УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.Н. Бабаев, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача определения правой части уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу по дополнительному наблюдению в некоторой пространственной точке или в некоторый момент времени.

Ключевые слова: уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, обратная коэффициентная задача, однозначная разрешимость.

Пусть $\Omega = \{t > 0,\ x \in R\}$, функции $u(t,x)$, $F(t,x)$ определены и непрерывны в $\bar{\Omega}$. При $k \geq 0$ будем рассматривать следующую задачу

$$u''_{tt} + \frac{k}{t}u'_t = u''_{xx} + F(t,x), \quad (t,x) \in \Omega\,, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x)\,, \quad u'_t(0,x) = 0\,, \tag{2}$$

в которой, помимо $u(t,x)$, неизвестной является и правая часть $F(t,x)$ уравнения (1). Будем считать, что функция $F(t,x)$ представима в виде произведения $F(t,x) = p(t)q(x)$, где один из сомножителей известен, а второй восстанавливается по дополнительному наблюдению в некоторой точке пространства $x_1 \in R$

$$u(t,x_1) = \mu(t), \quad x_1 \in R \tag{3}$$

или по известному решению в некоторый момент времени $t_1 \in (0,\infty)$

$$u(t_1,x) = \nu(x), \quad t_1 \in (0,\infty)\,. \tag{4}$$

Уравнение (1) называется уравнением Эйлера-Пуассона-Дарбу, соотношения (2) – начальными условиями, равенства (3), (4) – дополнительными условиями в точке наблюдения x_1 или t_1. Задачи (1) – (3) и (1), (2), (4), где $u(t,x)$ и $F(t,x)$ – неизвестные функция, называются коэффициентными обратными задачами (или просто обратными задачами). Обзор публикаций по обратным задачам можно найти в [1], [6].

В работе используются следующие обозначения, заимствованные из работы [3],

$$[Y_0(t)f](x) = [C(t)f](x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)), \quad Y_0(0) = I\,, \tag{5}$$

$$[Y_k(t)f](x) = \frac{2\,\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)} \int\limits_0^1 \left(1-s^2\right)^{k/2-1} [C(ts)f](x)\,ds, \quad Y_k(0) = I\,, \tag{6}$$

Работа поддержана РФФИ (грант 10–01–00062)

$$[Z_1(t)f](x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \left(1-s^2\right)^{-1/2}\,\ln\left(t\left(1-s^2\right)\right)[C(ts)f](x)\,ds\,, \tag{7}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $k > 0$, $(t,x) \in \Omega$, $f(x) \in C(R)$.

Если $u_0(x) \in C^2(R)$, $F(t,x) \in C^2(\bar{\Omega})$ — известные функции, то единственным решением прямой задачи (1), (2) является функция $u(t,x)$, находящаяся по формуле (см. [3])

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x) + (1-k)^{-1}\left(t^{1-k}Y_{2-k}(t)\int\limits_0^t \tau^k Y_k(\tau)F(\tau,x)\,d\tau - \right.$$

$$\left. - Y_k(t)\int\limits_0^t \tau Y_{2-k}(\tau)F(\tau,x)\,d\tau\right), \quad k \neq 1\,, \tag{8}$$

$$u(t,x) = [Y_1(t)u_0](x) + Z_1(t)\int\limits_0^t \tau Y_1(\tau)F(\tau,x)\,d\tau - Y_1(t)\int\limits_0^t \tau Z_1(\tau)F(\tau,x)\,d\tau, \quad k=1\,. \tag{9}$$

1. Восстановление зависимости правой части F от времени t. Рассмотрим далее случай задачи (1) – (3), полагая, что неизвестная функция $F(t,x)$ зависит только от t, то есть, $F(t,x) = p(t)$.

Наложим условие согласования

$$\mu(0) = u_0(x_1), \quad \mu'(0) = 0\,, \tag{10}$$

которое необходимо следует из равенств (2), (3) и докажем теорему существования и единственности решения задачи (1) – (3).

Теорема 1. *Пусть $k \in [0,2]$, $\mu(t) \in C^2[0,+\infty)$, $u_0(x) \in C^2(R)$, выполнено условие согласования (10) и при $k > 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mu'(t)}{t}$. Тогда решение обратной задачи (1) – (3) существует, единственно и находится по формулам*

$$p(t) = \mu''(t) + \frac{k}{t}\mu'(t) - [Y_k(t)u_0''](x_1)\,, \tag{11}$$

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x) + (1-k)^{-1}\int\limits_0^t \tau(t^{1-k}\tau^{k-1} - 1)p(\tau)\,d\tau, \quad k \in [0,1)\bigcup(1,2]\,, \tag{12}$$

$$u(t,x) = [Y_1(t)u_0](x) + \int\limits_0^t \tau\ln\frac{t}{\tau}\,p(\tau)\,d\tau, \quad k=1\,. \tag{13}$$

□ При доказательстве теоремы будем различать три случая изменения k.

1) Пусть $k \in [0,1)$. Тогда равенство (8) после некоторых упрощений примет вид (12). Подставляя (12) в дополнительное условие (3), получим уравнение для нахождения $p(t)$

$$u(t,x_1) = [Y_k(t)u_0](x_1) + (1-k)^{-1} \int\limits_0^t \tau(t^{1-k}\tau^{k-1} - 1)p(\tau)d\tau = \mu(t)\,. \tag{14}$$

После двукратного дифференцирования равенства (14) будем иметь

$$\int\limits_0^t \tau^k p(\tau)\; d\tau = t^k \frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right)\,,$$

$$p(t) = \mu''(t) + \frac{k}{t}\mu'(t) - \frac{k}{t}\frac{d}{dt}[Y_k(t)u_0](x_1) - \frac{d^2}{dt^2}[Y_k(t)u_0](x_1)\,,$$

откуда и следует (см. [3], лемма 1) равенство (11). По найденной функции $p(t)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), как уже было сказано, находится единственным образом по формуле (8), которая в рассматриваемом случае $F(t,x) = p(t)$ принимает вид (12).

2) Пусть $k = 1$. Тогда

$$Z_1(t)p(t) = p(t)\left(\frac{\ln t}{\pi}\int\limits_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{-1/2}\; ds + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{-1/2}\ln s\; ds\right)$$

и, используя интеграл 4.253.1 из [4]

$$\int\limits_0^1 x^{\mu-1}(1-x^r)^{\nu-1}\ln x\; dx = \frac{1}{r^2}B\left(\frac{\mu}{r},\nu\right)\left(\Psi\left(\frac{\mu}{r}\right) - \Psi\left(\frac{\mu}{r}+\nu\right)\right)\,,$$

где $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функция, $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ – пси-функция Эйлера, получим

$$Z_1(t)p(t) = \left(\ln t + \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi(1)\right)p(t)\,. \tag{15}$$

Из (9) и (15) выводим представление (13) и подставляя его в дополнительное условие (3), получим уравнение для нахождения $p(t)$

$$u(t,x_1) = [Y_1(t)u_0](x_1) + \int\limits_0^t \tau\ln\frac{t}{\tau}\; p(\tau)\; d\tau = \mu(t)\,. \tag{16}$$

Дифференцируя (16) по t, имеем

$$\int\limits_0^t \tau p(\tau)\; d\tau = t\frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_1(t)u_0](x_1)\right)\,,$$

следовательно,

$$tp(t) = \frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_1(t)u_0](x_1)\right) + t\frac{d^2}{dt^2}\left(\mu(t) - [Y_1(t)u_0](x_1)\right),$$

$$p(t) = \mu''(t) + \frac{1}{t}\mu'(t) - \frac{1}{t}\frac{d}{dt}[Y_1(t)u_0](x_1) - \frac{d^2}{dt^2}[Y_1(t)u_0](x_1),$$

и окончательно,

$$p(t) = \mu''(t) + \frac{1}{t}\mu'(t) - [Y_1(t)u_0''](x_1).$$

По найденной функции $p(t)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), находится единственным образом по формуле (9), которая в рассматриваемом случае $F(t,x) = p(t)$ принимает вид (13).

3) Пусть $k \in (1;2]$. Как и в случае $k \in [0;1)$, имеет место равенство (14), которое мы перепишем в виде

$$(1-k)^{-1}\int\limits_0^t \tau(\tau^{k-1} - t^{k-1})p(\tau)\,d\tau = t^{k-1}\mu(t) - t^{k-1}[Y_k(t)u_0](x_1). \qquad (17)$$

Дважды дифференцируя (17), будем иметь

$$\int\limits_0^t t^{k-2}\tau p(\tau)\,d\tau = (k-1)\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right) + t\frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right),$$

$$tp(t) = k\frac{d}{dt}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right) + t\frac{d^2}{dt^2}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right),$$

после чего дальнейшее доказательство проводится аналогично случаю $k \in [0;1)$. ■

Замечание. Если в задаче (1), (2), (3) правая часть имеет вид $F(t,x) = q(x)p(t)$, где $q(x)$ – известная функция, то вместо уравнений (12), (13) нужно будет записать некоторые уравнения Вольтерра первого рода, которые после наложения условий согласования и дифференцирования превратятся в уравнения Вольтерра второго рода. Обратная задача в этом случае также имеет единственное решение, при этом $p(t)$ может быть найдено методом последовательных приближений.

2. Восстановление зависимости правой части F от пространственной переменной x. Рассмотрим далее случай задачи (1), (2), (4), полагая, что неизвестная функция $F(t,x)$ зависит только от x, то есть, $F(t,x) = q(x)$.

Покажем, что разрешимость обратной задачи (1), (2), (4) будет следовать из разрешимости уравнения

$$\left[\left(I - Y_k(t_1)\right)q\right](x) = [Y_k(t_1)u_0''](x) - \nu(x) \qquad (18)$$

Теорема 2. *Пусть $k \in [0,2]$, $u_0(x)$, $\nu(x) \in C^2(R)$. Тогда каждое непрерывное решение $q(x)$ уравнения (18) и функция*

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x) +$$

$$+(1-k)^{-1}\left[\left(t^{1-k}Y_{2-k}(t)\int\limits_0^t \tau^k Y_k(\tau)\,d\tau - Y_k(t)\int\limits_0^t \tau Y_{2-k}(\tau)\,d\tau\right)q\right](x)\,, \tag{19}$$

являются решением задачи (1), (2), (4).

□ Пусть $k \in [0,1)\bigcup(1,2]$. Тогда полученная из (8) и определяемая равенством (19) функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2). Учитывая (4), для нахождения функции $q(x)$ получим уравнение

$$[Y_k(t_1)u_0](x)+$$

$$+(1-k)^{-1}\left[\left(t_1^{1-k}Y_{2-k}(t_1)\int\limits_0^{t_1} \tau^k Y_k(\tau)\,d\tau - Y_k(t_1)\int\limits_0^{t_1} \tau Y_{2-k}(\tau)\,d\tau\right)q\right](x)=\nu(x)\,,$$

из которого двукратным дифференцированием по x выводим (см. [5]) уравнение (18).

Нетрудно убедиться, что если $q(x)$ – решение уравнения (18), а функция $u(t,x)$ определена равенством (19), то пара $(u(t,x), q(x))$ является решением обратной задачи (1), (2), (4). Если уравнение (18) имеет единственное решение, то и задача (1), (2), (4) также имеет единственное решение.

Аналогично рассматривается случай $k=1$. ■

3. Обратная задача для уравнения вида

$$u''_{tt}+\frac{k}{t}u'_t = u''_{xx}+\frac{m}{x}u'_x + p(t), \quad (t,x)\in\Omega\,, \tag{20}$$

где $0<m\le k$.

Если $u_0(x)\in C^2(R)$, $F(t,x)\in C^2(\bar{\Omega})$ – известные функции, то единственным решением прямой задачи (20), (2) является функция $u(t,x)$, находящаяся по формулам (см. [8]) (8), (9), при этом $Y_k(t)$ и $Y_m(t)$ имеют следующий вид

$$[Y_m(t)f](x)=\frac{\Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(m/2)}\int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{t^2+x^2+2tx\ \cos\varphi}\right)\sin^{m-1}\varphi\,d\varphi,\quad Y_m(0)=I\,, \tag{21}$$

для $k>m>0$

$$[Y_k(t)f](x)=\frac{2}{\mathrm{B}(m/2+1/2,k/2-m/2)}\int\limits_0^1\left(1-s^2\right)^{k/2-m/2-1}s^m\,[Y_m(ts)f](x)\,ds,\quad Y_k(0)=I\,, \tag{22}$$

для $0\le l<m$

$$[Y_l(t)f](x)=\frac{1}{(q-1)(q-3)\cdots(l+1)}\,t^{1-l}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^n\left(t^{q-1}[Y_q(t)f](x)\right)\,, \tag{23}$$

где n – наименьшее целое, такое что $q=2n+l\ge m$;

$$[Z_1(t)f](x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\left(1-s^2\right)^{-1/2}\ \ln\left(t\left(1-s^2\right)\right)[Y_0(ts)f](x)\,ds\,. \tag{24}$$

Теорема 3. *Пусть* $m \in [0;1], k \in [m, 2-m]$, $\mu(t) \in C^2[0,+\infty)$, $u_0(x) \in C^2(R)$, *выполнено условие согласования (10) и при* $k > 0$ *существует конечный предел* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mu'(t)}{t}$. *Тогда решение обратной задачи* (20), (2), (3) *существует, единственно и находится по формулам* (11), (12), (13), *где* $[Y_k(t)f](x)$ *определяется формулой* (22).

□ Несложно убедиться в том, что задаваемые равенствами (21)-(24), операторные функции удовлетворяют следующим равенствам

$$Y_m(t)f(t) = f(t), \quad m > 0\,;$$

$$Y_k(t)f(t) = f(t), \quad k \geq m\,;$$

$$Y_{2-k}(t)f(t) = f(t), \quad m \leq k \leq 2-m\,;$$

$$Z_1(t)f(t) = \left(\ln t + \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi(1)\right) f(t)\,,$$

где $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ – пси-функция Эйлера.

С учётом этих равенств, дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. ■

Обозначим далее

$$g(t) = (k-3)(k-1)\left(\mu''(t) + \frac{k}{t}\mu'(t) - [Y_k(t)u_0''](x_1)\right)\,, \tag{25}$$

и покажем, что решение $p(t)$ обратной задачи (20), (2), (3), в случае $m \in (0;1)$, $k \in (2-m, 2]$, является также непрерывным решением дифференциального уравнения

$$2tp'(t) + (k^2 - 2k + 5)p(t) = g(t)\,. \tag{26}$$

Теорема 4. *Пусть* $m \in (0;1)$, $k \in (2-m, 2]$, $\mu(t) \in C^2[0,+\infty)$, $u_0(x) \in C^2(R)$, *выполнено условие согласования* (10) *и существуют конечные пределы*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mu'(t)}{t}\,, \quad \lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t}\,. \tag{27}$$

Тогда решение обратной задачи (20), (2), (3) *существует, единственно и находится по формулам*

$$p(t) = \frac{1}{2}\, t^{-(k^2-2k+5)/2} \int\limits_0^t \tau^{(k-1)^2/2} g(\tau)\, d\tau\,, \tag{28}$$

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x_1) + \frac{1}{1-k}\int\limits_0^t \tau\left(t^{1-k}\tau^{k-1} + \frac{k-1}{3-k}\right)p(\tau)\, d\tau\,, \tag{29}$$

где $[Y_k(t)u_0](x_1)$ *определяется равенством* (22).

□ Заметим, что, как и при доказательстве теоремы 3, $Y_m(t)f(t) = f(t)$ и $Y_k(t)f(t) = f(t)$. Однако $2-k < m$, а, значит, $Y_{2-k}(t)f(t)$ вычисляется по формуле (23), а не по формуле (22), как это было в теореме 3.

В этом случае $n = 1, q = 4 - k$ и, используя формулу (23), будем иметь

$$[Y_{2-k}(t)f](x) = \frac{1}{3-k}\,t^{-2+k}\frac{d}{dt}\left(t^{3-k}[Y_{4-k}f](x)\right) = \frac{1}{3-k}\,t^{-2+k}\frac{d}{dt}(t^{3-k}f(t)),$$

а из равенства (8) выводим представление (29). Действительно,

$$u(t,x) = [Y_k(t)u_0](x) + \frac{1}{k-1}\left(\frac{t^{-1}}{3-k}\frac{d}{dt}\left(t^{3-k}\int\limits_0^t \tau^k p(\tau)d\tau\right) - \int\limits_0^t \frac{\tau^{-1+k}}{3-k}\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{3-k}p(\tau)\right)d\tau\right) =$$

$$= [Y_k(t)u_0](x) + \frac{1}{1-k}\int\limits_0^t \tau\left(t^{1-k}\tau^{k-1} + \frac{k-1}{3-k}\right)p(\tau)\,d\tau\,.$$

Подставив (29) в дополнительное условие (3) после упрощений получим равенство

$$\int\limits_0^t \tau\left(t^{1-k}\tau^{k-1} + \frac{k-1}{3-k}\right)p(\tau)\,d\tau = (1-k)\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right),$$

которое мы перепишем в виде

$$\int\limits_0^t \tau\left(\tau^{k-1} + \frac{k-1}{3-k}t^{k-1}\right)p(\tau)\,d\tau = (1-k)t^{k-1}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right). \qquad (30)$$

После дифференцирования равенства (30) по t будем иметь

$$(k-1)^2\int\limits_0^t \tau\,p(\tau)\,d\tau + 2t^2p(t) = (3-k)t^{2-k}\frac{d}{dt}\left((1-k)t^{k-1}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right)\right).$$

Еще одно дифференцирование по t приводит нас к сотношению

$$((k-1)^2+4)tp(t) + 2t^2p'(t) = \frac{d}{dt}\left((3-k)t^{2-k}\frac{d}{dt}\left[(1-k)t^{k-1}\left(\mu(t) - [Y_k(t)u_0](x_1)\right)\right]\right),$$

из которого следует, что неизвестная функция $p(t)$ удовлетворяет линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка (26).

Решая его методом вариации произвольной постоянной, получим

$$p(t) = c\;t^{-(k^2-2k+5)/2} + \frac{1}{2}\,t^{-(k^2-2k+5)/2}\int\limits_0^t \tau^{(k-1)^2/2}g(\tau)\,d\tau,$$

с произвольной постоянной c. Так как мы ищем непрерывную функцию $p(t)$, то $c = 0$ и $p(t)$ принимает вид (25). Укажем, что непрерывность $p(t)$ следует из условия (27), в чем можно убедиться с помощью правила Лопиталя.

Для завершения доказательства следует определить функцию $u(t,x)$ по формуле (29). Она определяется единственным образом и теорема тем самым доказана. ■

Литература

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New York: Marcel Dekker,2000.

2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: URSS, 2007.

3. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов. Математика. – 1986. – 6. – С.55-56.

4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматлит, 1963.

5. Глушак А.В., Попова В.А. Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – 16. – С.1-16.

6. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352,5. – С.587-589.

INVERSE PROBLEM FOR EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION

A.N. Babaev, A.V. Glushak

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. It is studied the definition problem of the right-hand side of the Euler-Poisson-Darboux equation by the additional supervision at some spatial point or at some temporal moment.

Key words: Euler-Poisson-Darboux equation, inverse coeffcient problem, unique solvability.