УДК 517.956

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СМЕШАННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.А. Алдашев

Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова,
ул. Братьев Жубановых, 263, 030000, г. Актобе, Казахстан, e-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация. В работе показано, что существует счетное множество собственных функций спектральной задачи Трикоми для многомерного смешанного гиперболо-параболического уравнения.

Ключевые слова: задача, сферические функции, гиперболо-параболические уравнения, спектр.

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена ([1]). Насколько нам известно, их многомерные аналоги исследованы мало ([2]).

Пусть D - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ конусами $|x| = t$, $|x| = 1 - t$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$, а при $t < 0$ – цилиндрической поверхностью $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = t_0 < 0$, где $|x|$ –длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через D^+и D^- части области D, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$. Часть конусов $|x| = t, |x| = 1 - t$, ограничивающих области D^+, обозначим через S_0 и S^1 соответственно.

Пусть $S = \{(x,t) : t = 0, 0 < |x| < 1\}$, $\Gamma_0 = \{(x,t) : t = 0, |x| = 1\}$.

В области D рассмотрим многомерное смешанно гиперболо-параболическое уравнение

$$\gamma u = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt}, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где γ- действительное число, Δ_x– оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m, m \ge 2$.

Следуя ([1]), в качестве многомерной спектральной задачи Трикоми рассмотрим следующую

Задача $\mathbf{T}_\gamma$ Найти решение уравнения (1) в области D при $t \ne 0$ из класса $C\left(\overline{D}\backslash\Gamma_0\right) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_0} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t, \quad r \ge 0, \quad 0 \le \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \le \theta_i \le \pi, \quad i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$ –система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Через $\bar{\tau}^k_n(r), \bar{\nu}^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y^k_{n,m}(\theta)$ соответственно функций $\tau(r,\theta) = u(r,\theta,0)$, $\nu(r,\theta) = u_t(r,\theta,0)$.

Имеет место

Теорема. Задача T_γ для каждого γ имеет счетное множество собственных функций.

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) в области D^+ имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} = \gamma u. \tag{3}$$

При $t \to -0$ на S получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$и $\nu(r,\theta)$ вида

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau - \gamma\tau = \nu(r,\theta), \tag{4}$$

$$\delta = -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \quad g_1 = 1, g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2, j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δсостоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2), n = 0, 1, ...,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи T_γ в области D^+ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t)\, Y_{n.m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ –функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (3) и (4), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = \gamma\bar{u}_n^k, \tag{6}$$

$$\bar{\tau}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\tau}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}_n^k - \gamma\bar{\tau}_n^k = \bar{\nu}_n^k(r), \quad 0 < r < 1, \tag{7}$$

при этом первое условие краевого условия (2) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,r) = 0, \quad 0 \le r \le \frac{1}{2}, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0, 1, ... \tag{8}$$

В (6) – (8) произведя замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$ соответственно получим

$$Lu_n^k \equiv u_{n\xi\eta}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}u_n^k = \gamma\, u_n^k, \tag{9}$$

$$\tau_{n\xi\xi}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau_n^k - \gamma\tau_n^k = \nu_n^k(\xi), \quad 0 < \xi < \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$u_n^k(\xi,0) = 0, \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\,\bar{\tau}_n^k(2\xi), \quad \nu_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\,\bar{\nu}_n^k(2\xi),$$
$$\overline{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4, \quad k = \overline{1,k_n}, n = 0, 1, ...$$

Используя общее решение уравнения (9) ([4]), в [5] показано, что решение задачи Коши для уравнения (9) имеет вид

$$\begin{gathered} u_n^k(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \tfrac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) + \tfrac{1}{2}\int\limits_\eta^\xi [\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \\ -\tau_n^k(\xi_1)\tfrac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,|_{\xi_1=\eta_1}]\,d\xi_1 + \gamma\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\xi}\int\limits_0^\eta u_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\xi_1 d\eta_1, \end{gathered} \tag{12}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu(z) = P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения $Lu_n^k = 0$ ([6]), $P_\mu(z)$ – функция Лежандра, $\mu = n + \frac{(m-3)}{2}$, а

$$\frac{\partial}{\partial N}\Bigg|_{\xi_1=\eta_1} = \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\eta_1} + \frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^\perp$ – нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

Из уравнения (12) при $\eta=0$ с учетом (11) имеем

$$0 = \frac{\tau_n^k(\xi)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\xi \nu_n^k(\xi_1)\,P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1, \quad 0<\xi<\frac{1}{2}. \tag{13}$$

Далее из (10), (13) будем иметь

$$\begin{gathered} 0 = \frac{\tau_n^k(\xi)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\xi \left(\tau_{n\xi_1\xi_1}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{\xi_1^2}\tau_n^k(\xi_1) - \gamma\tau_n^k(\xi_1)\right)P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1, \\ 0<\xi<\frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{14}$$

Решение уравнения (14) будем искать в виде

$$\tau_n^k(\xi) = \xi^\beta, \quad 0<\xi<\frac{1}{2}, \tag{15}$$

$1<\beta$ – постоянная, пока неизвестная.

Подставляя (15) в (14), получим

$$\left[1+\bar{\lambda}_n+\sqrt{2}(\beta-1)\xi\right]\int\limits_0^\xi \xi_1^{\beta-2}P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1 = \gamma\int\limits_0^\xi \xi_1^\beta P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1, \quad 0<\xi<\frac{1}{2}. \tag{16}$$

Из формулы ([7])

$$\int\limits_0^1 P_\mu(z)\,z^\gamma dz = \frac{\sqrt{\pi}2^{-\gamma-1}\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{3}{2}\right)}, \quad \gamma>-1,$$

где Г(z)- гамма–функция, вытекает, что если $\beta = \mu - 2s, \quad s = 1, 2, ...$, то

$$\int_0^{\xi} \xi_1^{\beta-2} P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = \int_0^{\xi} \xi_1^{\beta} P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = 0,$$

откуда следует, что равенство (16) имеет место $\forall\gamma$.

Далее, подставив (15), (10) в (12), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$u_n^k(\xi,\eta) = \gamma \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \int_0^{\eta} u_n^k(\xi_1,\eta_1) P_\mu(z) d\xi_1 d\eta_1 + f_n^k(\xi,\eta), \tag{17}$$

где

$$f_n^k(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}(\xi^\beta + \eta^\beta) + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_\eta^\xi \{ \left[\left(\beta(\beta-1) + \bar\lambda_n\right) \xi_1^{\beta-2} - \gamma \xi_1^\beta \right] P_\mu\left[\tfrac{\xi_1^2+\xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right] - \\ - \tfrac{\xi_1^{\beta-1}(\xi-\eta)}{\sqrt{2}(\xi+\eta)} P'_\mu \left[\tfrac{\xi_1^2+\xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right] \} d\xi_1, \beta = \mu - 2s, \;\; s = 0, 1, ... \tag{18}$$

Учитывая оценки ([3])

$$k_n \le Cn^{m-2}, \quad \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le Cn^{\frac{m}{2}-p+1}, \quad C = const,$$

$j = \overline{1, m-1}, p = 0, 1, ...$, нетрудно показать, что ряд

$$\tau(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{\beta+(1-m)/2} Y_{n,m}^k(\theta) \tag{19}$$

сходится абсолютно и равномерно, если $l > \frac{3m}{2}, \beta = \mu - 2s > \frac{(m-1)}{2}$.

Следовательно, функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t)\, Y_{n,m}^k(\theta) \tag{20}$$

является решением задачи (3), (2), (19) в области D^+, где функции $u_n^k(r,t), \quad k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, ...$,находятся по формуле (17) и принадлежат классу $C\left(\overline{D}^+\right) \cap C^1(D^+ \bigcup S) \cap C^2(D^+)$.

Таким образом, мы пришли в области D^- к спектральной задаче для уравнения

$$\Delta_x u - u_t = \gamma u \tag{21}$$

с условиями

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u\Big|_\Gamma = 0. \tag{22}$$

Решение задачи (21), (22) будем искать в виде (5).

Подставляя (5) в (21), будем иметь

$$u_{nrr}^k - u_{nt}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} u_n^k - \gamma u_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, ... \tag{23}$$

При этом краевое условие (22) имеет вид

$$u_n^k(r,0) = n^{-l}r^{\beta}, \quad u_n^k(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 1,2,.... \tag{24}$$

Решение задачи (23), (24) будем искать в виде

$$u_n^k(r,t) = R_n^k(r)\,T_n^k(t). \tag{25}$$

Подставляя (25) в (23), с учетом (24), получим

$$R_{nrr}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_n^k + (\mu-\gamma)R_n^k = 0, \quad 0<r<1, \tag{26}$$

$$R_n^k(0) = 0, \quad R_n^k(1) = 0, \tag{27}$$

$$T_{nt}^k + \mu T_n^k = 0. \tag{28}$$

Ограниченным решением задачи (26), (27) является функция ([8])

$$R_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}a_s J_{\nu}(\mu_s^{\nu}r), \quad 0<r<1, \tag{29}$$

$\nu = n+\frac{m-2}{2}$, $J_{\nu}(z)$ – функция Бесселя первого рода, μ_s^{ν}–ее нули, $\mu = \gamma + (\mu_s^{\nu})^2$, а решением уравнения (28) является

$$T_{n,s}^k(t) = \exp\left(-\left(\gamma+(\mu_s^{\nu})^2\right)\ t\right). \tag{30}$$

Далее из (25), (29), (30), с учетом (24), имеем

$$n^{-l}r^{\beta-\frac{1}{2}} = \sum_{s=1}^{\infty}a_s J_{\nu}(\mu_s^{\nu}r), \quad 0<r<1. \tag{31}$$

Разлагая функцию $r^{\beta-\frac{1}{2}}$ в ряд Фурье-Бесселя ([9]), найдем из (31) коэффициенты a_s

$$a_s = \frac{2n^{-l}}{\left[J_{\nu+1}(\mu_s^{\nu})\right]^2}\int_0^1 \xi^{\beta+\frac{1}{2}}J_{\nu}(\mu_s^{\nu}\xi)\,d\xi, \tag{32}$$

при этом μ_s^{ν}–положительные нули функции Бесселя $J_{\nu}(z)$, расположенные в порядке возрастания.

Таким образом, из (25), (29), (30) следует, что решением задачи (21), (22) в области D^- является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=1}^{\infty}a_s r^{\frac{(2-m)}{2}}J_{\nu}(\mu_s^{\nu}r)\exp\left(-(\gamma+(\mu_s^{\nu})^2)t\right)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{33}$$

и принадлежит классу $C\left(\bar{D}^-\backslash\Gamma_0\right)\cap C^1(D^-\cup S)\cap C^2(D^-)$, где a_s определяются из (32).

Следовательно, задача T_{γ} для каждого γ имеет собственные функции вида (20) и (33), причем, в силу (18), (32), их – счетное множество.

Теорема доказана.

Литература

1. А.М. Нахушев. Задачи со смещением для уравнений в частных производных, М: Наука, 2006 - 287с.

2. В.Н. Врагов. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики // Новосибирск:НГУ, 1983 – 84с.

3. С.Г. Михлин. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М : Физматгиз, 1962-254 с.

4. А.В. Бицадзе. Уравнения смешанного типа. М : Изд-во А Н СССР, 1959-164 с.

5. С .А. Алдашев. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы; Гылым, 1994 - 170с.

6. E.T. Copson. On the Riemann-Green function. // J.Rath. Mech and Anal., 1958, vol 1, p.324-348.

7. Г. Бейтмен , А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т.1-М: Наука, 1973 - 294с.

8. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М: Наука, 1965 - 703с.

9. Г. Бейтмен , А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т.2 -М: Наука, 1974 - 295с.

THE EXISTENCE OF EIGENFUNCTIONS OF THE SPECTRAL TRICOMI PROBLEM FOR A MULTI-DIMENSIONAL MIXED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

S.A. Aldashev

Kh. Zhubanov Aktubinsk State University,
Br. Zhubanovykh str., 263, Aktobe, 030000, Kazakhstan, e-mail: aldash51@mail.ru

Abstract. In work is shown that exists the counting ensemble own function spectral problem of Tricomi for multivariate mixed hyperbolic – parabolic equation.

Keywords: problem, spherical functions, hyperbolic – parabolic equations, spectrum.