left[\exp\left(-\theta_k^{(2)}(\lambda) T\right) - \exp\left(\theta_k^{(1)}(\lambda) T\right)\right] \;+\; O\left(\lambda^{(d-1)/2}\right) .$$

Поскольку возможно дифференцирование этого асимптотического разложения, найдем производную $\partial \Phi_d(-2\lambda, T; V)/\partial \lambda$ в точке $\lambda = -\lambda_{mk}/2$. Тогда, при $m \to \infty$, для всех $k = 1 \div d$, имеет место

$$a_{mk} \;=\; \mathrm{const}\, (-1)^m \left\{ \sqrt{\delta_k} \left(\frac{m}{\sqrt{\delta_k}}\right)^{d-1} \prod_{j=1,\; j \neq k}^{d} \sin\left(\frac{\pi m \sqrt{\delta_j}}{\sqrt{\delta_k}} + O(1)\right) \;+\; O(m^{d-2}) \right\}^{-1}.$$

Из этой формулы и (47) следует, что коэффициенты a_m, $m \in \mathbb{N}$ ведут себя при $m \to \infty$ наихудшим образом в том случае, когда все собственные числа δ_k, $k = 1 \div d$ совпадают. Полагая все δ_k, $k = 1 \div d$ равными друг к другу, при вычислении коэффициентов a_m приходится вычислять d-кратный вычет для каждого $m \in \mathbb{N}$. Величина этого вычета удовлетворяет оценке (49). ■

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем положительность собственных чисел $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ ядра (13).

Теорема *Пусть правая часть равенства (16) не равна тождественно нулю, т.е.* $\ker K = 0$. *Тогда собственные числа* $\{\lambda_m; m \in \mathbb{N}\}$ *положительны.*

□ Введем вектор $f(t) = K^{1/2}e_n(t)$ и матрицу $\tilde{A} = K^{-1/2}AK^{1/2}$. Воспользуемся равенством

$$\theta(t)\exp(\tilde{A}t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t}(i\omega - \tilde{A})^{-1}d\omega\,, \tag{1}$$

которое является следствием интегрального представления Данфорда-Рисса для матричных аналитических функций [7], и тем, что реальная часть собственных чисел матрицы $\tilde{A}$ меньше нуля (так же, как и матрицы A в силу её диссипативности). Тогда на основе (16) получим неравенство

$$0 \;<\; \int\limits_0^T (e_n(t), e_n(t))\; dt \;= \tag{2}$$

$$= \lambda_n \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int\limits_0^T dt\int\limits_0^T \Big(f_n(t), \Big[\mathrm{e}^{i\omega(t-t')}(i\omega - \tilde{A})^{-1} + \mathrm{e}^{i\omega(t'-t)}(i\omega - \tilde{A}^{+})^{-1}\Big]\, f(t')\Big)\, dt'.$$

Введем теперь вектор

$$\tilde{f}(\omega) = \int\limits_0^T \mathrm{e}^{-i\omega t}f(t)dt\,.$$

Тогда из (П2) следует

$$0 \;<\; \int\limits_0^T (e_n(t), e_n(t))\; dt \;=$$

$$= \;\frac{\lambda_n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\tilde{f}_n(\omega), \Big[(i\omega - \tilde{A})^{-1} - (i\omega - \tilde{A}^{+})^{-1}\Big]\;\tilde{f}(\omega)\Big)\, d\omega \;= \tag{3}$$

$$= \;-\frac{\lambda_n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big((i\omega + \tilde{A}^{+})^{-1}\tilde{f}(\omega),\, (\tilde{A} + \tilde{A}^{+})(i\omega + \tilde{A}^{+})^{-1}\tilde{f}(\omega)\Big)\, d\omega\,.$$

Так как $\tilde{A} + \tilde{A}^{+} \;=\; K^{-1/2}(AK + KA^{+})K^{-1/2} \;=\; -K^{-1/2}DK^{1/2} \;<\; 0$, то все числа λ_n положительны, кроме того возможного случая, когда интеграл в правой части (П3) строго равен нулю. Но в этом случае, для почти всех ω,

$$(i\omega + \tilde{A}^{+})^{-1}\tilde{f}(\omega) = 0\,,$$

и поэтому, для почти всех t,

$$f(t) = K^{1/2}e_n(t) = 0\,,$$

т.е. $e_n(t) \in \ker K$, что не имеет места по условиям теоремы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Оценим порядок роста функции $\Phi_d(\lambda, T; V)$. Поскольку нам потребуется явное выражение для матрицы $E_4(\lambda, T; V)$, представим резольвенту оператора H_V (32) в виде

$$(\xi - H_V)^{-1} = \begin{pmatrix} G_1(\xi) & G_2(\xi) \\ G_3(\xi) & G_4(\xi) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тогда на основании операторного исчисления Данфорда-Рисса и определения матрицы $E_4(\lambda, T; V)$ следует

$$E_4(\lambda, T; V) = \frac{1}{2\pi i} \oint G_4(\xi)\, e^{\xi T} d\xi. \tag{5}$$

При этом контур интегрирования должен охватывать все собственные числа матрицы H_V. Из (П4) вытекает, что

$$G_4(\xi) = \left[(\xi + A^+ + \lambda V K) + \lambda^2 V(\xi - A - \lambda K V)^{-1} K V K\right]^{-1}. \tag{6}$$

Как и ранее, будем предполагать, что $\det V \neq 0$. Поэтому рассмотрим оператор $G_{4V}(\xi) = V^{-1/2} G_4(\xi) V^{1/2}$, такое преобразование оставляет неизменным функцию $\Phi_d(\lambda, T; V)$. Из (П6) и уравнения Ляпунова для K_V следует

$$G_{4V} = \left[\xi^2 + \xi(A_V^+ - A_V) - A_V A_V^+ + \lambda D_V\right]^{-1} (\xi - A_V - \lambda K_V). \tag{7}$$

Интеграл (П5) определяется вкладом полюсов, являющихся нулями полинома

$$\mathcal{P}(\xi) = \det\left[\xi^2 + \xi(A_V^+ - A_V) - A_V A_V^+ + \lambda D_V\right]. \tag{8}$$

Нули этого полинома $\xi = \xi(\lambda)$ обладают следующим свойством инвариантности: $\xi \Rightarrow \xi^*(\lambda^*)$, что указывает на возможность считать их двумя наборами собственных чисел для двух матриц $R(\lambda)$ и $-R^+(\lambda^*)$. С целью нахождения этих матриц представим операторный полином

$$\hat{\mathcal{P}}(\xi) = \xi^2 + \xi(A_V^+ - A_V) - A_V A_V^+ + \lambda D_V \tag{9}$$

в виде

$$\hat{\mathcal{P}}(\xi) = (\xi - R_1)(\xi + R_2). \tag{10}$$

Для существования представления (П10) необходимо, чтобы матрицы R_1 и R_2 удовлетворяли уравнениям

$$R_2 - R_1 = A_V^+ - A_V; \qquad R_1 R_2 = A_V^+ A_V - \lambda D_V, \tag{11}$$

из которых следует

$$\begin{aligned} &R_1^2 + R_1\left(A_V^+ - A_V\right) - A_V A_V^+ + \lambda D_V = 0, \\ &R_2^2 - \left(A_V^+ - A_V\right) R_2 - A_V A_V^+ + \lambda D_V = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Известно [11], что каждое из этих уравнений разрешимо и, кроме того, каждое из решений является аналитической функцией от λ, обладающей конечным множеством особенностей. Выберем определенную ветвь решений для, например, $R_2 = R_2(\lambda)$. На основании обобщенной теоремы Безу [11] результат правого деления многочлена $\hat{\mathcal{P}}(\xi)$ на $(\xi + R_2)$ должен давать $(\xi - R_1)$, при этом ветвь R_1 автоматически согласовывается с выбранной выше ветвью R_2.

Выберем такие ветви матриц R_1 и R_2, которые при $\lambda \to 0$ имеют вид:

$$R_1 \ = \ A + \lambda K + o(\lambda)\,; \qquad R_2 \ = \ A^+ + \lambda K + o(\lambda)\,,$$

тогда для достаточно малых λ согласованные спектры матриц R_1 и $(-R_2)$ не пересекаются в силу диссипативности A. Поэтому при тех же λ однозначно разрешимо относительно оператора S следующее уравнение:

$$SR_1 + R_2 S \ = \ I\,. \tag{13}$$

Для построения аналитического продолжения матрицы $S = S(\lambda)$ покажем конечность набора Λ тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых происходит перекрытие спектров матриц R_1 и $(-R_2)$. Пусть λ_0 – граничная точка этого набора. Существует путь γ в плоскости комплексных значений λ, приводящий в точку λ_0 с обходом точек неаналитичности матриц $R_1(\lambda)$ и $R_2(\lambda)$. Из уравнений (П11), переходя вдоль пути γ к пределу $\lambda \to \lambda_0$, находим, что производная $dR_2/d\lambda$ в этой граничной точке не существует, поскольку уравнение для этой производной

$$R_1 \frac{dR_1}{d\lambda} \ + \ \frac{dR_2}{d\lambda} R_2 \ = \ -D_{_V}$$

при $\det D_{_V} \neq 0$ не разрешимо при $\lambda = \lambda_0$ из-за перекрытия спектров рассматриваемых матриц R_1 и $(-R_2)$. Поэтому $\lambda = \lambda_0$ – точка неаналитичности для матрицы $R_2(\lambda)$. Ввиду конечности набора точек неаналитичности этой матрицы, множество Λ совпадает с этим набором.

Найдем теперь искомое представление для матрицы $E_4(\lambda, T; V)$. Благодаря однозначности решения уравнения (П13) для оператора S из (П10) следует

$$\hat{\mathcal{P}}^{-1}(\xi) = S(\xi - R_1)^{-1} - (\xi + R_2)^{-1} S\,.$$

Поэтому, в силу (П7) и (П9), получим после вычисления контурного интеграла в (П5)

$$\begin{aligned} E_{4V}(\lambda, T; V) \ &= \ V^{1/2}\big\{\,[S \cdot \exp(R_1 T) \cdot R_1 + R_2 \cdot \exp(-R_2 T) \cdot S] \ + \\ &+ \ [\exp(-R_2 T) \cdot S - S \cdot \exp(R_1 T)]\,(A_{_V} + \lambda K_{_V})\big\} V^{-1/2}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Оценка порядка роста α функции $\Phi_d(\lambda, T; V)$ находится на основе (П14),

$$\alpha \ = \ \lim_{R \to \infty} [\ln \ln \max_{|\lambda| = R} |\Phi_d(\lambda, T; V)| / \ln R]\,.$$

Для этого достаточно получить асимптотику при больших значениях $|\lambda|$ матриц R_1, R_2 и S. Из (П12) и (П13) вытекает, что при $\det V \neq 0$ имеет место

$$R_1(\lambda) \sim R_2(\lambda) \sim i(\lambda D_{_V})^{1/2}\,, \qquad S(\lambda) \sim \frac{1}{2i}(\lambda D_{_V})^{-1/2}\,, \quad |\lambda| \to \infty\,. \tag{15}$$

Поскольку $\Phi_d(\lambda, T; V) \le d! \parallel E_4(\lambda, T; V) \parallel^d$, где норма понимается в смысле максимума матричных элементов, и

$$\parallel \exp(R_1 t) \parallel \le 1 \ + \ d^{-1}[\exp(Td \parallel R_1 \parallel) - 1]\,,$$

то на основании (П15) можно заключить, что

$$\alpha \le \frac{1}{2} \qquad (16)$$

для искомого порядка роста.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Докажем равенство кратностей κ_n' любого нуля λ_n функции $\Phi_d(\lambda, t; V)$ и

$$\kappa_n = \dim\ker E_4(\lambda_n, t; V)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

При $d = 1$ это равенство доказывается непосредственно на основе явного представления (27) для $\Phi_1(\lambda, t; V)$.

Докажем предварительно простое утверждение, имея в виду общий случай $d \ge 1$, что кратность нуля λ_n не меньше, чем κ_n, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что содержание этого утверждения не связано с конкретной структурой матрицы E_4, а оно имеет место для произвольной матричной функции.

Приведем матрицу E_4 к жордановой матричной форме

$$E_4 = \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & 0 & \\ & & B_3 & & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{pmatrix}, \qquad B_i = \begin{pmatrix} \beta_i & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \beta_i & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \beta_i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_i \end{pmatrix}.$$

Здесь $\beta_i = \beta_i(\lambda, t)$ являются функциями λ и t. Число нулевых собственных векторов κ_n матрицы $E_4(\lambda_n, t; V)$ равно $\sum_m \dim B_{i_m}$, где суммирование осуществляется по тем i_m, для которых функция $\beta_{i_m}(\lambda, t)$ обращается в нуль при $\lambda = \lambda_n$. Если k_m – кратность нуля λ_n функции $\beta_{i_m}(\lambda, t)$, то кратность нуля λ_n функции $\Phi_d(\lambda, t; V)$ равна $\sum_m k_m \dim B_{i_m}$. Отсюда и вытекает указанное утверждение.

Теперь докажем обратное.

Утверждение *Кратность нуля λ_n функции $\Phi_d(\lambda, t; V)$ не превышает κ_n.*

□ Введем пространство упорядоченных пар матриц $\mathcal{M} = \{(D, A)\}$ таких, что $D^+ = D$, $D > 0$ и A – диссипативна. Для того, чтобы подчеркнуть зависимость функций $\Phi_d(\lambda, t; V)$, $Q(\lambda, z)$ и матрицы $E_4(\lambda, t; V)$ от элементов пространства $\mathcal{M}$, введем обозначения

$$\Phi(\lambda|y) \equiv \Phi_d(\lambda, t; V)\,, \qquad Q(\lambda|y) \equiv Q(\lambda, z)\,, \qquad E(\lambda|y) \equiv E_4(\lambda, t; V)\,,$$

где $y \equiv (D, A)$.

Доказательство будем строить от противного. А именно, предположим, что не существует всюду плотного в $\mathcal{M}$ подмножества X такого, что при $y \in X$, для всех нулей λ_n, имеет место совпадение κ_n и κ_n', где κ_n' – кратность нуля λ_n функции $\Phi(\lambda|y)$, где $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, при y, принадлежащих некоторому открытому подмножеству в $\mathcal{M}$, функция

$$\pi(\lambda|y) = \mathrm{const}\, \Phi(\lambda|y)\, Q\left(-\frac{\lambda}{2}\middle|\, y\right)$$

не равна тождественно 1, а является целой функцией λ, имеющей разложение Адамара. Если бы κ_n и κ'_n совпадали на всюду плотном в $\mathcal{M}$ подмножестве, то на этом подмножестве $\pi(\lambda|y) = 1$ и, используя непрерывность функций $\Phi(\lambda|y)$ и $Q(\lambda|y)$ по y, мы бы имели $\pi(\lambda|y) \equiv 1$. Будем считать, что набор нулей $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ всегда упорядочен по величине. Сопоставим каждой точке $y \in \mathcal{M}$ соответствующий ей набор $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$. Тем самым мы получим набор функций $\{\lambda_n(y); n \in \mathbb{N}\}$, причем $\lambda_n(y) \le \lambda_{n+1}(y)$, $n \in \mathbb{N}$. В связи с тем, что кратность каждого нуля $\lambda_n(y)$, $n \in \mathbb{N}$ функции $\Phi(\lambda|y)$ может быть только конечной, назовем функцию $\lambda_n(y)$ l-кратно вырожденной в точке y, если существует ровно $l > 1$ номеров m таких, что $\lambda_m(y) = \lambda_n(y)$. Для l-кратно вырожденной в y функции $\lambda_n(y)$ имеем

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\Phi(\lambda|y)\right)_{\lambda=\lambda_n(y)} = 0\,, \qquad k = 0,1,\dots,l-1\,;$$

$$\left(\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}\Phi(\lambda|y)\right)_{\lambda=\lambda_n(y)} \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Функция $\Phi(\lambda|y)$ согласно построению, данному в разделе 4, бесконечно дифференцируема по λ и y в $\mathcal{M} \otimes (0,\infty)$. Построим множества X_l в $\mathcal{M}$

$$X_l = \Bigg\{ y : \text{существует } \lambda_n(y) \text{ такая, что}$$

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\Phi(\lambda|y)\right)_{\lambda=\lambda_n(y)} = 0\,, \quad k = 0,1,\dots,l-1\,;$$

$$\left(\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}\Phi(\lambda|y)\right)_{\lambda=\lambda_n(y)} \neq 0 \Bigg\}\,; \qquad l = 2,3,\dots$$

т.е. при $y \in X_l$ существует по крайней мере одна l-кратно вырожденная функция $\lambda_n(y)$.

Из предположения, принятого нами выше, следует, что замыкание X_1 не исчерпывает $\mathcal{M}$. Тогда, ввиду конечной кратности вырождения каждой $\lambda_n(y)$, существует по крайней мере одно непустое X_l, содержащее открытое подмножество Z. В самом деле, если замыкание X_1 совпадает с $\mathcal{M}$, то при $y \in X_1$, ввиду бесконечной дифференцируемости $\Phi(\lambda|y)$, по теореме о неявной функции все $\lambda_n(y)$, невырождены, т.е. $\kappa'_n = 1$ при всех n. Это противоречит предположению.

Точно так же, применяя теорему о неявной функции $\partial^{l-1}\Phi(\lambda|y)/\partial\lambda^{l-1} = 0$ при $y \in Z$, существует однозначная дифференцируемая функция $\lambda(y)$, которая совпадает с какой-то l-кратно вырожденной при $y \in Z$ функцией $\lambda_n(y)$. Можно утверждать большее, так как $\Phi(\lambda|y)$ – бесконечно дифференцируемая функция, то таковой же является и $\lambda(y)$. Поэтому, представив $\Phi(\lambda|y) = (\lambda - \lambda(y))^l\Phi'(\lambda|y)$, где $\Phi'(\lambda(y)|y) \neq 0$, $y \in Z$, имеем

$$\partial_y^k\Phi(\lambda|y)\Big|_{\lambda=\lambda(y)} = 0\,, \qquad k = 0,1,\dots,l-1\,; \tag{17}$$

$$\partial_y^l\Phi(\lambda|y)\Big|_{\lambda=\lambda(y)} \neq 0\,, \qquad l \ge 1\,. \tag{18}$$

Здесь ∂_y – дифференциал по y в $\mathcal{M}$.

Таким образом, в открытом подмножестве Z уравнения (П17) при условии (П18) должны иметь совместные решения. При $k = 0, 1$ (П17) представляет собой систему из $(3d^2+1)$ уравнений относительно $(3d^2+1)$ вещественных независимых параметров и поэтому, вообще говоря, они не могут иметь решений при y, принадлежащих множеству точек общего положения. Если это справедливо, то мы и прийдем к искомому противоречию, доказывающему сформулированное утверждение. Нам потребуется следующая

Лемма *Если матрица M удовлетворяет уравнениям*

$$ME(\lambda|y) \;=\; 0\,, \tag{19}$$

$$\mathrm{Sp}(M\partial_y E(\lambda|y)) \;=\; 0\,, \tag{20}$$

то $M = 0$.

□ Из всех возможных вариаций в (П20) нам достаточно рассмотреть лишь такие, которые удовлетворяют условиям неизменяемости двух матриц: а) $A_V A_V^+ - \lambda D_V$; б) $A_V - A_V^+$. При выполнении этих условий справедливо $\partial_y R_1 = \partial_y R_2 = 0$ и, следовательно $\partial_y S = 0$. Поэтому из (П14) вытекает

$$\begin{aligned}\partial_y E_4 \;&=\; V^{1/2}\mathcal{E}(\partial_y A_V + \lambda\partial_y K_V)V^{-1/2}\,,\\ \mathcal{E} \;&=\; \exp(-R_2\tau)\cdot S - S\cdot\exp(R_1\tau)\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Из (П20) следует

$$\mathrm{Sp}(M\mathcal{E}(\partial_y A_V + \lambda\partial_y K_V)) \;=\; 0\,.$$

С помощью уравнения Ляпунова $A_V K_V + K_V A_V^+ = -D_V$ найдем уравнение для $\partial_y K_V$

$$A_V\cdot\partial_y K_V + \partial_y K_V\cdot A_V^+ \;=\; -\frac{1}{\lambda}\left[\partial_y A_V\cdot(A_V^+ + \lambda K_V) \;+\; (A_V + \lambda K_V)\cdot\partial_y A_V\right].$$

Используя стандартную форму решения [12] уравнения Ляпунова, получаем

$$\mathrm{Sp}(M\mathcal{E}\partial_y K_V) \;=$$

$$=\; -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty \mathrm{Sp}\left\{\left[(A_V^+ + \lambda K_V)e^{A_V^+ t}M\mathcal{E}e^{A_V t} + e^{A_V^+ t}M\mathcal{E}e^{A_V t}(A_V + \lambda K_V)\right]\cdot\partial_y A_V\right\}dt\,.$$

После преобразований найдем

$$\mathrm{Sp}\left[M\mathcal{E}\left(\partial_y A_V + \lambda\partial_y K_V\right)\right] \;=\; \mathrm{Sp}\left(\{2M\mathcal{E} - \lambda[K_V, N]_+\}\partial_y A_V\right)\,,$$

где символом $[.,.]_+$ обозначен антикоммутатор фигурирующих матриц и

$$N \;=\; \int\limits_0^\infty \exp(A_V^+ t)\cdot M\mathcal{E}\cdot\exp(A_V t)dt\,.$$

Ввиду произвольности дифференциала $\partial_y A_V$ с учетом того, что $\partial_y(A_V^+ - A_V) = 0$, получим следующую систему тождеств:

$$M\mathcal{E} \;=\; \frac{\lambda}{2}[K_V, N]_+\,;\qquad A_V^+ N + NA_V \;=\; M\mathcal{E}\,.$$

Из этих тождеств следует, что матрица N удовлетворяет условиям

$$\left(A_V^+ - \frac{\lambda}{2}K_V\right) \cdot N + N \cdot \left(A_V - \frac{\lambda}{2}K_V\right) = 0\,. \tag{22}$$

Учтем теперь то обстоятельство, что вместо основной задачи нахождения производящей функции можно рассматривать изоморфную ей задачу, получающуюся с помощью неособенного преобразования W (см. Замечание 6). С помощью указанного преобразования всегда можно добиться, чтобы диссипативная матрица A_V удовлетворяла условию $\mathrm{Re}(A_V f, f) < 0$ для произвольного ненулевого вектора f. Тогда матрицы $\left(A_V - \frac{\lambda}{2}K_V\right)$ и $\left(-A_V^+ + \frac{\lambda}{2}K_V\right)$ не имеют общих собственных чисел, так как собственные числа матрицы $\left(A_V - \frac{\lambda}{2}K_V\right)$ имеют отрицательную действительную часть. Поэтому из (П22) следует, что

$$N = \int_0^\infty \exp(A_V^+ t) \cdot M\mathcal{E} \cdot \exp(A_V t) dt = 0\,.$$

В результате интегрирования получим

$$M\mathcal{E} = 0\,. \tag{23}$$

Из этого равенства и условия (П19) следует

$$M\left(SR_1 \cdot \exp(R_1 t) + \exp(-R_2 t) \cdot R_2 S\right) = 0\,,$$

а повторное использование (П23) и уравнения (П13) приводит к $M \exp(R_1 t) = 0$. Поэтому $M = 0$. ■

Воспользовавшись Леммой покажем теперь, что равенства (П17) и (П18) не могут одновременно выполняться на подмножестве Z. Поскольку

$$\mathrm{rank} E(\lambda_n|y) = d - l + 1\,,$$

то

$$\det E(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k) = 0\,; \qquad k = 0, 1, \ldots, l-2\,, \tag{24}$$

где $E(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k)$ – матрица, получающаяся из $E(\lambda_n|y)$ вычеркиванием строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$. Вместе с тем существуют такие наборы номеров $i_1, \ldots, i_{l-1}$ и $j_1, \ldots, j_{l-1}$, для которых

$$L(i_1, \ldots, i_{l-1}; j_1, \ldots, j_{l-1}) \equiv (-1)^\Sigma \det E(i_1, \ldots, i_{l-1}; j_1, \ldots, j_{l-1}) \neq 0\,,$$

где $\Sigma = i_1 + \ldots + i_{l-1} + j_1 + \ldots + j_{l-1}$. Из определения $\Phi(\lambda_n|y)$ и равенства

$$L(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_k) = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, l-2\,,$$

получим

$$\partial_y^{l-1}\Phi(\lambda_n|y) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{l-1}\\ j_1,\ldots,j_{l-1}}} L(i_1, \ldots, i_{l-1}; j_1, \ldots, j_{l-1}) \times \tag{25}$$

$$\times\, (\partial_y E)_{i_1 j_1} \cdot (\partial_y E)_{i_2 j_2} \cdot \ldots \cdot (\partial_y E)_{i_{l-1} j_{l-1}} = 0\,.$$

Суммирование в этом выражении проводится независимо по всем указанным индексам, полагая при этом $L = 0$, если в наборах $(i_1, \ldots, i_{l-1})$ и $(j_1, \ldots, j_{l-1})$ встретятся повторяющиеся индексы.

Введем теперь последовательность матриц

$$L^{(1)}_{j_1\, i_1} \;=\; \sum_{\substack{i_2,\ldots,i_{l-1}\\ j_2,\ldots,j_{l-1}}} L(i_{l-1}, \ldots, i_2, i_1;\, j_{l-1}, \ldots, j_2, j_1) \cdot (\partial_y E)_{i_{l-1}\, j_{l-1}} \cdot \ldots \cdot (\partial_y E)_{i_2\, j_2}\,. \tag{26}$$

Аналогичным образом, введём матрицы для каждого значения $k = 2, 3, \ldots, l-1$ и для любых возможных наборов $(i_1, \ldots, i_k)$ и $(j_1, \ldots, j_k)$

$$L^{(k)}_{j_k\, i_k}(i_1, \ldots, i_{k-1};\, j_1, \ldots, j_{k-1}) \;\equiv \tag{27}$$

$$\equiv \sum_{\substack{i_{k+1},\ldots,i_{l-1}\\ j_{k+1},\ldots,j_{l-1}}} L(i_{l-1}, \ldots, i_1;\, j_{l-1}, \ldots, j_1) \cdot (\partial_y E)_{i_{l-1}\, j_{l-1}} \cdot \ldots \cdot (\partial_y E)_{i_{k+1}\, j_{k+1}}\,.$$

Из разложения минора $(k+1)$-го порядка матрицы E_4 по минорам k-го порядка следует тождество

$$\sum_{i_s} L(i_1, \ldots, i_{k+1};\, j_1, \ldots, j_{k+1}) E_{i_s\, j_s} \;=\; 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, l-2\,,$$

поскольку минор более высокого порядка равен нулю, $\mathrm{rank} E_4 = d - l + 1$. В терминах матриц (П26), (П27) последнее тождество принимает вид

$$\begin{aligned} &L^{(1)} E(\lambda_n|y) \;=\; 0\,,\\ &L^{(2)}(i_1;\, j_1) E(\lambda_n|y) \;=\; 0\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &L^{(l-1)}(i_1, \ldots, i_{l-2};\, j_1, \ldots, j_{l-2}) E(\lambda_n|y) \;=\; 0\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Учтём, что из (П25) следует

$$\mathrm{Sp}\left(L^{(1)} \partial_y E\right) \;=\; 0\,. \tag{29}$$

Теперь применим к системам (П28) и (П29) доказанную в этом приложении Лемму. На основании её утверждения следует, что $L^{(1)} = 0$. Это равенство можно переписать в виде $\mathrm{Sp}(L^{(2)}(i_1, j_1) \partial_y E(\lambda_n|y)) = 0$. Далее, повторно применяя указанную Лемму, получаем $L^{(2)}(i_1, j_1) = 0$. Продолжив этот рекуррентный процесс спуска, прийдем к равенству

$$L_{i_{l-1}, j_{l-1}}(i_1, \ldots, i_{l-2};\, j_1, \ldots, j_{l-2}) \;=\; L(i_1, \ldots, i_{l-1};\, j_1, \ldots, j_{l-1}) \;=\; 0\,. \tag{30}$$

Это равенство означает, что $\mathrm{rank} E(\lambda_n|y) \le d - l$. Таким образом, мы пришли к требуемому противоречию, которое указывает, что условия (П17) и (П18) несовместны на открытом подмножестве Z. Это доказывает совпадение величин κ_n и κ'_n. ■

Литература

1. Christopeit R., Helmes K. Limited risk control of the Ornstein-Uhlenbeck process // Math. Operationsforsch. und Statist. – Ser. Optimiz. – 1980. – 11,4. – P.605-616.
2. Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. / Б. Саймон. – М.: Наука, 1978. – 358 с.
3. Пугачёв В.Н., Синицын И.Н. Стохастические динамические системы. / В.Н.Пугачёв. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
4. Lavenda B.H., Compiani M. The Physical Implications of Two Forms of Stochastic Calculi // Lettere al Nuovo Cimento. – 1983. – 38,9. – P.345-352.
5. Smyth J., Moss P., McClintak P.V.E., Clarckson D. Ito versus Stratonovich revisited. // Physical Letters. – 1983. – 97,3. – P.95-98.
6. Дуб Дж. Вероятностные процессы. / Дж.Дуб. – М.: Издательство иностранной литературы, 1965. – 605 с.
7. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. / И.М.Глазман. – М.: Наука, 1969. – 476 с.
8. Лоэв М. Теория вероятностей. / М.Лоэв. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 719 с.
9. Slepian D. Fluctuation of random noise power // Bell Systems Technical Journal. – 1958. – p.95-98.
10. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. / М.Лэкс. – М.: Мир, 1974. – 299 с.
11. Гантмахер М. Теория матриц. / М.Гантмахер. – М.: Наука, 1974. – 280 с.
12. Беллман Р. Введение в теорию матриц. / Р.Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

THE EXPONENTIAL EXPANSION OF THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF QUADRATIC FUNCTIONAL VALUES ON ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS TRAJECTORIES

Yu.P. Virchenko,[1] **A.S. Mazmanishvili**[2]

[1] Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

[2] Sumy State University,
Rimsky-Korsakov Str., 2, Sumy, 40007, Ukraine, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

The problem of the probability distribution density $p(\varepsilon)$ evaluation connected with random values of the quadratic functional on multidimensional Ornstein-Uhlenbeck process trajectories in $\mathbb{C}^d$ is studied. The representation of the distribution density in the form of the expansion on exponential functions $\exp(-\lambda_n \varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$ is obtained, where $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ is the eigenvalue spectrum of the correlation operatior connected with the process. It is generated by the density $p(\varepsilon)$ reprtesentation in the form of the infinite convolution sequence of exponential distributions.

Keywords: Ornstein-Uhlenbeck process, correlation operator, quadratic functional, the Hadamard expansion, exponential expansion.