УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ОБ ОДНОЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Св.А. Гриценко, Р.Н. Зимин

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 15, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru,reshat85@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается система уравнений Стокса, описывающая движение слабосжимаемой вязкой жидкости в поровом пространстве, в которой кинематическая вязкость жидкости зависит от концентрации примеси. Рассматриваемая система дополняется уравнением диффузии для примеси как в жидкости, так и в твердом скелете, содержащем поровое пространство. Последнее предположение о диффузии в твердом скелете является искусственным и носит вспомогательный характер. Для полученной вспомогательной задачи доказывается существование обобщенного решения начально-краевой задачи в ограниченной области с однородным условием Дирихле для скорости жидкости и однородным условием Неймана для концентрации примеси.

Ключевые слова: Уравнения Стокса, вязкая жидкость, нелинейная диффузия.

1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ $(\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \cup S)$ ограниченная область с липшицевой границей S, $\mathbf{v}(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ - скорость жидкости, $p(x,t)$ - давление, $c(x,t)$ - концентрация примеси, x - безразмерная координата: $x = \acute{x}/L$, где L - характерный размер, t - безразмерное время: $t = \acute{t}/\tau$, где τ - характерное время.

В области Ω_f с липшицевой границей Γ рассматривается следующая система уравнений:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div}\Big(\alpha_\mu \mu(c) \nabla \mathbf{v} + \big(\alpha_\nu (\operatorname{div}\mathbf{v}) - p\big)\mathbb{I}\Big) + \rho \mathbf{f}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad \mathbf{v}(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega_f, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D \triangle c,$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad c(x,0) = c_0(x), \tag{1.4}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ, $\mu(c)$ – безразмерная вязкость, $\mathbb{I}$ - единичная матрица, D — коэффициент диффузии.

Эта задача является основной при изучении диффузии в пористой среде, при этом область Ω_f моделирует поровое пространство в твердом скелете Ω_s. Очевидно, что даже при наличии достаточно гладкого и единственного решения этой задачи, его практическая значимость ничтожно мала, поскольку ни его численная реализация, ни изучение его качественных свойств невозможны в силу быстро осциллирующих коэффициентов уравнений движения и диффузии. Поэтому естественным является усреднение задачи – вывод приближенных уравнений, не содержащих быстро осциллирующих коэффициентов. На этом пути возникают трудности, связанные с усреднением нелинейных членов, что диктует рассмотрение вспомогательной задачи с "малой"диффузией в твердом скелете:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c = \operatorname{div}\big((\alpha_D\,\chi + \lambda(1-\chi))\nabla c\big), \tag{1.5}$$

здесь $\lambda > 0$, $\chi(x)$ — характеристическая функция области Ω_f.

Задача (1.1) – (1.3), (1.5), дополненная краевым условием

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in S = \partial\Omega, \quad c(x,0) = c_0(x), \quad \text{при } \ x \in \Omega \tag{1.6}$$

является основным объектом исследования настоящей работы.

Усреднение и предельный переход при $\lambda \to 0$ будет предметом дальнейших публикаций.

Определение 1.1 *Функции $\mathbf{v}(x,t)$, $p(x,t)$ и $c(x,t)$ называются обобщенным решением задачи (1.1) – (1.3), (1.5)—(1.6) в области $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$, если*

1) $\partial p/\partial t \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$, $\quad \mathbf{v} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, $\quad c \in \mathbb{L}^\infty(\Omega_T) \bigcap \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (1.2)

3) функции $\mathbf{v}$, p и c удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_T}\Big(\alpha_\tau \mathbf{v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha_\mu\,\mu(c)\nabla\mathbf{v} : \nabla\varphi - \alpha_\nu\, div\mathbf{v}\, div\varphi + p\, div\varphi\Big)\ dxdt = -\int_{\Omega_T}\rho\mathbf{f}\cdot\varphi\ dxdt \tag{1.7}$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(x,t)$, равной нулю на границе Γ и при $t = T$,

$$\int_{\Omega_T}\left(c\,\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathbf{v}\cdot\nabla c\ \psi - (\alpha_D\,\chi + \lambda(1-\chi))\ \nabla c\cdot\nabla\psi\right)dxdt = -\int_{\Omega} c_0(x)\psi(x,0)dx \tag{1.8}$$

для произвольной гладкой функции $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega_T)$, равной нулю на границе Γ и при $t = T$.

Здесь используется обозначение: $A : B \equiv tr(AB^T)$, где A и B – квадратные матрицы.

Пусть

$$\mu(c) \in \mathbb{C}^2(0,\infty),\ |\mu|^{(1)}_{\Omega_T} < \nu_0^{-1}, \quad 0 < \nu_0 < \mu(c) < \nu_0^{-1}, \quad 0 \le c_0(x) \le 1, \ \ c_0(x) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega),$$

$$\int_{\Omega_T}|\rho\mathbf{f}|^2 dxdt = F^2 < \infty,$$

α_μ, α_ν, α_p - положительные ограниченные постоянные;

$$0 < \alpha_\mu < \nu_0^{-1}, \ \ 0 < \alpha_\nu < \nu_0^{-1}, \ \ 0 < \alpha_p < \nu_0^{-1}.$$

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1.2 *Задача (1.1)–(1.3), (1.5)—(1.6) имеет обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega}(\alpha_\tau|\mathbf{v}|^2+\frac{1}{\alpha_p}|p|^2)dx+\alpha_\nu\int_{\Omega_T}|div\,\mathbf{v}|^2dxdt+\alpha_\mu\nu_0\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{v}|^2dxdt\leqslant M_0(\nu_0,T)F^2, \quad (1.9)$$

$$0\leqslant c(x,t)\leqslant 1. \quad (1.10)$$

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega}|c|^2dx+\int_{\Omega_T}\big(\alpha_D\chi+\lambda(1-\chi)\big)|\nabla c|^2dx\leq M(\nu_0,T)F^2. \quad (1.11)$$

2 Вспомогательные задачи

Зададим множество $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}=\{\bar{c}(x,t)\in\mathbb{C}(\Omega_T)\ \mid\ 0\leq\bar{c}(x,t)\leq 1\}.$$

Пусть $\bar{c}(x,t)\in\mathfrak{M}$. Определим $\mathbf{u}(x,t)$ как решение задачи (1.1)–(1.3) с функцией $\mu(\bar{c})$:

$$\alpha_\tau\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\operatorname{div}\left(\alpha_\mu\mu(\bar{c})\nabla\mathbf{u}+\alpha_\nu(\operatorname{div}\mathbf{u})-q\right)\mathbb{I}+\rho\mathbf{f}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\alpha_p\operatorname{div}\mathbf{u}=0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=0 \quad \text{при } \mathbf{x}\in\Gamma, \quad \mathbf{u}(x,0)=0. \quad (2.3)$$

Определение 2.1 *Функции $\mathbf{u}(x,t)$, $q(x,t)$ называются обобщенным решением задачи (3.1) – (3.3) в области Ω_T, если*

1) $\partial q/\partial t\in\mathbb{L}^2(\Omega_T)$, $\mathbf{u}\in\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (3.2);

3) функции $\mathbf{u}(x,t)$, $q(x,t)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T}(\alpha_\tau\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\alpha_\mu\,\mu(\bar{c})\nabla\mathbf{u}:\nabla\varphi+q\;div\varphi-\alpha_\nu\;div\mathbf{u}div\varphi)\;\;dxdt=-\int_{\Omega_T}\rho\mathbf{f}\cdot\varphi\;\;dxdt \quad (2.4)$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(x,t)$, равной нулю на границе Γ и при $t=T$.

Лемма 2.2 *Для каждого фиксированного $\bar{c}(x,t)\in\mathfrak{M}$ задача (3.1) – (3.3) имеет единственное решение и для него справедлива оценка:*

$$\max_{0<t<T}\int_{\Omega}(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2+\frac{1}{\alpha_p}|q|^2)dx+\alpha_\nu\int_{\Omega_T}|div\mathbf{u}|^2dxdt+\alpha_\mu\nu_0\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt\leqslant M_0(\nu_0,T)F^2. \quad (2.5)$$

Доказательство.

В тождестве (3.4) выражая div**u** в третьем слагаемом из уравнения неразрывности (3.2) получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\alpha_\tau \mathbf{u}^2 + \frac{1}{\alpha_p}q^2)dx + \int_\Omega\big(\alpha_\nu(\mathrm{div}\mathbf{u})^2 + \alpha_\mu\mu(\bar{c})(\nabla\mathbf{u})^2\big)dx = -\int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}dx.$$

Проинтегрируем последнее равенство от 0 до T , учтем предположение $0 < \nu_0 < \mu(c) < \nu_0^{-1}$, а правую часть оценим с помощью неравенств Гельдера и Коши с ε:

$$\frac{1}{2}\max_{0<t<T}\int_\Omega(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}|q|^2)dx + \alpha_\nu\int_{\Omega_T}|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2dxdt + \alpha_\mu\nu_0\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega_T}(\rho\mathbf{f})^2dxdt + \frac{\varepsilon T}{2}\max_{0<t<T}\int_\Omega|\mathbf{u}|^2dx$$

для $\forall\varepsilon > 0$.

Положив $\varepsilon = \alpha_\tau/2T$, получим требуемую оценку

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}|q|^2)dx + \alpha_\nu\int_{\Omega_T}|\mathrm{div}\mathbf{u}|^2dxdt + \alpha_\mu\nu_0\int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt \leqslant M_0(\nu_0, T)F^2.$$

Эта оценка позволяет доказать существование и единственность обобщенного решения методом Фаэдо - Галеркина, подробное изложение которого можно найти, например в [2, с. 88]. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{N}$ - нормированное пространство с нормой:

$$(\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2 = \int_{\Omega_T}|\nabla\mathbf{u}|^2dxdt. \tag{2.6}$$

В силу леммы 3.1 определен оператор $\mathbf{A} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ такой, что $\mathbf{u} = \mathbf{A}(\overline{c})$.

Лемма 2.3 *Оператор* $\mathbf{A}$ *- непрерывный.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}(\overline{c}_1), \mathbf{u}_2 = \mathbf{A}(\overline{c}_2), \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2, \overline{c} = \overline{c}_1 - \overline{c}_2, q = q_1 - q_2$. Тогда для разности $\mathbf{u}$ имеем:

$$\alpha_\tau\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = \mathrm{div}\,(\alpha_\mu(\mu(\bar{c}_1)\nabla\mathbf{u}_1 - \mu(\bar{c}_2)\nabla\mathbf{u}_2) + \alpha_\nu(\mathrm{div}\mathbf{u}) - q)\mathbb{I}$$

$$\mu(\bar{c}_1)\nabla\mathbf{u}_1 - \mu(\bar{c}_2)\nabla\mathbf{u}_2 = \mu(\bar{c}_1)\nabla\mathbf{u}_1 - \mu(\bar{c}_1)\nabla\mathbf{u}_2 + \mu(\bar{c}_1)\nabla\mathbf{u}_2 - \mu(\bar{c}_2)\nabla\mathbf{u}_2 =$$

$$= \mu(\bar{c}_1)\nabla\mathbf{u} + (\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2))\nabla\mathbf{u}_2.$$

Таким образом $\mathbf{u}$ есть решение следующей задачи:

$$\alpha_\tau\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = \mathrm{div}\,(\alpha_\mu\mu(\bar{c}_1)\nabla\mathbf{u} + \alpha_\nu(\mathrm{div}\mathbf{u}) - q)\mathbb{I} + \alpha_\mu\mathrm{div}\,([\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2)]\nabla\mathbf{u}_2), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0, \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Умножим уравнение (3.7) на функцию $\mathbf{u}$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\int_\Omega \alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx = \int_\Omega \mathrm{div}\,(\alpha_\mu \mu(\bar{c}_1)\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} dx + \alpha_\nu \int_\Omega \mathrm{div}\,((\mathrm{div}\mathbf{u}) - q))\mathbb{I} \cdot \mathbf{u} dx +$$

$$+\alpha_\mu \int_\Omega \mathrm{div}\,([\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2)]\nabla \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u} dx.$$

Выполняя интегрирование по частям и выражая $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ из уравнения неразрывности, имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} q^2) dx + \int_\Omega \big(\alpha_\nu (\mathrm{div}\mathbf{u})^2 + \alpha_\mu \mu(\bar{c}_1)(\nabla \mathbf{u})^2\big) dx =$$

$$= -\int_\Omega \alpha_\mu (\mu(\bar{c}_2) - \mu(\bar{c}_1))(\nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u}) dx.$$

Проинтегрировав последнее равенство от 0 до T, получим:

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega (\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}|q|^2) dx + 2\alpha_\nu \int_{\Omega_T} (\mathrm{div}\mathbf{u})^2 dxdt + 2\alpha_\mu \int_{\Omega_T} \mu(\bar{c}_1)|\nabla \mathbf{u}|^2 dxdt =$$

$$= -2\alpha_\mu \int_{\Omega_T} (\mu(\bar{c}_2) - \mu(\bar{c}_1))(\nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u}) dxdt. \tag{2.8}$$

Оценим теперь правую часть (3.8), пользуясь ограниченностью производной $\mu'(\bar{c})$, неравенством Гёльдера и неравенством Коши с ε:

$$|2\alpha_\mu \int_{\Omega_T} (\mu(\bar{c}_2) - \mu(\bar{c}_1))(\nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u}) dxdt| \leqslant \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \int_{\Omega_T} |\bar{c}\nabla \mathbf{u}_2 : \nabla \mathbf{u}| dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \sqrt{\int_{\Omega_T} |\bar{c}\nabla \mathbf{u}_2|^2 dxdt} \sqrt{\int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{u}|^2 dxdt} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \Big(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_T} |\bar{c}\nabla \mathbf{u}_2|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{u}|^2 dxdt\Big).$$

Левую часть (3.8) оценим снизу выражением:

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega (\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}|q|^2) dx + \alpha_\nu \int_{\Omega_T} (\mathrm{div}\mathbf{u})^2 dxdt + \alpha_\mu \nu_0 \int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{u}|^2 dxdt,$$

положим $\varepsilon = \nu_0^2/2$ и воспользуемся оценкой (3.5) для $|\nabla \mathbf{u}_2|$. Получим:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2 \leqslant M_1(\nu_0, T)F^2 \int_{\Omega_T} |\bar{c}|^2 dxdt \leqslant M_1(\nu_0, T)F^2 (\|\bar{c}\|_{2,\Omega_T})^2 \leqslant$$

$$\leqslant M_1(\nu_0, T)F^2 |\Omega_T| (\max_{\Omega_T} |\bar{c}|)^2 = M_2(\nu_0, T, \Omega_T)F^2 (|\bar{c}^{(0)}_{\Omega_T}|)^2.$$

Таким образом, $\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}} \leqslant M_2(\nu_0, T, \Omega_T)|\bar{c}|^{(0)}_{\Omega_T}$, что и влечет непрерывность оператора $\mathbf{A}$. Лемма доказана.

Полученную функцию $\mathbf{u}$ и выражение $D(x) = \alpha_D\,\chi(x) + \lambda\big(1 - \chi(x)\big)$ сгладим с использованием следующих операторов усреднения по переменным x и t:

$$\mathbf{w}_h(x,t) = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}(x,t)) = \frac{1}{h^4}\int_t^{t+h} d\tau \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right)\mathbf{u}(y,\tau)\,dy,$$

$$D_h(x) = \mathbf{M}_1^{(h)}(D(x)) = \frac{1}{h^3}\int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) D(y)\,dy,$$

где усредняющее ядро $\eta(s) \in \mathbb{C}(R^3)$ – четная неотрицательная функция, $\eta(s) = 0$, если $|s| \geqslant 1$, $\int_{|s|\leqslant 1}\eta(|s|)\,ds = 1$. Функции $\mathbf{w}_h$ и D_h являются гладкими, финитными и при $h \to 0$ сходятся к $\mathbf{u}$ и $D(x)$ по норме $L_2(\Omega'_{T-\delta})$ в любой строго внутренней подобласти $\Omega'_{T-\delta} \subset \Omega_T$, $h \leqslant \delta$.

Определим теперь функцию $c_h(x,t)$ как решение задачи:

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + \mathbf{w_h}\cdot\nabla c_h = \operatorname{div}(D_h\nabla c_h) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial c_h(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad c_h(x,0) = \mathbf{M}_1^{(h)}(c_0(x)), \quad \text{при } x \in \Omega, \tag{2.10}$$

Задача (3.9)-(3.10) как задача с гладкими коэффициентами имеет бесконечно дифференцируемое единственное решение $c_h(x,t)$, для которого справедлив принцип максимума:

$$0 \le c_h(x,t) \le \max c_0(x) \le 1. \tag{2.11}$$

Таким образом для каждой фиксированной функции $\mathbf{u}(x,t) \in \mathfrak{N}$ существует единственная функция $c_h(x,t) \in \mathfrak{M}$,то есть определен оператор $\mathbf{B}:\ \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, такой что $c_h = \mathbf{B}(\mathbf{u})$.

Умножая уравнение диффузии на c_h и интегрируя его по частям, получаем стандартным образом энергетическую оценку

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega |c_h|^2 dx + \int_{\Omega_T}\big(\alpha_D\chi + \lambda(1-\chi)\big)|\nabla c_h|^2 dx \le M(\nu_0,T)F^2. \tag{2.12}$$

Лемма 2.4 *Оператор* $\mathbf{B}$ - *непрерывный.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}_1 = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_2)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, $c_1 = \mathbf{B}(\mathbf{w}_1)$, $c_2 = \mathbf{B}(\mathbf{w}_2)$, $c = c_1 - c_2$ (индекс h для краткости опустим).

Тогда разность $c(x,t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{w_1}\cdot\nabla c = \operatorname{div}(D_h\nabla c) - \mathbf{w}\cdot\nabla c_2 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial c(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } \mathbf{x} \in S, \quad c(x,0) = 0.$$

Умножим (3.13) на $c(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |c|^2 dx + \int_\Omega D_h|\nabla c|^2 dx = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{w}_1\frac{c^2}{2}dx - \int_\Omega c\mathbf{w}\cdot\nabla c_2 dx.$$

По построению, $\mathrm{div}\mathbf{w} \leqslant N_1(h)$, $\nabla c_2 \leqslant N_1(h)$, $D_h \leqslant N_1(h)$. Оценим последнее слагаемое в правой части:

$$|\int_\Omega c\mathbf{w}\cdot\nabla c_2 dx| \leqslant \sqrt{\int_\Omega |c\nabla c_2|^2 dx}\sqrt{\int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx} \leqslant |N_1(h)|\sqrt{\int_\Omega |c|^2 dx}\sqrt{\int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}N_2(h)\Big(\int_\Omega |c|^2 dx + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx\Big).$$

В итоге получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |c|^2 dx + N_1(h)\int_\Omega |\nabla c|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}N_2(h)\Big(\int_\Omega |c|^2 dx + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx\Big).$$

Обозначив через $y = \int_\Omega c^2 dx$ можно записать неравенство в виде:

$$\frac{dy}{dt} \leqslant N_3(h)\Big(y + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2 dx\Big).$$

Воспользовавшись неравенством [1, с. 112, лемма 5.5], имеем:

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega c^2 dx \leqslant N(h)\int_{\Omega_T} |\mathbf{w}|^2 dx$$

или

$$\|c\|_{2,\Omega_T} \leqslant \|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T}. \tag{2.14}$$

Чтобы получить оценку (3.14) для $|c|^0_{\Omega_t}$, обратимся к лемме 3.3 из [1. с 95]. Нас интересует утверждение леммы о том, что если $u(x,t) \in \mathbb{W}^{2l,l}_q(\Omega_T)$ и $2l - 2r - s - (n+2)/q > 0$, то при $0 \leq \lambda < 2l - 2r - s - (n+2)/q$

$$\langle D_t^r D_x^s u\rangle^{(\lambda)}_{\Omega_T} = b_1\delta^{2l-2r-s-\frac{n+2}{q}-\lambda}\langle\langle u\rangle\rangle^{2l}_{\Omega_T} + b_2\delta^{-(2r+s+\frac{n+2}{q}+\lambda)}\|u\|_{q,\Omega_T}.$$

В нашем случае $c(x,t) \in \mathbb{W}^{4,2}_2(\Omega_T)$, то есть $l = 2, \quad r = 0, \quad s = 0, \quad n = 3, \quad \lambda = 0$,

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T} = b_1\delta^{\frac{3}{2}}\langle\langle c\rangle\rangle^{(4)}_{2,\Omega_T} + b_2\delta^{-\frac{5}{2}}\|c\|_{2,\Omega_T} \equiv A\delta^{\frac{3}{2}} + B\delta^{-\frac{5}{2}} \equiv f(\delta).$$

Функция $f(\delta)$ достигает минимума при $\delta = (\frac{5B}{3A})^{1/4}$, в этом случае $f(\delta) = b_3 A^{5/8}B^{3/8}$ и

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b_4\big(\langle\langle c\rangle\rangle^{(4)}_{2,\Omega_T}\big)^{5/8}\big(\|c\|_{2,\Omega_T}\big)^{3/8}.$$

Окончательно получаем следующую оценку:

$$|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b_5\|c\|_{2,\Omega_T} \leqslant b_6\|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T} \leqslant b\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}.$$

Таким образом, $|c|^{(0)}_{\Omega_T} \leqslant b\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}$, что и означает непрерывность оператора $\mathbf{B}$. Лемма доказана.

Определим теперь оператор

$$\mathbf{\Phi} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M},$$

$$c_h = \mathbf{\Phi}(\bar{c}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}(\bar{c})).$$

Лемма 2.5 *Оператор* $\mathbf{\Phi}$ *имеет неподвижную точку.*

Доказательство.

Оператор $\mathbf{\Phi}$ непрерывен как суперпозиция непрерывных операторов. Более того, можно доказать, что он вполне непрерывен. Для доказательства воспользуемся теоремой Арцела о том, что множество M компактно тогда и только тогда, когда входящие в него функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \quad \rho(x', x'') < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon \ \ \forall f \in M, \ \ \forall x', x'' \in M.$$

В нашей задаче для фиксированного $h > 0$ функции $c_h(x,t)$ по построению обладают ограниченными производными по x и по t, следовательно

$$|c_h(x',t) - c_h(x'',t)| \leqslant \frac{\partial c_h(x^*,t)}{\partial x_j}|x'_j - x''_j| \leqslant k_1|x'_j - x''_j|, \quad (j = 1,2,3),$$

$$|c_h(x,t') - c_h(x,t'')| \leqslant \frac{\partial c_h(x,t^*)}{\partial t}|t' - t''| \leqslant k_2|t' - t''|,$$

то есть функции $c_h(x,t)$ равностепенно непрерывны по x и по t. Равномерная ограниченность очевидна. Таким образом, оператор $\mathbf{\Phi}$ любое ограниченное множество переводит в компактное, т.е является вполне непрерывным.

Множество $\mathfrak{M}$ является выпуклым. Действительно, пусть $c^1, c^2 \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим отрезок, соединяющий c^1 и c^2:

$$c_\alpha(x,t) = \alpha c^1(x,t) + (1-\alpha)c^2(x,t), \quad \alpha \in [0,1].$$

Так как $0 \le c_\alpha \le \alpha \cdot 1 + (1-\alpha)\cdot 1 = 1$, то весь отрезок лежит в $\mathfrak{M}$.

Все это позволяет применить к оператору $\mathbf{\Phi}$ принцип неподвижной точки (Теорема Шаудера) [4, с. 411].

Лемма доказана.

Итак, существует неподвижная точка оператора $\mathbf{\Phi}$, обозначим ее как $\widetilde{c}_h$,

$$\widetilde{c}_h = \mathbf{\Phi}(\widetilde{c}_h),$$

и пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_h = \mathbf{A}(\widetilde{c}_h)$. Тогда $\widetilde{c}_h$ является решением задачи:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \widetilde{\mathbf{u}}_h}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu \mu(\widetilde{c}_h)\nabla \widetilde{\mathbf{u}}_h + \alpha_\nu(\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}_h)\mathbb{I} - \widetilde{q}_h\mathbb{I}\right) + \rho\mathbf{f}, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \widetilde{q}_h}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}_h = 0, \tag{2.16}$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}_h(\mathbf{x},t) = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \widetilde{\mathbf{u}}_h(x,0) = 0 \quad \text{при } \ \mathbf{x} \in \Omega_f \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \widetilde{c}_h}{\partial t} + \mathbf{M}^h(\widetilde{\mathbf{u}}_h)\cdot \nabla \widetilde{c}_h = \operatorname{div}(D_h \nabla \widetilde{c}_h) \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \widetilde{c}_h(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } \mathbf{x} \in S, \quad \widetilde{c}_h(x,0) = \mathbf{M}_1^{(h)}(c_0(x)) \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2.19}$$

где (3.18) понимается как интегральное тождество:

$$\int_{\Omega_T} \Big(\widetilde{c}_h \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathbf{M}^{(h)}(\widetilde{\mathbf{u}}_h) \cdot \nabla \widetilde{c}_h \psi - D_h \nabla \widetilde{c}_h \cdot \nabla \psi\Big) dx dt =$$

$$= - \int_{\Omega} \mathbf{M}^{(h)}(c_0(x)) \psi(x,0) dx \tag{2.20}$$

$$\forall \psi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega_T): \quad \psi(x,T) = 0$$

.

3 Предельный переход

Лемма 3.1 *Решение* $(\mathbf{v}, p, c)$ *исходной задачи (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.6) есть предел при* $h \to 0$ *решений* $(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{q}_h, \widetilde{c}_h)$ *задачи (3.15) – (3.19).*

Доказательство.

Индекс $\sim$ опускаем.

Умножим (3.15) на произвольную гладкую вектор-функцию $\varphi(\mathbf{x},t)$, равную нулю на границе Γ и при $t = T$, и проинтегрируем по области Ω_T.

$$\int_{\Omega_T} \Big(\alpha_\tau \mathbf{u_h} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha_\mu \mu(c_h) \nabla \mathbf{u_h} : \nabla \varphi - \alpha_\nu \mathrm{div} \mathbf{u_h}\, \mathrm{div} \varphi + q_h\, \mathrm{div} \varphi + \rho \mathbf{f} \cdot \varphi\Big)\, dx\, dt = 0$$

Пусть $h \to 0$. Легко видеть, что оценки (3.5) и (3.11) справедливы для всех h с постоянными, не зависящими от h. Оценка (3.5) позволяет из последовательности $\{\mathbf{u}_h\}$ выбрать подпоследовательность такую, что

$$\mathbf{u}_h \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ слабо в } \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T).$$

Согласно [2, c.18], имеем компактное вложение $\mathbb{W}_2^1(\Omega) \subset \mathbb{L}_2(\Omega) \subset (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*$. Обозначим $W = \{v | v \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T); \partial v/\partial t \in (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*\}$. Очевидно, что $\mathbf{u}_h \in W$. По теореме о компактности [2, c.70, теорема 5.1] вложение $W \subset \mathbb{L}_2(\Omega_T)$ компактно. Это означает, что

$$\mathbf{u}_h \to \mathbf{v} \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Аналогично, в силу оценки (3.11), из последовательности $\{c_h\}$ можно выбрать подпоследовательность такую, что

$$c_h \rightharpoonup c \text{ слабо в } \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T).$$

Согласно той же теореме о компактности,

$$c_h \to c \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Переходя к пределу в энергетическом неравенстве (3.12), получим требуемую в условии теоремы оценку (2.5).

Так как $\mu(c_h)$ непрерывна, то

$$\mu(c_h) \to \mu(c) \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Отсюда мы имеем слабую сходимость

$$\alpha_\mu \mu(c_h)\nabla \mathbf{u} : \nabla\varphi \rightharpoonup \alpha_\mu \mu(c)\nabla \mathbf{u} : \nabla\varphi.$$

Из оценки (3.5) заключаем также, что

$$q_h \rightharpoonup p \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

$$\frac{\partial q_h}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial t} \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

и выполняем предельный переход в остальных слагаемых тождества (3.15), а также в уравнении (3.16).

Рассмотрим теперь предельный переход в уравнении диффузии (3.18), которое представим в виде интегрального тождества. Умножим (3.18) на произвольную гладкую функцию $\xi(x,t)$, равную нулю при $t = T$ и проинтегрируем по Ω_T:

$$\int_{\Omega_T} \Big(-c_h \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\,\nabla c_h \xi + D_h\,\nabla c_h \cdot \nabla\xi\Big)\,dx\,dt = \int_\Omega \mathbf{M}^{(h)}(c_0(x))\xi(x,0)\,dx \tag{4.1}$$

Получим оценку для ∇c_h. Умножим (3.18) на c_h и проинтегрируем по Ω:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega c_h^2\,dx + \int_\Omega c_h \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\cdot\nabla c_h\,dx = \int_\Omega D_h |\nabla c_h|^2\,dx. \tag{4.2}$$

Учитывая (3.11), оценим второе слагаемое:

$$\int_\Omega c_h \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\cdot\nabla c_h\,dx \leqslant \int_\Omega \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\cdot\nabla c_h\,dx \leqslant \sqrt{\int_\Omega |\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)|^2\,dx}\sqrt{\int_\Omega |\nabla c_h|^2\,dx} \leqslant$$

$$\leqslant N\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega}\cdot\|\nabla c_h\|_{2,\Omega} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega})^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega})^2.$$

Учтем, что $D_h \leqslant R$ по построению. Положим $\varepsilon = R$ и проинтегрируем (4.2) по времени, получим

$$R(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|c_h\|_{2,\Omega_T})^2 + \frac{R}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2 + \frac{1}{2R}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2,$$

откуда

$$(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2 \leqslant N_1(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2.$$

и, следовательно,

$$\nabla c_h \rightharpoonup \nabla c \text{ слабо в } \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Таким образом, в уравнении диффузии есть сложность в одном слагаемом:

$$\int_{\Omega_T} \xi \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h \, dx\, dt \equiv I_h,$$

поскольку оба сомножителя всего лишь слабо сходятся. Из свойств усреднений имеем:

$$\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}) \to \mathbf{u} \text{ сильно в } \mathbb{L}_2(\Omega_T),$$

$$\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\|_{2,\Omega_T} \leqslant N \|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T}.$$

Поэтому

$$I_h = \int_{\Omega_T} \xi(\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u})) \cdot \nabla c_h \, dx\, dt + \int_{\Omega_T} \xi(\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) \cdot \nabla c_h \, dx\, dt + \int_{\Omega_T} \xi \mathbf{u} \cdot \nabla c_h \, dx\, dt \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3,$$

$$|I_1| \leqslant \max_{(x,\,t)} |\xi| \, \|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T} \, \|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{2,\Omega_T} \leqslant N \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T} \to 0, \quad h \to 0,$$

$$|I_2| \leqslant N_1 \|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T} \to 0, \quad h \to 0,$$

окончательно получаем:

$$I_h \to \int_{\Omega_T} \xi \mathbf{u} \cdot \nabla c \, dx\, dt, \quad h \to 0.$$

В остальных слагаемых интегрального тождества (4.1) предельный переход стандартный.

Лемма доказана.

Из доказанных лемм следует утверждение теоремы 1.

Литература

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М.:Наука, 1967.

2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М.: Мир, 1972.

3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.:Наука, 1973.

4. Треногин В.А. Функциональный анализ, М.:Наука, 1980.

ON AN AUXILIARY PROBLEM OF NONLINEAR DIFFUSION IN SLIGHTLY COMPRESSIBLE VISCOUS FLUID

Sv.A. Gritsenko, R.N. Zimin

Belgorod State University,
Pobedy str., 15, 308015, Belgorod, Russia, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.r,reshat85@mail.ru

Abstract. We consider Stokes system, corresponding to the motion of slightly compressible viscous fluid, where kinematic viscous depends on the concentration of admixture. The Stokes system supplied with the convective diffusion equation for the admixture both in the fluid and in the solid parts. The assumption about the diffusion in solid skeleton is artificial and auxiliary one. We prove the existence of generalized solution of the initial-boundary problem for this system in the limited domain with the homogeneous Dirichlet conditions for the fluid velocity and the homogeneous Neumann condition for the concentration of admixture on the boundary of domain.

Keywords: Stokes equations, viscous fluid, nonlinear diffusion.