УДК: 533.72

ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ПО СКОРОСТИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА В СФЕРОИДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ[6)]

Н.Н. Миронова

Белгородский государственный университет
ул.Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: mironovanadya@mail.ru

Получено решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат со степенным видом зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры.

Ключевые слова: обтекание, сфероид, уравнение Навье-Стокса.

1. Система уравнений Навье-Стокса, представляющая собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывает движение вязкой ньютоновской среды (газ, жидкость). Она состоит из уравнения движения и уравнения непрерывности. Система уравнений Навье-Стокса является одним из важнейших объектов изучения в математической физике и она применяется для описания многих природных явлений и технических задач [1-3]. К числу очень важных математических вопросов, связанных с системой Навье-Стокса относятся: доказательство существования у неё глобальных гладких решений трёхмерных начально-краевах задач, нахождение общего аналитического решения системы Навье-Стокса для пространственного или плоского потока и т.д. Вплоть до настоящего времени решения системы уравнений Навье-Стокса найдены лишь для некоторых весьма частных случаев [1-3].

При описании движения частиц в разнотемпературных каналах, при зондировании атмосферы лазерным излучением и т.п. средняя температура поверхности частиц может существенно отличаться от температуры окружающей среды вдали от них. В этом случае система уравнений Навье-Стокса решается совместно с уравнениями тепло- и массопереноса. Это связано с тем, что коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) в указанных случаях уже нельзя считать постоянными величинами. В результате получается довольно сложная начально-краевая задача.

При рассмотрении многих прикладных задач газовой динамики общая сила, действующая на рассматриваемую систему, равна нулю, т.е. система движется равномерно и прямолинейно. Например, термофоретическое движение частиц возникает во внешнем поле градиента температуры относительно неподвижного газа. Под действием термофоретической силы и силы вязкого сопротивления среды частицы приобретают постоянную скорость, называемую скоростью термофореза. В таких задачах начало системы отсчёта координат связывают с центром массы частицы (системы). Это удобно, поскольку в этом случае задача, по существу, сводится к задаче обтекания неподвижной частицы (системы) плоскопараллельным потоком газа со скоростью, равной по величине характерной скорости задачи и направленной в противоположную сторону. Таким образом, при математическом

[6]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы (Государственный контракт №П29 от 25 марта 2010 г.)

описании движения частиц в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, в общем случае не конкретизируется. Она может быть магнитной, электрофоретической, термофоретической, гравитационной и т.д., что позволяет распространять математические методы решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса, разработанные для узкой физической задачи, на очень широкий класс физических задач.

Частицы, входящие в состав реальных систем (газ, жидкость), могут иметь форму поверхности, отличную от сферической, например, сфероидальную (вытянутый или сплюснутый эллипсоид вращения). В настоящее время движение аэрозольных частиц несферической формы достаточно подробно изучено лишь при малых относительных перепадах температуры в их окрестности, в так называемом изотермическом случае, когда пренебрегают зависимостью коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. При этом влияние нагрева поверхности на движение аэрозолей было изучено лишь в случае сферической формы.

Нами было получено аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат (τ, η, φ) [2]. При этом предполагалось, что имеют место степенные зависимости коэффициентов вязкости $\mu_g = \mu_\infty\ t_g^\beta$, теплопроводности $\lambda_g = \lambda_{g\infty}\ t_g^\alpha$, $\lambda_p = \lambda_{p\infty}\ t_p^\gamma$ и плотности $\rho_g = \rho_{g\infty}/t_g$ газообразной среды от температуры ($\mu_\infty = \mu_g(T_\infty)$, $\lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_\infty)$, $\rho_{g\infty} = \rho_g(T_\infty)$, $t_g = T_g/T_\infty$, $0,5 \le\ \alpha,\ \beta \le 1$, $-1 \le \gamma \le 1$). Здесь и далее, индексы "g" и "p" будем относить соответственно к газообразной среде и частице; индексом "∞" обозначены параметры газообразной среды на бесконечности в невозмущенном потоке.

Проведенное исследование показало, что при поиске решений в виде выражений для компонент массовой скорости газа в виде

$$U_g(\tau,\eta) = \frac{U_\infty}{cH_\tau\,\mathrm{ch}\tau}\,G(\tau)\,\cos\eta\,, \qquad U_\eta(\tau,\eta) = -\frac{U_\infty}{c\,H_\tau}\,g(\tau)\,\sin\eta\,,$$

где $G(\tau)$ и $g(\tau)$ – некоторые произвольные функции, зависящие от радиальной координаты τ; H_τ – коэффициент Ламе [2]; U_∞ – величина скорости набегающего потока, линеаризованную по скорости систему уравнений Навье-Стокса можно свести к обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению третьего порядка для функции $G(\tau)$ с изолированной особой точкой, решение которого можно получить в виде обобщенных степенных рядов [4-7]. При этом радиус сходимости степенных рядов, определяющих решения полученного уравнения, равен единице.

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

2. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1976. – 630 с.

3. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1986.

4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1961. – 704 с.

5. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

7. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука. 1978. – 224 с.

APPROXIMATED ANALYTIC SOLUTION OF VELOCITY LINEARIZED STOKES EQUATION IN SPHEROIDAL COORDINATE SYSTEM

N.N. Mironova

Belgorod State University
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: mironovanadya@mail.ru

The solution of velocity linearized Stokes equation in spheroidal coordinate system is obtained. It is used the power-type form of the dynamical viscousity dependence on temperature.

Key words: flow around, spheroid, Stokes equation.