УДК 517.9

К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГЛАДКОМ КОНТУРЕ

Е.А. Абаполова,[1] **А.П. Солдатов**[2]

[1]Старооскольский филиал Белгородского государственного университета,
микр-н. Солнечный, 19, г. Старый Оскол, 309502, Россия, e-mail: Abapolova@mail.ru
[2] Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: Soldatov@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучаются вопросы фредгольмовой разрешимости классических сингулярных уравнений с ядром Коши на гладком контуре Γ в пространствах Гельдера $C^{\mu}(\Gamma)$ и $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Рассмотрен также обобщенный оператор Коши с матричным ядром, играющий важную роль в приложениях.

Ключевые слова: сингулярные интегралы, фредгольмова разрешимость, гладкость решения.

1 Фредгольмова разрешимость

Напомним [1, 2] элементы классической теории сингулярных интегральных уравнений

$$c(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{k(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{1}$$

с ядром Коши на ориентируемом гладком контуре Γ. Здесь комплексные функции $c(t_0)$ и $k(t_0,t)$ удовлетворяют условию Гельдера (кратко: условию H) и решение ищется в аналогичном классе. В дальнейшем функции этого типа называем также H—непрерывными.

Хорошо известно, что сингулярный оператор

$$[S(k)\varphi](t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{k(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{2}$$

инвариантен в классе H—непрерывных функций. Более того, если функция $\varphi(u,t)$ зависит от параметра u, заданном на некотором множестве E евклидового пространства, и непрерывна по Гельдеру на $E\times\Gamma$, то функция $\psi(u,t_0)$, определяемая сингулярным интегралом

$$\psi(u,t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(u,t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

обладает этим же свойством. В частности, по отношению к $E=\Gamma$ и $\varphi(t_0,t)=k(t_0,t)\varphi(t)$ правую часть (2) можно записать в форме $\psi(t_0,t_0)$, что и приводит к инвариантности оператора $S(k)$ в классе H.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 07-01-00299) и РФФИ-ГФЕН (Государственный фонд естественных наук Китая) 08-01-92208-ГФЕН

Если $k(t,t) \equiv 0$, то в силу условия H функция

$$\frac{k(t_0,t)}{t-t_0} = \frac{k(t_0,t) - k(t_0,t_0)}{t-t_0}$$

имеет слабую особенность при $t \to t_0$ и (1) переходит в уравнение Фредгольма. Удобно с самого начала охватить векторный случай, когда φ и f являются $l-$вектор—функциями, а "коэффициенты"c и k уравнения (1) представляют собой $l \times l-$матрицы—функции. Уравнение (1) часто записывают в операторной форме $N\varphi = f$ с $N = c + S(k)$, где c рассматривается как оператор умножения $\varphi \to c\varphi$. Это уравнение (и отвечающий ему оператор N) относят к нормальному типу, если матрицы—функции $c(t) \pm k(t,t)$ обратимы на Γ, т.е. $\det[c(t) \pm k(t,t)] \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Рассмотрим билинейную форму

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt, \tag{3}$$

понимая под $\varphi(t)\psi(t)$ скалярное произведение $\varphi_1\psi_1 + \ldots + \varphi_l\psi_l$ двух $l-$векторов. По отношению к этой форме оператор

$$N' = c^\top - S(k^\top), \tag{4}$$

где "$\top$"означает символ матричного транспонирования, называется союзным к N. Свойство союзности заключается в тождестве

$$\langle N\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, N'\psi \rangle, \tag{5}$$

справедливом для всех H—непрерывных функций φ и ψ. Заметим, что оператор N' принадлежит к нормальному типу одновременно с N.

Основные результаты фредгольмовой разрешимости уравнения (1) в классе H — непрерывных функций можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Пусть функции $c(t_0)$ и $k(t_0,t)$ удовлетворяют условию H и оператор $N = c + S(k)$ принадлежит к нормальному типу. Тогда справедливы следующие альтернативы Фредгольма.*

(i) Однородные уравнения $N\varphi = 0$ и $N'\psi = 0$ имеют конечное число линейно независимых решений, соответственно, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_m$;

(ii) неоднородное уравнение $N\varphi = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\langle f_j, \psi_j \rangle = 0, 1 \leq j \leq m$;

(iii) разность $æ = n - m$ дается формулой

$$æ = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(c(t) - k(t,t))}{\det(c(t) + k(t,t))}\right]_\Gamma, \tag{6}$$

где $[\quad]_\Gamma$ означает приращение непрерывной ветви логарифма в соответствии с заданной ориентацией контура.

До сих пор речь шла о комплексных вектор—функциях. В общем случае оператор N не инвариантен в классе вещественных функций. Нетрудно описать критерий этой инвариантности: он заключается в равенстве $\overline{N\varphi} = N\overline{\varphi}$, справедливом для любой комплексной функции φ. В этой связи удобно с N связать оператор $\bar{N}$ по формуле

$$\bar{N}\varphi = \overline{N\bar{\varphi}}, \tag{7}$$

где черта справа означает комплексное сопряжение. Тогда свойство инвариантности N в классе вещественных функций можно выразить равенством $\bar{N} = N$.

Рассмотрим действие операции (7) на оператор $S(k)$. Обозначим $e(t) \in \mathbb{C}$ единичный касательный вектор к контуру Γ в точке t, направленный в соответствии с ориентацией этого контура. Тогда комплексный дифференциал $dt = e(t)|dt|$, где $|dt|$ означает элемент длины дуги. Подставляя это выражение в (1), в соответствии с (7) приходим к равенству

$$\overline{S(k)} = S(-\bar{k}\omega), \tag{8}$$

где положено

$$\omega(t_0, t) = \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} \frac{\overline{e(t)}}{e(t)}, \; t \neq t_0, \quad \omega(t_0, t_0) = 1.$$

нетрудно видеть, что для гладкого контура Γ так определенная функция ω непрерывна на $\Gamma \times \Gamma$. Следующая лемма показывает, что принадлежность ее классу H всегда имеет место для ляпуновского контура. Напомним, что контур Γ ляпуновский, если функция $e(t)$ удовлетворяет условию H.

Лемма 1. *Пусть функция $Q(\xi)$ комплексной переменной $\xi \neq 0$ непрерывно дифференцируема, четна и однородна степени нуль. Тогда для любого ляпуновского контура Γ заданная на $\Gamma \times \Gamma$ функция $k(t_0, t) = Q(t_0 - t); t_0 \neq t$, доопределенная значением $Q[e(t)]$ для $t = t_0$, удовлетворяет условию H.*

Доказательство. Достаточно убедится, что функция k удовлетворяет условию H на $\Gamma_0 \times \Gamma_0$ для каждой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. По условию найдется такое параметрическое уравнение $t = \gamma(s), 0 \leq s \leq 1$, этой дуги, что производная $\gamma'(s)$ всюду отлична от нуля и H—непрерывна на $[0, 1]$. В силу однородности Q можем записать

$$k[\gamma(s_0), \gamma(s)] = Q[q(s_0, s)], \quad q(s_0, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0}.$$

Поэтому остается убедиться, что функция q удовлетворяет условию H на $[0, 1] \times [0, 1]$. Поскольку

$$q(s_0, s) = \int_0^1 \gamma'[su + s_0(1 - u)]du,$$

это свойство очевидно.

Согласно этой лемме для ляпуновского контура Γ функция ω в (8) принадлежит классу $H(\Gamma \times \Gamma)$ и,следовательно, операция (7) не выводит из класса операторов (1). Поэтому для любого оператора N вида (1) оператор $M = N + \bar{N}$ обладает свойством $M = \bar{M}$, обеспечивающем его инвариантность в классе вещественных вектор- функций. Однако союзный оператор M' уже не обладает этим свойством. В этой связи удобнее пользоваться билинейной формой

$$(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)|dt|, \tag{9}$$

связанной с (3) соотношением $\langle\varphi, \psi\rangle = (\varphi, e\psi)$. В частности, оператор $N^\nabla = eN'e^{-1}$ будет союзным к N относительно формы (9), т.е. справедливо аналогичное (5) тождество $(N\varphi, \psi) = (\varphi, N^\nabla\psi)$. Утверждается, что операции $N \to N^\nabla$ и $N \to \bar{N}$ коммутируют друг с другом, т.е. $\overline{N^\nabla} = (\bar{N})^\nabla$. В самом деле, по определению союзного оператора

$$\overline{(N\varphi, \psi)} = \overline{(\varphi, N^\nabla\psi)} = (\bar{\varphi}, \overline{N^\nabla}\bar{\psi}).$$

С другой стороны,

$$\overline{(N\varphi, \psi)} = (\bar{N}\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = (\bar{\varphi}, (\bar{N})^{\nabla}\bar{\psi}),$$

что и доказывает равенство $\overline{N^{\nabla}} = (\bar{N})^{\nabla}$. В частности, оператор $(N + \bar{N})^{\nabla} = N^{\nabla} + \overline{N^{\nabla}}$ имеет тот же вид, что и $N + \bar{N}$.

Теорема 2. *Пусть контур* Γ *ляпуновский и оператор* $M = N + \bar{N}$ *принадлежит к нормальному типу. Тогда по отношению к* M *и* M^{∇} *утверждения* (i)—(iii) *теоремы 1 справедливы в классе вещественных* l*—вектор—функций.*

Доказательство. Утверждения (i)—(iii) сохраняют свою силу и по отношению к паре M, M^{∇}. Пусть X есть конечномерное пространство $\ker N = \{\varphi | N\varphi = 0\}$ размерности n и $X_{\mathbb{R}}$ его подпространство (над полем $\mathbb{R}$) вещественных функций. Соотношение $\overline{M\varphi} = M\overline{\varphi}$ означает, что пространство X инвариантно относительно операции $\varphi \to \overline{\varphi}$ комплексного сопряжения. Над полем $\mathbb{R}$ это пространство имеет размерность $2n$ и имеет место разложение в прямую сумму $X = X_{\mathbb{R}} \oplus iX_{\mathbb{R}}$. Следовательно, в X можно выбрать базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из вещественных вектор—функций.

Поскольку M^{∇} также обладает свойством $M^{\nabla} = \overline{M^{\nabla}}$, в пространстве $Y = \ker M^{\nabla}$ можно также выбрать базис из вещественных функций $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Тем самым утверждение (i) теоремы 1 для M установлено по отношению к вещественным функциям.

Рассмотрим далее неоднородное уравнение $M\varphi = f$ с вещественной правой частью. Если $(f, \psi_j) = 0, j = 1, \ldots, m$, то в силу теоремы 1 оно имеет комплексное решение φ^1. Но тогда вместе с ним его решением будет и вещественная функция $\varphi = (\varphi^1 + \overline{\varphi^1})/2$, поскольку $M\varphi = (M\varphi^1 + \overline{M\varphi^1})/2 = f$. Следовательно, имеет место и предложение (ii) теоремы 1.

2 Регуляризация уравнения

Если функция $k(t_0, t)$ обращается в нуль при $t = t_0$, то в силу ее H—непрерывности ядро $k(t_0, t)/(t - t_0)$ имеет слабую особенность и (1) является уравнением Фредгольма второго рода. В этом случае принадлежность уравнения (1) к нормальному типу сводится к обратимости матрицы—функции c и величина æ в (6) равна нулю. Соответственно утверждения (i)—(iii) теоремы 1 представляют собой классические альтернативы Фредгольма. В общем случае доказательство этих утверждений сводится к рассмотренному выше случаю путем регуляризации уравнения (1), которое и рассмотрим в настоящем разделе.

С каждой парой функций $k_1(t_0, t)$, $k_2(t_0, t) \in H(\Gamma \times \Gamma)$ свяжем функцию $(k_1 * k_2)(t_0, t)$ по формуле

$$(k_1 * k_2)(t_1, t) = \frac{(t - t_1)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k_1(t_1, t_0)k_2(t_0, t)}{(t_0 - t_1)(t - t_0)} dt_0, \ t_1 \neq t; \quad (k_1 * k_2)(t, t) = 0. \tag{10}$$

При $t_1 \neq t$ интеграл здесь сингулярный с особыми точками t_1 и t. Поскольку

$$\frac{1}{(t_0 - t_1)(t - t_0)} = \frac{1}{t - t_1}\left[\frac{1}{t_0 - t} - \frac{1}{t_0 - t_1}\right],$$

равенство (10) можем записать в форме

$$(k_1 * k_2)(t_1, t) = q(t_1, t, t) - q(t_1, t, t_1), \quad q(t_1, t, t_2) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k_1(t_1, t_0)k_2(t_0, t)}{t_0 - t_2} dt_0. \tag{11}$$

Как отмечено в начале п. 1, функция q, определяемая сингулярным интегралом с параметром $u = (t_1, t) \in \Gamma\times\Gamma$, принадлежит классу $H(\Gamma\times\Gamma\times\Gamma)$ и, следовательно, $k_1 * k_2 \in H(\Gamma\times\Gamma)$.

Регуляризация уравнения (1) основана на следующей формуле перестановки Пуанкаре-Бертрана [1] сингулярных интегралов:

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k_1(t_1,t_0)}{t_0-t_1}dt_0\left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k_2(t_0,t)}{t-t_0}dt\right] = k_1(t_1,t_1)k_2(t_1,t_1) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(k_1*k_2)(t_1,t)}{t-t_1}dt.$$

В обозначениях (2) это равенство можем переписать в операторной форме:

$$S(k_1)S(k_2) = a + S(k_1 * k_2), \quad a(t) = k_1(t,t)k_2(t,t). \tag{12}$$

Обозначим $\mathcal{K}$ класс всех операторов $N = c + S(k)$ с H—непрерывными функциями $c(t_0)$ и $k(t_0,t)$. Совокупность операторов $S(k) \in \mathcal{K}$, для которых $k(t,t) \equiv 0$, обозначим $\mathcal{K}_0$. В силу (11) оператор $S(k_1 * k_2)$ в правой части (12) принадлежит $\mathcal{K}_0$, так что

$$NN_0, N_0N \in \mathcal{K}_0 \quad \text{при} \quad N \in \mathcal{K},\ N_0 \in \mathcal{K}_0. \tag{13}$$

Удобно для оператора $S(k)$ с $k = 1$ принять специальное обозначение $S = S(1)$. Таким образом,

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma.$$

Полагая $k_1 = k_2 = 1$ в формуле (12), с учетом (11) получим:

$$(S^2\varphi)(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{h(t)-h(t_0}{t-t_0}\varphi(t)dt, \quad h(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}. \tag{14}$$

Заметим, что функция h постоянная на связных компонентах контура Γ.

Полагая $2P^\pm = 1 \pm S$, общий элемент $N \in \mathcal{K}$ можем записать в форме

$$N = aP^+ + bP^- + N_0, \quad N_0 \in \mathcal{K}_0. \tag{15}$$

В обозначениях (1) роль коэффициентов a и b здесь играют, соответственно, $c(t) + k(t,t)$ и $c(t) - k(t,t)$. Таким образом, принадлежность N к нормальному типу заключается в обратимости коэффициентов a и b, а формула (6) для оператора (15) переходит в

$$æ(N) = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det b}{\det a}\right]_\Gamma. \tag{16}$$

Для любых функций a_j, b_j, $j = 1, 2$, справедливо соотношение

$$(a_1P^+ + b_1P^-)(a_2P^+ + b_2P^-) - (a_1a_2P^+ + b_1b_2P^-) \in \mathcal{K}_0. \tag{17}$$

В самом деле, очевидно, $aS - Sa \in \mathcal{K}_0$. Из (14) также видно, что $S^2 - 1 \in \mathcal{K}_0$. Следовательно, операторы $(P^\pm)^2 - P^\pm$ и $P^+P^- = P^-P^+$ принадлежат $\mathcal{K}_0$, что совместно с (13) приводит к справедливости (17).

Соотношения (17) составляют по существу процедуру регуляризации уравнения $N\varphi = f$. Если оператор N в (15) принадлежит к нормальному типу и $R = a^{-1}P^+ + b^{-1}P^-$, то $RN = 1 + K$ с некоторым $K \in \mathcal{K}_0$. Решение φ уравнения $N\varphi = f$ является и решением уравнения Фредгольма $\varphi + K\varphi = Rf$. Однако обратное, вообще говоря, не верно, т.е. данная регуляризация не равносильна. Вопрос об условиях, обеспечивающих равносильную регуляризацию, требует отдельного рассмотрения и подробно изучался многими авторами [1, 2].

Если контур Γ ляпуновский, то функция ω в соотношении (8) принадлежит классу $H(\Gamma \times \Gamma)$ и применительно к S это соотношение переходит в

$$S + \bar{S} \in \mathcal{K}_0, \tag{18}$$

где учтено, что $\omega(t,t) = 1$. В частности, аналогично (15) можем записать

$$\bar{N} = \bar{b}P^+ + \bar{a}P^- + N_1, \quad N_1 \in \mathcal{K}_0,$$

и, следовательно, для оператора $M = N + \bar{N}$ имеем разложение

$$M = (a + \bar{b})P^+ + (b + \bar{a})P^- + M_0, \quad M_0 \in \mathcal{K}_0.$$

Поэтому нормальный тип оператора M определяется обратимостью $a + \bar{b}$ и формула (16) для него переходит в

$$æ(M) = \frac{1}{\pi i}[\ln\det(a + \bar{b})]_\Gamma.$$

3 Уравнение в классе $C^\mu(\Gamma)$

. Предыдущие рассмотрения нетрудно перенести на случай, когда решения и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условию Гельдера с фиксированным показателем $0 < \mu < 1$. Класс таких функций, заданных на некотором множестве E, обозначим $C^\mu(E)$. Относительно нормы

$$|\varphi|_\mu = \sup_{t\in E}|\varphi(t)| + \sup_{t_1\neq t_2}\frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \tag{19}$$

это пространство банахово. Соответственно класс всех непрерывных и ограниченных функций обозначаем $C(E)$ с $\sup$ –нормой, определяемой первым слагаемым в правой части (17). Заметим, что пространство $C^\nu(E)$ вложено в $C^\mu(E)$ при $\mu < \nu$.

Определение (19) используем и для вектор—функций $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$, понимая под $|\varphi(t)|$ какую-либо фиксированную норму в $\mathbb{C}^l$. Например, можем положить $|\xi| = \max_i |\xi_i|, \xi \in \mathbb{C}^l$. Аналогичным образом норма (19) определяется и для матриц—функций.

Объединение классов $C^{\mu+\varepsilon}$ по $\varepsilon > 0$ обозначим $C^{\mu+0}$. В этом смысле класс H совпадает с обьединением $C^{+0} = \cup_{\varepsilon>0} C^\varepsilon$. Удобно писать, что контур $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$, если единичный вектор $e(t)$ как функция на Γ принадлежит классу $C^{\mu+0}(\Gamma)$. В этом случае для любой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ найдется такая ее параметризация $t = \gamma(s),\ 0 \le s \le 1$, что $\gamma'(s) \in C^{\mu+0}[0,1]$. Как видно из доказательства леммы 1, для рассматриваемых контуров функция $Q(t - t_0) \in C^{\mu+0}(\Gamma \times \Gamma)$.

Аналогично п.2 обозначим $\mathcal{K}(C^{\mu+0})$ класс операторов $c + S(k)$, где $c \in C^{\mu+0}(\Gamma)$ и $k(t_0, t) \in C^{\mu+0}(\Gamma \times \Gamma)$. Соответственно $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ состоит из операторов $S(k)$, для которых $k \in C^{\mu+0}$ и $k(t,t) \equiv 0$.

Приведенные в [1] оценки сингулярных интегралов показывают, что для $\varphi(t) \in C^\mu(\Gamma)$ и $k(t_0, t) \in C^\nu(\Gamma \times \Gamma),\ 0 < \mu < \nu < 1$, функция $S(k)\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, причем ее норма допускает оценку

$$|S(k)\varphi|_\mu \le C|k|_\nu|\varphi|_\mu,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ и k. Таким образом, линейные операторы $N \in \mathcal{K}(C^{\mu+0})$ ограничены в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. Аналогичные оценки можно провести и для интегралов, зависящих от параметра. В частности, если $k_j(t_0,t) \in C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma), j = 1,2,$ то этим свойством обладает и функция $k_1 * k_2$ в (11). Поэтому соотношения (13), (16) справедливы и по отношению к классам $\mathcal{K}(C^{\mu+0})$ и $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$. Из этих же соображений для $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ функция ω принадлежит $C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$, так что в этом случае (18) имеет место по отношению к $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$.

Следующая лемма, установленная в [3], показывает, что операторы $S(k) \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ компактны в пространстве $C^\mu(\Gamma)$.

Лемма 2. *Пусть $k \in C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$ и $k(t,t) \equiv 0$. Тогда оператор $S(k)$ ограничен $C(\Gamma) \to C^\mu(\Gamma)$.*

С помощью этой леммы теоремы 1 и 2 легко распространить на $C^\mu(\Gamma)$.

Теорема 3. *Пусть оператор $N \in \mathcal{K}(C^{\mu+0})$ принадлежит к нормальному типу. Тогда любое решение уравнения $N\varphi = f$ с правой частью $f \in C^\mu(\Gamma)$ также принадлежит $C^\mu(\Gamma)$. При дополнительном предположении $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ аналогичное утверждение справедливо и по отношению к уравнению нормального типа $M\varphi = f$ теоремы 2.*

Доказательство. Запишем N в форме (15) с $a, b \in C^{\mu+0}(\Gamma)$ и $N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ и рассмотрим оператор $R = a^{-1}P^+ + b^{-1}P^-$. Как отмечено выше, (16) имеет место и по отношению к $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ т.е. $RN = 1 + K$, $K \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$. Таким образом, если H- непрерывная функция φ служит решением уравнения $N\varphi = f$ с правой частью $f \in C^\mu(\Gamma)$, то $\varphi + K\varphi = f_1$, с $f_1 = Rf \in C^\mu(\Gamma)$. На основании леммы 2 отсюда и $\varphi = f_1 - K\varphi \in C^\mu(\Gamma)$. Пусть далее $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$. Как отмечено выше, тогда (18) имеет место по отношению к $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ и к оператору M можно применить предыдущие рассуждения.

Напомним [4], что ограниченный в банаховом пространстве X оператор N фредгольмов, если его ядро $\ker N = \{x \in X,\ Nx = 0\}$ конечномерно, образ $\mathrm{im}\,N$ замкнут и фактор-пространство $X/\mathrm{im}\,N$ также конечномерно. Размерности этих пространств обозначают, соответственно, $\dim N$ и $\mathrm{codim}N$, а их разность $\dim N - \mathrm{codim}N$ называется индексом $\mathrm{ind}\,N$ фредгольмового оператора N. Очевидно, конечномерность пространства $X/\mathrm{im}\,N$ равносильна существованию в X такого конечномерного подпространства Z той же размерности $\mathrm{codim}N$, что $X = Z \oplus \mathrm{im}N$.

Убедимся, что в условиях теоремы 3 оператор N фредгольмов в банаховом пространстве $C^\mu(\Gamma)$ и его индекс $\mathrm{ind}N = æ(N)$. В самом деле, из этой теоремы следует, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_m$, фигурирующие в теореме 1, принадлежат $C^\mu(\Gamma)$ и условия ортогональности $\langle f, \psi_j\rangle = 0$, $1 \le j \le m$, необходимы и достаточны для разрешимости уравнения $N\varphi = f$. В частности, образ $\mathrm{im}\,N$ есть замкнутое подпространство $C^\mu(\Gamma)$. Рассмотрим линейное отображение $L : C^\mu(\Gamma) \to \mathbb{C}^m$ по формуле $(Lf)_i = \langle f, \psi_i\rangle$, $1 \le i \le m$. Образ $\mathrm{im}\,L$ этого отображения совпадает со всем $\mathbb{C}^m$. В противном случае найдется такой вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathbb{C}^m$, что $\eta_1(Lf)_1 + \cdots + \eta_m(Lf)_m = 0$ для всех $f \in C^\mu$. По отношению к $\psi = \eta_1\psi_1 + \cdots + \eta_m\psi_m$ это означает, что $\langle f, \psi\rangle = 0$ для всех $f \in C^\mu$, что возможно только для $\psi = 0$. Но тогда $\eta = 0$, что невозможно.

Итак, $\mathrm{im}\,L = \mathbb{C}^m$ и, следовательно, для базисных векторов $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^m$ найдутся такие $f_1, \ldots, f_m \in C^\mu(\Gamma)$, что $Lf_i = e_i, 1 \le i \le m$, или, что равносильно, $\langle f_i, \psi_j\rangle = \delta_{ij}$, где δ означает символ Кронекера. Очевидно, система функций $f_1, \ldots, f_m$ линейно независима, она называется биортогональной к системе $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Нетрудно видеть, что подпространство Z, натянутое на функции биортогональной системы, дополняет $\mathrm{im}N$ до прямой суммы $C^\mu(\Gamma) = Z \oplus \mathrm{im}N$. В частности, $\mathrm{codim}N = m$. Таким образом, оператор N фредгольмов и его индекс $\mathrm{ind}N = n - m = æ(N)$.

4 Гладкость решений

Сингулярные уравнения (1) можно рассматривать и для непрерывно-дифференцируемых функций. Введем в классе $C^1(\Gamma)$ операцию дифференцирования

$$(D\varphi)(t) = \lim_{s\to t,\ s\in\Gamma} \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t}. \tag{20}$$

По определению класс $C^{1,\mu}(\Gamma)$ состоит из всех функций φ, для которых $\varphi, D\varphi \in C^\mu(\Gamma)$. Аналогичный смысл имеет класс и $C^{1,\mu+0}$. Относительно нормы

$$|\varphi|_{1,\mu} = |\varphi|_\mu + |D\varphi|_\mu$$

пространство $C^{1,\mu}(\Gamma)$ банахово и, очевидно, оператор вложения $C^{1,\mu} \subseteq C^\mu$ компактен.

Операции частного дифференцирования $D_1 k$ и $D_2 k$ можно можно ввести по отношению к функции $k(t_0, t) \in C^1(\Gamma\times\Gamma)$ двух переменных, полагая

$$(D_1 k)(t_0,t) = \lim_{s_0\to t_0, s_0\in\Gamma} \frac{k(s_0,t)-k(t_0,t)}{s_0-t_0}$$

и действуя аналогично по второй переменной. Заметим, что по отношению к функции $a(t) = k(t,t)$ одной переменной имеет место равенство

$$(Da)(t) = [(D_1+D_2)k](t,t). \tag{21}$$

Нетрудно указать достаточные условия, при выполнении которых оператор, ограниченный в $C^\mu(\Gamma)$, будет обладать аналогичным свойством по отношению к пространству $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Они заключаются в следующем: для $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ функция $N\varphi$ непрерывно дифференцируема и

$$DN\varphi = N^0 D\varphi + N^1\varphi, \tag{22}$$

где операторы N^j ограничены в C^μ и зависят только от N. Если дополнительно операторы N и N^j компактны в C^μ, то оператор N будет компактен и в $C^{1,\mu}$.

Следующая теорема показывает, что при определенных предположениях оператор $S(k)$ обладает свойством (22).

Теорема 4. *Если $k \in C^{1,\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$, то*

$$DS(k) = S(k)D + S(k^1), \quad k^1 = (D_1+D_2)k. \tag{23}$$

Доказательство проведем сначала для случая $k = 1$, когда (23) переходит в равенство

$$DS = SD. \tag{24}$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma$$

с функцией $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Хорошо известно [1], что для H—непрерывной функции φ аналитическая функция $\phi(z)$ непрерывна продолжима на Γ с обеих сторон контура и для ее односторонних предельных значений $\phi^{\pm}(t_0)$, $t_0 \in \Gamma$, справедливы формулы Сохоцкого - Племеля

$$2\phi^{\pm}(t_0) = \pm\varphi(t_0) + (S\varphi)(t_0). \tag{25}$$

Рассмотрим производную

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{(t-z)^2}.$$

С учетом очевидного тождества

$$\frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} = -D_t\left(\frac{1}{t-z}\right)\varphi(t) = -D_t\left[\frac{\varphi(t)}{t-z}\right] + \frac{(D\varphi)(t)}{t-z}$$

ее можно записать в форме

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(D\varphi)(t)dt}{t-z}.$$

В частности, функция ϕ' непрерывна продолжима на Γ с обеих сторон и

$$2(\phi')^{\pm}(t_0) = \pm(D\varphi)(t_0) + (SD\varphi)(t_0).$$

Определение (20) производной на контуре Γ согласуется с дифференцированием аналитических функций. Поэтому функции $\phi^{\pm}$ непрерывно дифференцируемы и $D\phi^{\pm} = (\phi')^{\pm}$. Совместно с (25) и предыдущим равенством отсюда следует (24).

В общем случае пусть $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ и

$$\psi(t_1, t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(t_1,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt.$$

В силу уже доказанного свойства (24) имеем:

$$(D_2\psi)(t_1,t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{D_2(k\varphi)(t_1,t)}{t-t_0}dt = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(D_2k)(t_1,t)\varphi(t) + k(t_1,t)(D\varphi)(t)}{t-t_0}dt. \tag{26}$$

С другой стороны, пусть $k \in C^{1,\nu}(\Gamma\times\Gamma)$ с некоторым $\mu < \nu < 1$ и последовательность точек $t_{1n} \in \Gamma$ сходится к t_1. Тогда

$$\frac{\psi(t_{1n},t_0) - \psi(t_1,t_0)}{t_{1n}-t_1} - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(D_1k)(t_1,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{q_n(t)\varphi(t)dt}{t-t_0},$$

где

$$q_n(t) = \frac{k(t_{1n},t_0) - k(t_1,t_0)}{t_{1n}-t_1} - (D_1k)(t_1,t).$$

Нетрудно видеть, что последовательность функций q_n равномерно ограничена в $C^{\nu}(\Gamma)$ и стремится к нулю при $n \to \infty$ по sup –норме. Утверждается, что $q_n \to 0$ по норме пространства $C^{\mu}(\Gamma)$.

В самом деле, обозначим $[\varphi]_\mu$ второе слагаемое в правой части (19). Заметим, что при $\mu = 0$ величина $[\varphi]_0$ представляет собой колебание функции φ на множестве E. Для $\varphi \in C^\nu(E)$ и любого $r > 0$ имеем:

$$\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\mu} \le \begin{cases} [\varphi]_\nu r^{\nu-\mu}, & |x-y| \le r, \\ [\varphi]_0 r^{-\mu}, & |x-y| \ge r. \end{cases}$$

Следовательно,

$$[\varphi]_\mu \le \max([\varphi]_\nu r^{\nu-\mu}, [\varphi]_0 r^{-\mu}).$$

Выберем r по условию $[\varphi]_\nu r^\nu = [\varphi]_0$, тогда предыдущая оценка примет вид

$$[\varphi]_\mu \le [\varphi]_\nu^{\mu/\nu} [\varphi]_0^{1-\mu/\nu}.$$

Применительно к $\varphi = {}_n \in C^\nu(\Gamma)$ это неравенство означает, что $[q_n]_\mu \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит, последовательность $q_n \to 0$ в $C^\mu(\Gamma)$.

С учетом ограниченности оператора S в C^μ отсюда следует, что правая часть (27) стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому в пределе приходим к равенству

$$D_1\psi)(t_1, t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{D_1(k)(t_1, t)}{t - t_0} \varphi(t) dt.$$

Объединяя его с (26), получим равенство

$$[(D_1 + D_2)\psi)](t_1, t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{k^1(t_1, t)}{t - t_0} \varphi(t) dt + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{k(t_1, t)}{t - t_0} (D\varphi)(t) dt,$$

которое совместно с (26) при $t_1 = t_0$ переходит в (23).

Заметим, что если $k(t,t) \equiv 0$, то в силу (21) аналогичным свойством обладает и функций k^1.

Обозначим $\mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$ класс всех операторов $N = S(k) \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$, обладающих свойством (22) с некотороми $N^0, N^1 \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$. Из этого определения, в частности, вытекает, что операторы $N \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ компактны в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Согласно теореме 4 операторы $S(k) \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$, для которых $k \in C^{1,\mu+0}(\Gamma \times \Gamma)$, принадлежат этому классу. Однако как показывает следующая лемма, усиливающая соотношение (18), данному классу принадлежат и более общие операторы.

Лемма 3. *Если* $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ *, то* $S + \bar{S} \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.

Доказательство. Применительно к D операция (7) дает оператор дифференцирования

$$(\bar{D}\varphi)(t) = \lim_{s \to t,\, s \in \Gamma} \frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{\bar{s} - \bar{t}}.$$

Поскольку

$$\lim_{s \to t,\, s \in \Gamma} \frac{s - t}{\overline{s} - \overline{t}} = \frac{e(t)}{\overline{e(t)}},$$

эти операции связаны соотношением

$$\bar{D}\varphi = dD\varphi, \quad d = e/\bar{e}. \tag{28}$$

Поскольку применение (7) к (24) дает равенство $\bar{D}\bar{S} = \bar{S}\bar{D}$, отсюда $D\bar{S} = d^{-1}\bar{S}dD$ и, следовательно, $D(S+\bar{S}) = (S + d^{-1}\bar{S}d)D$. По условию функция $d \in C^{\mu+0}(\Gamma)$ и, значит, $S - d^{-1}Sd \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$. Совместно с (18) отсюда $D(S+\bar{S}) = N_0 D$, $\quad N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$, что завершает доказательство леммы.

Обозначим $\mathcal{K}(C^{1,\mu+0})$ класс операторов вида (15), где $a, b \in C^{1,\mu+0}(\Gamma \times \Gamma)$ и $N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.

Лемма 4. *Соотношения (13), (17) справедливы и по отношению к классам $\mathcal{K}(C^{1,\mu+0})$ и $\mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.*

Доказательство. Если операторы N_j, $j = 1, 2$, обладают свойством (22) с некоторыми N_j^k, $k = 0, 1$, то это верно и по отношению к их произведению $N_1 N_2$. В самом деле,

$$DN_1N_2 = (N_1^0 D + N_1^1)N_2 = N_1^0 N_2^0 D + N_1^1 N_2 + N_1^0 N_2^1.$$

Совместно с (13) отсюда следует справедливость аналогичного свойства и по отношению к классам $\mathcal{K}(C^{1,\mu+0})$ и $\mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.

Если $a \in C^{1,\mu+0}(\Gamma)$, то в силу теоремы 4 оператор $aS - Sa \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$. С учетом (14) аналогичное включение справедливо и для оператора $S^2 - 1$. В свою очередь отсюда вытекает соотношение (17) для рассматриваемых классов.

Сформулируем теперь аналог теоремы 3 для непрерывно дифференцируемых функций.

Теорема 5. *Пусть оператор $N \in \mathcal{K}(C^{1,\mu+0})$ принадлежит к нормальному типу. Тогда любое решение $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ уравнения $N\varphi = f$ с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ также принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$. При дополнительном предположении $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ аналогичное утверждение справедливо и по отношению к уравнению нормального типа $M\varphi = f$ теоремы 2.*

Доказательство. Запишем N в форме (15) с $a, b \in C^{1,\mu+0}(\Gamma)$, $\quad N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$ и положим $R = a^{-1}P^+ + b^{-1}P^-$. Тогда на основании леммы 4 оператор $RN = 1 + K$ с $K \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$. Поэтому, заменяя f на Rf, утверждение достаточно установить по отношению к уравнению $N\varphi = f$ с $N = 1 + K$.

Оператор K компактен как в $C^{\mu}(\Gamma)$, так и в $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Последний оператор, рассматриваемый в $C^{1,\mu}(\Gamma)$, обозначим K^1. По теореме Рисса [5] операторы $N = 1+K$ и $N^1 = 1+K^1$ фредгольмовы и их индексы равны нулю. Это же верно и по отношению к союзному оператору $N' = 1 + K'$. В частности, в обозначениях теоремы 1 числа $n = \dim N$ и $m = \dim N' = \operatorname{codim} N$ совпадают.

Поскольку пространство $\ker N^1$ содержится в $\ker N$, его размерность $n^1 = \dim N^1 \le n$. Рассуждения, приведенные в конце п. 3, показывают, что систему функций $f_1, \ldots, f_n$, биортогональную к базису $\psi_1, \ldots, \psi_n$ пространства $\ker N'$, можно выбрать и в $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Так как образ $\operatorname{im} N^1$ содержится в $\operatorname{im} N$, пространство Z, натянутое на векторы $f_1, \ldots, f_n$, не пересекается с Z, так что $n^1 = \operatorname{codim} N^1 \ge n$.

Таким образом, $\ker N^1 = \ker N$ и $C^{1,\mu} = Z \oplus \operatorname{im} N^1$. В частности, условия ортогональности $\langle f, \psi_j \rangle = 0$, $1 \le j \le m$, необходимы и достаточны для разрешимости уравнения $N\varphi = f$ в классе $C^{1,\mu}(\Gamma)$, поэтому его решение $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Вторая часть теоремы с учетом леммы 3 является следствием первой ее части.

Теорема 5 показывает, что оператор N фредгольмов в банаховом пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$ и его индекс $\operatorname{ind} N = æ(N)$. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к оператору M.

5 Обобщенный оператор Коши

Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$ обратима и ее собственные значения не лежат на вещественной оси. Тогда для любого ненулевого комплексного числа $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, матрица

$$z_J = x \cdot 1 + y \cdot J \tag{29}$$

обратима. Здесь и ниже 1 означает единичную $l \times l$-матрицу. Аналогичную запись используем и для матричного дифференциала $dz_J = dx \cdot 1 + dy \cdot J$ на контуре Γ. В терминах касательного вектора $e(t)$ можно записать $dt_J = e_J(t)|dt|$.

Естественным обобщением S служит сингулярный оператор

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t - t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{30}$$

который, очевидно, можем переписать в форме

$$S_J = S(k), \quad k(t_0, t) = (t - t_0)(t - t_0)_J^{-1} e_J(t) e^{-1}(t).$$

Если $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$, то в силу леммы 1 функция $k(t_0, t) \in C^{\mu+0}(\Gamma \times \Gamma)$, $k(t, t) \equiv 1$, так что

$$S_J - S \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0}) \tag{31}$$

Поэтому оператор S в представлении (15) можем заменить на S_J. В действительности аналогично лемме 5 это соотношение можно усилить.

Лемма 5. *Если* $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$, *то* $S_J - S \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$.

Доказательство. Введем на Γ операцию дифференцирования по формуле

$$(D_J\varphi)(t_0) = \lim_{t\to t_0, t\in\Gamma} (t - t_0)_J^{-1}[\varphi(t) - \varphi(t_0)]. \tag{32}$$

Поскольку

$$\lim_{s\to t,\, s\in\Gamma} (s - t)(s - t)_J^{-1} = e(t) e_J^{-1}(t),$$

эта операция связана с (18) равенством

$$D_J\varphi = dD\varphi, \quad d(t) = e_J^{-1}(t) e(t) \in C^{\mu+0}(\Gamma). \tag{33}$$

Утверждается, что аналогично (22) имеет место равенство

$$D_J S_J = S_J D_J. \tag{34}$$

В самом деле, как и при доказательстве леммы 3 рассмотрим вне Γ вектор—функцию

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t - z)_J^{-1} dt_J \varphi(t). \tag{35}$$

В предположении H-непрерывности φ эта функция непрерывно продолжима на Γ с обеих сторон контура и справедлива формула Сохоцкого-Племеля

$$2\phi^{\pm}(t_0) = \pm\sigma\varphi(t_0) + (S_J\varphi)(t_0), \tag{36}$$

где матрица σ зависит только от J и обладает свойством $\sigma^2 = 1$.

В случае, когда собственные значения матрицы J лежат в верхней полуплоскости, этот факт был установлен в [6] с $\sigma = 1$. Если собственные значения J лежат в нижней полуплоскости, то это утверждение справедливо с $\sigma = -1$. Для доказательства достаточно заметить, что в обозначениях (29) комплексно сопряженная матрица $\overline{z_J} = z_{\overline{J}}$ и, значит,

$$\overline{\phi(z)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-1}_{\overline{J}} dt_{\overline{J}} \overline{\varphi(t)}.$$

Поэтому на основании предыдущего утверждения $2\overline{\phi^\pm} = \mp\overline{\varphi} + S_{\overline{J}}\overline{\varphi}$. Переходя к комплексно сопряженному равенству, получим (36) с $\sigma = -1$.

В общем случае выберем матрицу $B \in \mathbb{C}^{l\times l}$ так, чтобы матрица $J^0 = B^{-1}JB$ была блочно диагональна: $J^0 = \mathrm{diag}(J^0_+, J^0_-)$, где собственные значения матрицы $J^0_+(J^0_-)$ лежат в верхней (нижней) полуплоскости. Тогда согласно (35)

$$B^{-1}\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-1}_{J^0} dt_{J^0} B^{-1}\varphi(t).$$

В результате приходим к справедливости (36) с матрицей $\sigma = B\ \mathrm{diag}(1,-1)B^{-1}$.

Функция $\phi(z)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ и ее частные производные выражаются по формулам

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \phi', \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = J\phi', \quad \phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-2}_J dt_j \varphi(t).$$

В частности, в каждой точке $z_0 \notin \Gamma$ существует предел

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{-1}_J[\phi(z) - \phi(z_0)] = \phi'(z_0),$$

так что в соответствии с определением (32)

$$(t-z)^{-2}_J\varphi(t) = -D_{J,t}(t-z)^{-1}_J(D\varphi)(t).$$

В результате приходим к равенству

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma dt_J (t-z)^{-1}_J (D_J\varphi)(t).$$

Далее для завершения доказательства (34) остается повторить соответствующие рассуждения теоремы 4.

С учетом (33) равенство (34) можем переписать в форме $DS_J = (d^{-1}S_J d)D$, откуда $D(S - S_J) = (S - d^{-1}S_J d)D$. В силу (30) оператор $S - d^{-1}S_J d$ принадлежит $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$, что в соответствии с определением класса $\mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0})$ завершает доказательство леммы.

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение $\mathrm{Re}\ a(\varphi + S_J\varphi) = f$ в классе $C^\mu(\Gamma)$ вещественных l–вектор–функций, играющее важную роль в приложениях [7]. В силу леммы 5 оператор M этого уравнения можно представить в форме

$$2M = a(1+S_J) + \overline{a}(1+\overline{S}_J) = 2(aP^+ + \overline{a}P^- + N_0), \quad N_0 \in \mathcal{K}_0(C^{1,\mu+0}). \qquad (37)$$

Как и в случае теоремы 2 союзное уравнение целесообразно рассматривать относительно формы (9). Отметим, что оператор S_J^∇, союзный к S_J относительно этой формы, дается равенством

$$S_J^\nabla = -qS_{J^\top}q^{-1}, \quad q(t) = e_{J^\top}(t), \tag{38}$$

где, напомним, $\top$ есть символ матричного транспонирования.

В самом деле, для стандартного скалярного произведения в $\mathbb{C}^l$ имеем:

$$[(t-t_0)_J^{-1}e_J(t)\varphi(t)]\psi(t_0) = \varphi(t)[(t-t_0)_{J^\top}^{-1}q(t)\psi(t_0)].$$

Поэтому в соответствии с (30)

$$\int_\Gamma \left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1}e_J(t)\varphi(t)|dt|\right]\psi(t_0)|dt_0| =$$

$$= \int_\Gamma \left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma a(t)(t-t_0)_{J^\top}^{-1}\psi(t_0)|dt_0|\right] dt,$$

откуда следует (38).

Применяя к оператору (37) теорему 4, приходим к следующему результату.

Теорема 5. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$ и матрица–функция $a \in C^{\mu+0}(\Gamma)$ обратима. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) Однородные уравнения $\mathrm{Re}\ a(1+S_J)\varphi = 0$ *и* $\mathrm{Re}\ (1-qS_{J^\top}q^{-1})a^\top\psi = 0)$ *имеют в классе $C^{\mu+0}(\Gamma)$ конечное число линейно независимых решений, соответственно, $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ и $\psi_1,\dots,\psi_m$.*

(ii) Неоднородное уравнение $\mathrm{Re}\ a(1+S_J)\varphi = f$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $(f,\psi_j) = 0,\ 1 \le j \le m$.

(iii) Разность $æ = n - m$ дается формулой

$$æ = -\frac{1}{\pi}[\arg\det\ a]_\Gamma.$$

(iv) Если дополнительно $a \in C^{1,\mu+0}(\Gamma)$, то любое решение $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ уравнения $\mathrm{Re}\ a(1+S_J)\varphi = f$ *с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ принадлежит $C^{1,\mu}(\Gamma)$.*

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.- М., Наука, 1968.

2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.:Наука, 1977.

3. Солдатов А.П., Чернова О.В., Задача Римана — Гильберта для эллиптической системы первого порядка, Научные ведомости БелУ, 2010.

4. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.- М.: Мир, 1970

5. Рудин У. Функциональный анализ. М. Мир, 1975.

6. Солдатов А.П., Граничные свойства интегралов типа Коши // Дифференц.уравн. 1990. Т.26, No.1. С.131-136.

7. Абаполова Е.А., Солдатов А.П., Система Ламе теории упругости в плоской ортотропной среде// Вестник СамГУ-естественнонаучная серия, 2007, №6 (56), С. 260-268.

TO THE THEORY OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS ON SMOOTH CONTOURS

E.A. Abapolova,[1] **A.P. Soldatov**[2]

[1] Stary Oskol Branch of Belgorod State University,
mikr-n. Solnechny, 19, Stary Oskol, 309502, Russia, e-mail: Abapolova@mail.ru
[2] Belgorod State University
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Soldatov@bsu.edu.ru

Abstract. The Fredholm solvability for singular integral equations of the classical type is considered.

Keywords: singular integrals, Fredholm solvability, smooth solutions.