УДК 517.987

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ БЕРНУЛЛИЕВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ОДНОРОДНЫХ ДРЕВЕСНЫХ ГРАФАХ

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: antonova_e_s@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается «задача узлов» дискретной теории перколяции на графах типа однородного дерева Кэли. Изучается вероятность перколяции $\mathsf{P}(c)$ однородного бернуллиевского случайного поля из корневой вершины. Доказано, что при любом индексе $s \in \{2, 3, 4, ...\}$ ветвления дерева функция $P(c)$ непрерывна.

Ключевые слова: вероятность перколяции, однородное дерево Кэли, бернуллиевское случайное поле.

1. Введение. Теория перколяции изучает задачи, связанные с понятием связности случайных множеств (см., например, [1]-[3]). Она подразделяется на два самостоятельных направления – дискретная и непрерывная теории перколяции. Несмотря на важность теории для приложений, в особенности в физике твёрдого тела, ввиду чрезвычайной сложности возникающих в ней задач, имеется не так уж много точно установленных математических фактов. Это касается как результатов качественного характера, так и количественных оценок основных перколяционных характеристик с гарантированной точностью. Основные математические достижения в теории перколяции относятся к дискретной её части, которая имеет дело со случайными множествами на бесконечных графах, которые при заданной структуре смежности исходного графа порождают на нём случайные подграфы.

В настоящей работе изучается самая простая модель дискретной теории перколяции, в которой случайное множество индуцируется однородным бернуллиевским случайным полем и бесконечный граф является однородным деревом с постоянным порядком ветвления. Эта модель является исторически первой перколяционной моделью, возникшей ещё до появления термина *перколяция* и формулировки основных понятий теории, а именно, своим появлением она обязана теории ветвящихся марковских случайных процессов с дискретным временем (см., например, [4]), а именно, теории процесса Гальтона-Ватсона. Несмотря на это, до сих пор имеется ряд связанных с рассматриваемой моделью невыясненных принципиальных вопросов. Статья носит, скорее, методический характер и служит введением в проблематику, относящуюся к указанной перколяционной модели.

2. Перколяция на однородном древесном графе. Будем рассматривать бесконечные неориентированные графы $\langle V, \Phi \rangle$, не содержащие петель, где V – множество вершин графа и $\Phi \subset V \times V$ – симметричное подмножество, не содержащее точек диагонали $\{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle; \boldsymbol{x} \in V\}$, которое определяет отношение смежности вершин. В дальнейшем вершины графа мы будем обозначать жирными строчными буквами латинского алфавита. Если пара $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \Phi$, то они называются смежными и отношение их смежности мы будем обозначать $\boldsymbol{x}\varphi\boldsymbol{y}$.

Всякую последовательность $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ... \rangle$ конечную или бесконечную, для которой имеет место $\boldsymbol{x}_k\varphi\boldsymbol{x}_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, ...$, называется путём на графе $\langle V, \Phi \rangle$. При этом первая компонента последовательности называется началом пути. Пути на графе мы будем обозначать греческой буквой γ. Число компонент этой последовательности $\gamma = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ... \rangle$ называется длиной пути и мы будем обозначать эту величину посредством $|\gamma|$. В частности, если последовательность бесконечна, то $|\gamma| = \infty$. Путь называется несамопересекающимся, если для любого $k \in \mathbb{N}_+$ имеет место $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}_{k+l}$, $l \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}_0 \equiv \boldsymbol{x}$.

Определение 1. *Граф $\langle V, \Phi \rangle$ называется однородным деревом с порядком ветвления $s \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, если множество его вершин V состоит из вершины $\mathbf{0}$, которая называется корневой, и множества вершин $\boldsymbol{z}$, которое координатизируется множеством конечных последовательностей $\langle j_1, ..., j_n \rangle$, где $j_k = 1 \div s$, $k = 1 \div n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $V = \{\mathbf{0}\} \cup \{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{z} = \langle j_1, ..., j_n \rangle\}$, $n \in \mathbb{N}$. Множество Φ смежности этого графа определяется следующими отношениями смежности: $\mathbf{0}\varphi\langle j \rangle$ и*

$$\langle j_1, ..., j_n \rangle \varphi \langle j_1, ..., j_n, j \rangle\,, \qquad j = 1 \div s$$

для любой вершины, определяемой последовательностью $\langle j_1, ..., j_n \rangle$ с $j_k = 1 \div s$, $k = 1 \div n$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. *Случайное поле $\langle \tilde{c}(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in V \rangle$ на графе $\langle V, \Phi \rangle$ называется однородным бернуллиевским, если все случайные величины $\tilde{c}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in V$ статистически независимы в совокупности, принимают только два значения $\{0, 1\}$ и одинаково распределены.*

Бернулливское однородное поле полностью определяется значением вероятности $c = \Pr\{\tilde{c}(\boldsymbol{x}) = 1\}$, которую мы будем называть концентрацией. Бернулливское случайное поле на графе индуцирует случайное множество с пространством погружения V, случайные реализации которого определяются формулой $\tilde{C} = \{\,\boldsymbol{x}\colon \tilde{c}(\boldsymbol{x}) = 1\}$. В дальнейшем эти реализации мы называем *конфигурациями*. Каждая случайная конфигурация определяет на графе $\langle V, \Phi \rangle$ случайный подграф, множеством вершин которого служит $\tilde{C}$, а отношение смежности индуцируется отношением смежности Φ исходного графа. При этом пути на исходном графе устанавливают отношение связанности на любом случайном подграфе. Легко понять, что это отношение связности является отношением эквивалентности. Поэтому каждая случайная конфигурация $\tilde{C}$ разбивается дизъюнктивным образом на связные компоненты, согласно введеному понятию эквивалентности.

Обозначим посредством $\tilde{C}_0$ связную компоненту конфигурации, которая содержит корневую вершину $\mathbf{0}$. Если $\mathbf{0} \notin \tilde{C}$, то положим $\tilde{C}_0 = \varnothing$. Вероятность $\Pr\{|\tilde{C}_0| = \infty\} = \mathsf{P}(c)$ называется вероятностью перколяции из корневой вершины (здесь и далее символ $|\cdot|$ обозначает число элементов множества). Если она положительна, то говорят, что из неё имеется перколяция. Очевидно, что данное определение вероятности перколяции эквивалентно следующему

$$\mathsf{P}(c) = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| = \infty)\}.$$

Далее, посредством γ мы обозначаем пути на $\tilde{C}$, начинающиеся в корневой вершине. Если путь начинается в другой вершине, то этот факт мы отмечаем соответствующими индексами. В том случае, когда длина пути γ не меньше, чем n, то будем говорить, что имеется перколяция на расстояние n от корневой вершины. Обозначим вероятность этого случайного события посредством $\mathsf{P}_n(c)$. Таким образом,

$$\mathsf{P}_n(c) = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geqslant n)\}.$$

При этом положим

$$\mathsf{P}_0(c) = \Pr\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing\} = c.$$

Замечание 1. Имеется связь между перколяцией на однородных деревьях и марковскими ветвящимися случайными процессами с дискретным временем [4]. Наличие перколяции с точки зрения теории таких процессов означает, что для них реализуется т.н. *надкритический режим*.

3. Вероятность перколяции. В этом разделе мы обсудим свойства вероятности перколяции из корневой вершины однородного дерева, непосредственно вытекающие из её определения, и покажем как в этом случае она вычисляется.

Обозначим посредством $\mathsf{P}_n(c)$ вероятность перколяции из корневой вершины на расстояние n, то есть вероятность того, что на случайной конфигурации $\tilde{C} = \{\boldsymbol{x}\colon \tilde{c}(\boldsymbol{x}) = 1\}$ существует путь γ из корневой вершины, имеющий длину не менее, чем n. Она является функцией от концентрации $\Pr\{\tilde{c}(\boldsymbol{x}) = 1\} = c$. Таким образом, вероятность $\mathsf{P}_n(c)$ определяется формулой

$$\mathsf{P}_n(c) = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geqslant n)\}.$$

Непосредственно из этого определения, замечаем, что верна

Теорема 1. *Последовательность функций $\langle \mathsf{P}_n(c); n \in \mathbb{N}_+\rangle$ такова, что при каждом $c \in [0,1]$ числовая последовательность $\langle \mathsf{P}_n(c); n \in \mathbb{N}\rangle$ является невозрастающей и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(c)$.*

□ Очевидно, что имеет место включение случайных событий

$$\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geqslant n+1)\} \subset \{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geqslant n)\}.$$

Поэтому для вероятностей этих событий выполняется неравенство, утверждаемое в формулировке теоремы,

$$\mathsf{P}_{n+1}(c) = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geqslant n+1)\} \leqslant \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geqslant n)\} = \mathsf{P}_n(c).$$

Так как $\mathsf{P}_n(c) \geqslant 0$ для любого $c \in [0,1]$, то для всех значений c невозрастающие числовые последовательности $\langle \mathsf{P}_n(c); n \in \mathbb{N}\rangle$ ограничены снизу, что приводит к утверждению теоремы. ■

Следствием этой теоремы является связь между вероятностью перколяции $\mathsf{P}(c)$ и вероятностями $\mathsf{P}_n(c)$, $n \in \mathbb{N}_+$.

Теорема 2. *Имеет место*

$$\mathsf{P}(c) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(c)\,. \tag{1}$$

□ Формула (1) доказывается использованием свойства непрерывности вероятности относительно теоретико-множественного предельного перехода,

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geqslant n)\right\} = \Pr\left(\lim_{n\to\infty}\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geqslant n)\}\right) =$$

$$= \Pr\left\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| = \infty)\right\} = \mathsf{P}(c)\,. \quad \blacksquare$$

Определение 3. *Число*

$$c_* = \inf\{c : \mathsf{P}(c) > 0\}$$

называется порогом перколяции однородного бернуллиевского поля на графе $\langle V, \Phi\rangle$.

Введём вероятности $\mathsf{Q}_n(c) = 1 - \mathsf{P}_n(c)$ того, что на конфигурации $\tilde{C} = \{\boldsymbol{x}: \tilde{c}(\boldsymbol{x}) = 1\}$ все пути γ из корневой вершины графа имеют длину менее n,

$$\mathsf{Q}_n(c) = \Pr\{\forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n)\}\,. \tag{2}$$

Теорема 3. *В каждой точке* $c \in [0, 1]$ *последовательность функций* $\langle \mathsf{Q}_n(c); n \in \mathbb{N}_+\rangle$ *не убывает и имеет предел, равный* $\mathsf{Q}(c) = 1 - \mathsf{P}(c)$.

□ Первая часть утверждения следует из связи $\mathsf{Q}_n(c) = 1 - \mathsf{P}_n(c)$ значений функций Q_n и P_n и из монотонного невозрастания последовательности $\langle \mathsf{P}_n(c); n \in \mathbb{N}_+\rangle$ при каждом $c \in [0, 1]$. Монотонно неубывающая числовая последовательность $\langle \mathsf{Q}_n(c); n \in \mathbb{N}_+\rangle$, $c \in [0, 1]$ всегда имеет предел. На основании (1) это предельное значение $\mathsf{Q}(c)$ равно

$$\mathsf{Q}(c) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{Q}_n(c) = \lim_{n\to\infty} (1 - \mathsf{P}_n(c)) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_n(c) = 1 - \mathsf{P}(c)\,. \quad \blacksquare \tag{3}$$

Свойство невозрастания каждой из функций $\mathsf{Q}_n(c)$, $n \in \mathbb{N}_+$ приводит к тому, что справедлива

Теорема 4. *Функция* $\mathsf{Q}(c)$ *не возрастающая* ($\mathsf{P}(c)$ *не убывающая*) *на* $[0, 1]$.

□ Сформулированное утверждение следует из того, что все функции $\mathsf{Q}_n(c)$, $n \in \mathbb{N}_+$ невозрастающие по c, и поточечный предел последовательности $\langle \mathsf{Q}_n(c); n \in \mathbb{N}_+\rangle$ является невозрастающей функцией. ■

Особенностью перколяции на древесных графах является то, что совокупность вероятностей $\mathsf{Q}_n(c)$, $n \in \mathbb{N}_+$ или совокупность вероятностей $\mathsf{P}_n(c)$, $n \in \mathbb{N}_+$ удовлетворяют соответствующему разностному уравнению, на основе которого они могут быть вычислены, последовательно переходя от значения n к $(n + 1)$.

Теорема 5. *Если однородное дерево имеет порядок ветвления равный $s \in \{2, 3, 4, ...\}$, вероятности $\mathsf{Q}_n(c)$, $n \in \mathbb{N}_+$ связаны уравнением*

$$\mathsf{Q}_{n+1}(c) = 1 - c + c\,\mathsf{Q}_n^s(c)\,. \tag{4}$$

□ Воспользуемся дизъюнктивным разложением

$$\{\forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n+1)\} = \{\tilde{C}_0 = \varnothing\} \cup \{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n+1)\}\,.$$

Второе событие в этом разложении запишем в следующей форме

$$\begin{aligned}\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n+1)\} &= \\ = \{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma_1 \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_1| < n), ..., \forall(\gamma_s \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_s| < n)\} &= \\ = \bigcap_{j=1}^{s} \{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma_j \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_j| < n)\}&\,,\end{aligned}$$

где γ_j – пути, начинающиеся соответственно в вершинах $\langle j\rangle$, $j = 1 \div s$ и несодержащие корневую вершину. События

$$\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma_j \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_j| < n)\}\,, \quad j = 1 \div s$$

условно независимы относительно условия $\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing\}$. Это следует из того, что компонента $\tilde{C}_0$ случайной конфигурации представляется в виде дизъюнктивного объединения путей γ_j, $j = 1 \div s$ и одноточечного множества $\{\mathbf{0}\}$. Тогда

$$\begin{aligned}&\Pr\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n+1)\} = \\ &= \left(\prod_{j=1}^{s} \Pr\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma_j \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_j| < n)|\tilde{C}_0 \neq \varnothing\}\right) \Pr\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing\}\,.\end{aligned}$$

Так как $\Pr\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing\} = c$ и все условные вероятности $\Pr\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma_j \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_j| < n)|\tilde{C}_0 \neq \varnothing\}$, $j = 1 \div s$ совпадают, ввиду однородности дерева, и равны безусловной вероятности $\Pr\{\forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n)\}$, то мы получаем

$$\Pr\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n+1)\} = \mathsf{Q}_n^s(c)\,.$$

Учитывая, кроме того, что $\Pr\{\tilde{C}_0 = \varnothing\} = 1 - c$, находим

$$\Pr\{\tilde{C}_0 \neq \varnothing, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n+1)\} = 1 - c + c\,\mathsf{Q}_n^s(c)\,. \quad \blacksquare$$

Следствие 1. *Вероятности $\mathsf{P}_n(c)$, $n \in \mathbb{N}_+$ подчинены уравнению*

$$\mathsf{P}_{n+1}(c) = c\left(1 - (1 - \mathsf{P}_n(c))^s\right)\,.$$

На основе уравнения (4) вероятности $\mathsf{Q}_n(c)$ вычисляются однозначным образом на при использования "начального" условия $\mathsf{Q}_0(c) = 1 - c$.

Теорема 6. *Все функции $\mathsf{Q}_n(c)$, $n \in \mathbb{N}_+$ – убывающие.*

□ Из уравнения (4) имеем

$$\mathsf{Q}'_{n+1}(c) = \mathsf{Q}^s_n(c) - 1 + sc\,\mathsf{Q}^{s-1}_n(c)\mathsf{Q}'_n(c) \tag{5}$$

и, кроме того, $\mathsf{Q}'_0(c) = -1 < 0$. Так как $\mathsf{Q}^s_n(c) \leqslant 1$, то индукцией по $n \in \mathbb{N}_+$, использующей соотношение (5) в качестве индукционного шага получаем утверждение теоремы. ■

Из рекуррентного соотношения (4) сразу следует

Теорема 7. *Вероятность $\mathsf{Q}(c)$ является решением уравнения*

$$\mathsf{Q}(c) = 1 - c + c\,\mathsf{Q}^s(c)\,, \tag{6}$$

которое подчинено неравенствам $0 \leqslant \mathsf{Q}(c) \leqslant 1$. Точно также вероятность $\mathsf{P}(c)$ является решением уравнения

$$\mathsf{P}(c) = c\,(1 - (1 - \mathsf{P}(c))^s)\,, \quad 0 \leqslant \mathsf{P}(c) \leqslant 1\,.$$

□ Доказательство получается переходом к пределу $n \to \infty$ в (4) с использованием (3). Уравнение для вероятности $\mathsf{P}(c)$ получается из (6) заменой $\mathsf{Q}(c) = 1 - \mathsf{P}(c)$. ■

4. Основная теорема. На основании следующего утверждения будет дан ответ на вопрос о поведении вероятности $\mathsf{Q}(c)$, как функции от концентрации c.

Лемма. *Пусть значения каждой из совокупности функций $\{h_s(\cdot, c) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}; c \in [0,1], s \in \{2,3,...\}\}$ определяются формулой*

$$h_s(z,c) = cz^s - z + 1 - c\,, \qquad z \in [0,1]\,. \tag{7}$$

Тогда уравнение

$$h_s(z,c) = 0 \tag{8}$$

имеет:

1) *единственный корень $z = 1$ при условии $cs \leqslant 1$;*

2) *два корня $\{1, z_*(c)\}$, $z_*(c) < 1$ при условии $cs > 1$.*

□ Функция $h_s(z,c)$ выпукла по z, и поэтому уравнение (2) имеет не более двух корней. При любых значениях $c \in [0,1]$ это уравнение имеет корень $z = 1$, $h_s(1,c) = 0$.

Так как $h_s(0,c) = 1 - c > 0$, то для того чтобы существовал на интервале $(0,1)$ единственный корень, необходимо и достаточно чтобы минимум функции $h_s(\cdot, c)$ достигался на $(0,1)$ и был отрицателен.

Точкой минимума функции $h_s(\cdot, c)$ является $z_m = (sc)^{-1/(s-1)}$. Из этого выражения видно, что $z_m \in (0,1)$ тогда и только тогда, когда $cs > 1$. Таким образом, при $cs \leqslant 1$

функция $h_s(\cdot, c)$ не имеет минимума на $(0,1)$, и поэтому $h_s(z,c) > 0$, $z \in (0,1)$, что доказывает утверждение 1) леммы.

Пусть $cs > 1$. Тогда

$$h_s(z_m, c) = c^{-1/(s-1)}\left(s^{-s/(s-1)} - s^{-1/(s-1)}\right) + 1 - c =$$

$$= c^{-1/(s-1)}\left[c^{1/(s-1)}(1-c) - s^{-1/(s-1)}(1-s^{-1})\right]. \tag{9}$$

Определим значения функции $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ формулой $g(y) = y(1-y^{s-1})$. Эта функция достигает максимума на $[0,1]$ в точке $s^{-1/(s-1)}$. Следовательно, полагая $y = c^{1/(s-1)}$, имеем $g\left(c^{1/(s-1)}\right) < g\left(s^{-1/(s-1)}\right)$ при $c \neq 1/s$ или, что эквивалентно,

$$c^{1/(s-1)}(1-c) < s^{-1/(s-1)}(1-s^{-1}).$$

Поэтому из выражения (9) следует, что $h_s(z_m, c) < 0$. Это означает, что в рассматриваемом случае существует единственный корень $z_*(c)$ уравнения (8) на интервале $(0,1)$.

Так как $h_s(0,c) > 0$, то из утверждения 2) леммы следует, что необходимым и достаточным условием для выполнимости неравенства $h_s(z,c) > 0$ является условие $z < z_*(c)$. ■

Следующая теорема выявляет строение функции $\mathsf{Q}(c)$, которая является решением уравнения (6). При её доказательстве, казалось бы, естественно было использовать теорему о неявной функции. Однако, оказывается, гораздо проще воспользоваться ограничением, которое возникает вследствие утверждения доказанной леммы, благодаря предельному соотношению (3) и разностному уравнением (4).

Теорема 8. *Функция* $\mathsf{Q}(c)$ $(\mathsf{P}(c))$ *определяется следующими формулами:*
1) $\mathsf{Q}(c) \equiv 1$ $(\mathsf{P}(c) \equiv 0)$ *при* $c \leqslant s^{-1}$;
2) $\mathsf{Q}(c) = z_*(c)$ $(\mathsf{P}(c) = 1 - z_*(c))$ *при* $c > s^{-1}$.

□ Утверждение 1) тривиально, так как решение уравнения (6) единственно и равно 1 при $c \leqslant s^{-1}$.

Ввиду того, что при каждом $c \in [0,1]$ выполняется $\mathsf{Q}_{n+1}(c) \geqslant \mathsf{Q}_n(c)$, используя (4), получаем неравенство

$$c\,\mathsf{Q}_n^s - \mathsf{Q}_n(c) + 1 - c \geqslant 0,$$

то есть $h_s(\mathsf{Q}_n(c), c) > 0$, что эквивалентно неравенству (см. емма 3) $\mathsf{Q}_n(c) \leqslant z_*(c) < 1$. Переходя к пределу $n \to \infty$ в этом неравенстве, на основании (2), имеем $\mathsf{Q}(c) \leqslant z_*(c) < 1$. С другой стороны, так как при каждом $c \in [0,1]$ функция $\mathsf{Q}(c)$ может быть равна только либо $z_*(c)$, либо 1, то $\mathsf{Q}(c) = z_*(c)$. ■

Заметим, что при доказательстве теоремы не было использовано *a priori* свойство непрерывности функции $\mathsf{Q}(c)$, которое само нуждается в отдельном доказательстве (см. **Следствие 3**).

Следствие 2. *Точка* $c = s^{-1}$ *является порогом перколяции случайного однородного бернуллиевского поля на однородном древесном графе с порядком ветвления* s.

Следствие 3. *Функция* $\mathsf{Q}(c)$ *вещественно-аналитична на* $(1/s, 1)$ *и непрерывна в точке* $c = 1/s$.

□ Функция $\mathsf{Q}(c)$ является вещественно-аналитической на $(1/s, 1)$, так как она в этом случае определяется как ветвь аналитической функции, являющейся решением уравнения $h_s(z, c) = 0$, коэффициенты которого аналитическим образом зависят от c.

Функция $\mathsf{Q}(c)$ непрерывна при $c \in [0, 1]$, так как она непрерывна на $[0, 1/s)$ и $(1/s, 1]$. Кроме того, $z_*(c) \to 1$ при $c \to 1/s + 0$, так как в этом случае $z_m \to z_*(c)$ и $h_s(z_m, c) \to 0$. ■

Непрерывность функции в $\mathsf{Q}(c)$ в точке $c = 1/s$, где у неё имеется особенность, с физической точки зрения означает, что в этой точке происходит фазовый переход второго рода.

Следствие 4. *При $c > 1/s$ функция $\mathsf{Q}(c)$ подчинена неравенству*

$$sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c) < 1\,. \tag{10}$$

□ Так как функция $\mathsf{Q}(c)$ – вещественно-аналитическая при $c > 1/s$, то $|\mathsf{Q}'(c)| < \infty$ при этих значениях c, и поэтому из уравнения (6) следует

$$\mathsf{Q}'(c)\left(1 - sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c)\right) = \mathsf{Q}^s(c) - 1\,. \tag{11}$$

Это указывает на то, что $1 \neq sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c)$. С другой стороны, при $\mathsf{Q}(1) = 0$, то есть неравенство (10) выполняется в точке $c = 1$. Поэтому, по непрерывности, ввиду необращаемости в нуль функции $(1 - sc\mathsf{Q}^{s-1}(c))$ на $(1/s, 1]$, получаем, что (10), действительно, имеет место на этом полуинтервале. ■

Замечание 2. Неравенство (10) можно доказать непосредственно. Так как функция $h_s(\cdot, c)$ выпукла, то есть $\partial h_s(z, c)/\partial z$ монотонно возрастает по $z \in \mathbb{R}$, имеем неравенство

$$\frac{\partial h_s(z, c)}{\partial z} > \left(\frac{\partial h_s(z, c)}{\partial z}\right)_{z = z_*(c)} \tag{12}$$

при $z > z_*(c)$. Положим $z = z_m$. Так как в точке $z = z_m$ реализуется отрицательный минимум, а в точке $z_*(c)$ происходит пересечение нулевого уровня слева от точки минимальности, то $z_m > z_*(c)$, и поэтому неравенство (12) выполняется. Заметив, что

$$\left(\frac{\partial h_s(z, c)}{\partial z}\right)_{z = z_m} = s z_m^{s-1} - 1 = 0\,,$$

получим из (16) неравенство $sc z_*^{s-1}(c) - 1 < 0$, эквивалентное (10).

Теорема 9. *При $c > 1/s$ производная $\mathsf{Q}'(c)$ определяется формулой*

$$\mathsf{Q}'(c) = \frac{\mathsf{Q}^s(c) - 1}{1 - cs\mathsf{Q}^{s-1}(c)} \tag{13}$$

и строго отрицательна, то есть $\mathsf{Q}(c)$ монотонно убывает.

□ Отрицательность следует из того $\mathsf{Q}(c) < 1$ при $c > 1/s$ и неравенства (10). ■

Замечание 3. Монотонное убывание функции $\mathsf{Q}(c)$ следует также из монотонного убывания каждой из функций $\mathsf{Q}_n(c)$, $n \in \mathbb{N}_+$ и предельного соотношения (3), так как предел последовательности монотонно убывающих функций является монотонно невозрастающей функцией.

Следствие 5. *Имеет место формула*

$$\lim_{c \to 1/s+0} \mathsf{Q}'(c) = -\frac{2s}{s-1}\,. \tag{14}$$

□ Так как

$$\lim_{c \to 1/s+0} \frac{\mathsf{Q}^l(c) - 1}{\mathsf{Q}(c) - 1} = l\,, \qquad l \in \mathbb{N}\,,$$

то, используя значение этого предела при $l = s, s-1$,

$$A \equiv \lim_{c \to 1/s+0} \mathsf{Q}'(c) = \lim_{c \to 1/s+0} \frac{\mathsf{Q}^s(c) - 1}{1 - sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c)} = s \lim_{c \to 1/s+0} \frac{\mathsf{Q}(c) - 1}{1 - sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c)} =$$

$$= \frac{s}{\lim\limits_{c \to 1/s+0} \dfrac{1 - cs}{\mathsf{Q}(c) - 1} - s + 1}\,.$$

Предел, стоящий в знаменателе последнего выражения, на основе правила Лопиталя, сводится к

$$\lim_{c \to 1/s+0} \frac{1 - sc}{\mathsf{Q}(c) - 1} = -\frac{s}{s/A + (s-1)}\,.$$

Отсюда следует уравнение ($A \neq 0$)

$$1 = -\frac{s}{s + (s-1)A}\,,$$

решение которого даёт формулу (14). ■

Конечность правой производной функции $\mathsf{Q}(c)$ в точке $1/s$, с физической точки зрения, означает, что возникновение новой фазы в точке фазового перехода происходит без появления "критического режима", что является нетипичным в статистической физике.

Теорема 10. *При $c > 1/s$ производная $\mathsf{Q}''(c)$ равна*

$$\mathsf{Q}''(c) = \frac{s\mathsf{Q}^{s-2}(c)(1 - \mathsf{Q}(c))}{(1 - sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c))^3} H_s(c)\,, \tag{15}$$

где значения функции $H_s : [1/s, 1] \mapsto \mathbb{R}$ определяются формулой

$$H_s(c) = 2sc + (s-1)\mathsf{Q}(c) - (s+1)\,.$$

Она строго положительна, то есть $\mathsf{Q}(c)$ выпукла.

□ Дифференцируя согласно формуле (13), получаем

$$\mathsf{Q}''(c) = \frac{s\mathsf{Q}^{s-2}(c)}{(1-sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c))^2}\times$$

$$\times\left[\mathsf{Q}'(c)\left(c(s-1)(\mathsf{Q}^s(c)-1)+\mathsf{Q}(c)(1-sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c))\right)+\mathsf{Q}(c)(\mathsf{Q}^s(c)-1)\right] =$$

$$= \frac{s\mathsf{Q}^{s-2}(c)(1-\mathsf{Q}(c))}{(1-sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c))^3}\left[c(s-1)(1-\mathsf{Q}^s(c))-2\mathsf{Q}(c)(1-sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c))\right] =$$

$$= \frac{s\mathsf{Q}^{s-2}(c)(1-\mathsf{Q}(c))}{(1-sc\,\mathsf{Q}^{s-1}(c))^3}\left[2sc+(s-1)\mathsf{Q}(c)-(s+1)\right],$$

где мы воспользовались уравнением (6) для преобразования выражения в квадратных скобках. Таким образом, получаем формулу (15). Тогда

$$H_s'(c) = (s-1)\mathsf{Q}'(c)+2s\,,\quad H_s''(c) = (s-1)\mathsf{Q}''(c)\,. \tag{16}$$

Так как $\mathsf{Q}(1)=0$, $\mathsf{Q}'(1)=-1$, то $H_s(1)=H_s'(1)=(s+1)$ и, проинтегрировав (16), получаем интегральное представление для функции H_s,

$$H_s(c) = (s+1)(2-c)+(s-1)\int_c^1 d\xi\int_\xi^1 \mathsf{Q}''(\eta)d\eta\,. \tag{17}$$

Пусть c' и c'' точки, ближайшие к 1 слева от неё, в которых соответственно $H_s(c)$ и $\mathsf{Q}''(c)$ обращаются в нуль. Тогда из (17) следует, что $c'<c''$, и поэтому на интервале (c',c'') выполняется $\mathsf{Q}''(c)<0$. С другой стороны, из (15) следует, что это невозможно. Таким образом, $H_s(c)>0$ и $\mathsf{Q}''(c)>0$ одновременно на полуинтервале $(1/s,1]$. ■

Пример. Рассмотрим отдельно случай $s=2$. Последовательность $\langle \mathsf{Q}_n(c); n\in\mathbb{N}_+\rangle$ определяется разностным уравнением (см. (4))

$$\mathsf{Q}_{n+1}(c) = 1-c+c\,\mathsf{Q}_n^2(c)$$

и начальным условием $\mathsf{Q}_0(c)=1-c$. На основе этого рекуррентного соотношения, индукцией по $n\in\mathbb{N}_+$, устанавливается неравенство $\mathsf{Q}_n(c)<(2c)^{-1}$. А именно, так как $\mathsf{Q}_0(c)=1-c<(2c)^{-1}$, ввиду $c(1-c)\leqslant 1/4$ при $c\in[0,1]$, используя индукционный шаг, находим

$$\mathsf{Q}_{n+1}(c)\leqslant 1-c+(4c)^{-1}\leqslant(2c)^{-1}\,.$$

Так как при каждом фиксированном $c\in(0,1)$ функция $\mathsf{Q}_n(c)$ стремится к вероятности $\mathsf{Q}(c)$, то $\mathsf{Q}(c)\leqslant(2c)^{-1}$.

Таким образом, из двух решений

$$\mathsf{Q}_\pm(c) = \frac{1}{2c}(1\pm\sqrt{1/4-c(1-c)}\,) = \frac{1}{2c}(1\pm|1-2c|)\,,$$

$\{\mathsf{Q}_+(c) = 1, \mathsf{Q}_-(c) = (1-c)/c\}$ уравнения (6) с $s = 2$,

$$\mathsf{Q}(c) = 1 - c + c\,\mathsf{Q}^2(c)\,,$$

при $c > 1/2$ нужно выбрать то, которое подчинено неравенству $\mathsf{Q}(c) < (2c)^{-1}$ при $c > 1/2$. Этим свойством обладает только решение $\mathsf{Q}_-(c) = c^{-1}(1-c)$. То же самое следует из условия неубывания последовательности $\langle \mathsf{Q}_n(c); n \in \mathbb{N}_+\rangle$. Неравенство $\mathsf{Q}_{n+1}(c) \geqslant \mathsf{Q}_n(c)$ даёт

$$c\,\mathsf{Q}_n^2(c) - \mathsf{Q}_n(c) + 1 - c \geqslant 0\,.$$

Это неравенство может быть удовлетворено только при $\mathsf{Q}_n(c) \leqslant \mathsf{Q}_-(c)$, либо $\mathsf{Q}_n(c) \geqslant \mathsf{Q}_+(c) = 1$. Второе невозможно, так как $\mathsf{Q}_n(1) = 0$.

Непосредственное вычисление

$$\mathsf{Q}'(c) = -1/c^2\,, \quad \mathsf{Q}'(1/2+0) = -4\,, \qquad \mathsf{Q}''(c) = 2/c^3$$

указывает на то, что $\mathsf{Q}(c)$ монотонно убывает и выпукла на $[1/2, 1]$.

5. Заключение. В статье математически корректно доказаны основные свойства вероятности перколяции $\mathsf{P}(c)$, как функции от концентрации c, для однородного бернуллиевского случайного поля (или, в другой терминологии, в задаче узлов) на однородных бесконечных древесных графах. Единственной нерешённой проблемой для графов указанного типа остаётся доказательство того факта, что функции $\mathsf{P}_n(c)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют ровно одну точку перегиба на $(0,1)$, то есть уравнения $\mathsf{P}''_n(c) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ имеют при каждом $n \in \mathbb{N}$ на $(0,1)$ ровно одно решение. Этот факт усматривается в компьютерных экспериментах при значениях n, меньших 10, однако, общее доказательство его правильности отсутствует.

Все доказательства в этой работе построены на рекуррентном соотношении (4) для вероятностей $\mathsf{Q}_n(c)$. Его наличие тесно связано с тем, что граф имеет древесную структуру. Для более сложных графов, в которых имеются циклы, соотношения, подобные (4), отсутствуют. Поэтому доказательства общих качественных свойств вероятности перколяции таких, как непрерывность, наличие одной точки c_*, в которой $\mathsf{P}(c)$ не является аналитической, вогнутость $\mathsf{P}(c)$ при $c > c_*$ в настоящее время отсутствуют.

Литература

1. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians/ H. Kesten. – Boston: Birkhauser, 1982.

2. Grimmett G. Percolation. 2nd Edition/ G. Grimmet. – New York: Springer-Verlag, 1999.

3. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы/ Ю.Ю. Тарасевич. – Москва: Эдиториал УРСС, 2002.

4. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы / Б.А. Севастьянов. – М.: Наука, 1971. – 436 с.

CONTINUITY OF BERNOULLI RANDOM FIELD PERCOLATION PROBABILITY OF UNIFORM TREE GRAPHS

E.S. Antonova Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: antonova_e_s@mail.ru
Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The cite problem for arbitrary infinite graphs $\Lambda(V, \Phi)$ in discrete percolation theory is considered. Graphs under consideration are so-called uniform Caley trees. The percolation probability $\mathsf{P}(c)$ of the uniform Bernoulli random field from the root vertex is studied. It is proved that the function $\mathsf{P}(c)$ is continuous at any branching index $s \in \{2, 3, 4, ...\}$ of the tree.

Key words: percolation probability, uniform Caley tree, Bernoulli random field.