УДК 517.95

О СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О.В. Алексеева

Елецкий государственный университет им.И.А.Бунина,
ул. Коммунаров, 28, Елец, 399770, Россия, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com

Аннотация. Для замкнутых дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для эллиптических систем первого и второго типа, изучены спектры. В случае эллиптической системы первого типа спектр располагается в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z \leqslant 0$), а в случае эллиптической системы второго типа – на вещественной прямой ($\operatorname{Im} z = 0$) комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Спектр является дискретным.

Ключевые слова: Спектр, замкнутый дифференциальный оператор, эллиптические системы, тензорные произведения гильбертовых пространств, базис

Работа посвящена описанию спектра дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для двух эллиптических систем

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

$$-\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}; \tag{2}$$

рассматриваемых в области $\Omega = (0, \pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Системы (1) и (2) для удобства будем называть *эллиптическими системами первого и второго типа* соответственно. Присоединив к уравнениям (1) и (2) условие Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

получим граничные задачи (1), (3) и (2), (3).

Отметим, что система (2) равносильна системе (1) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (1) на -1 и формальной замены $-f^1$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (2). Эти рассуждения наводят на мысль о совпадении свойств разрешимости граничных задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим граничную задачу. Однако, исследования показывают, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов различны; они в некотором смысле аналогичны тем отличиям, которые проявились при сопоставлении слабой иррегулярности сильной в работе [1], а также при изучении гиперболических систем в [7].

Для систем Коши-Римана имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [2] в областях специального вида. Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений при числе переменных более двух посвящены работы [3], [4]. Сильно и усиленно эллиптическим системам посвящены работы [5], [6] соответственно. Однако спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа почти не изучены.

Обозначим через $e_1 = (1,0)^{\tau}$, $e_2 = (0,1)^{\tau}$ ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}^2$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}$ – унитарное пространство элементов $u = u^1e_1 + u^2e_2$; $u^k \in \mathbb{C}$; $k = 1,2$; со скалярным произведением $(u,v;\ \mathcal{U}) = u^1\overline{v^1} + u^2\overline{v^2}$. Пусть $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{L}^2_2(\Omega)$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : \Omega \to \mathbb{C}^2$ с нормой $|u;\ \mathcal{H}^2_{t,x}|$, задаваемой формулой

$$|u;\mathcal{H}^2_{t,x}|^2 = \iint\limits_{\Omega} |u(\tau,\xi);\ \mathcal{U}|^2\, d\tau\, d\xi\,.$$

Пусть также $\mathfrak{D}$ – линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u \in \mathbb{C}\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left(\Omega\right)$, удовлетворяющих условиям (3).

1. Эллиптическая система первого типа. Обозначая через $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (1), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что (замкнутый) оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (1), (3). Изучим его спектр. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографии [8, с. 620]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим через ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$ соответственно.

Теорема 1. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (1), (3), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m s^2;\quad m = 1,2;\quad k \in \mathbb{N};\quad s \in N\,. \tag{4}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (4), представима в виде

$$u_{m,k,s}(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(ie_1 + (-1)^{m+1}e_2\right)\sin(kt)\sin(sx)$$

Последовательность $\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1,2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$ собственных вектор-функции оператора L образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

□ Достаточно заметить, что последовательность $\{u_{m,k,s}(t) :\ m = 1,2;\ k \in \mathbb{N}\}$, $u_{m,k,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(ie_1 + (-1)^{m+1}e_2\right)\sin(kt)$, является полной и ортонормированной в $\mathcal{H}^2_t = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0,\pi]$, и воспользоваться, доказанным в [7], представлением $\mathcal{H}^2_{t,x}$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}^2_t$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0,\pi]$. ■

2. Эллиптическая система второго типа. Обозначая через $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (2), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор не замкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что (замкнутый) оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (2), (3). Изучим его спектральные свойства.

Теорема 2. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (2), (3), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = (-1)^{m+1}\sqrt{k^4+s^4}; \quad m = 1,2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in N. \tag{5}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (5), представима в виде

$$u_{m,k,s}(t,x) = C_{m,k,s}\left((\lambda_{m,k,s} + (-1)^{m+1}k^2)e_m - s^2 e_{3-m}\right)\sin(kt)\sin(sx),$$

$$C_{m,k,s} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{k^4+s^4+k^2\sqrt{k^4+s^4}}}.$$

Последовательность

$$\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1,2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\} \tag{6}$$

собственных вектор-функции оператора L образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

Пусть S – некоторое счётное множество индексов s и последовательность $\{\varphi^s(x) :\ s \in S\}$ является базисом в $\mathcal{H}_x$. Нижеследующие леммы 1, 2 показывают, что последовательность (6) является базисом в $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

Лемма 1. *Если для каждого $s \in S$ множество $\{v_{k,s}(t) :\ k \in K_s\}$ вектор-функций $v_{k,s} : [0;\pi] \to \mathbb{C}^2$ полно в $\mathcal{H}^2_t$, то множество $\{v_{k,s}(t)\varphi^s(x) :\ s \in S,\ k \in K_s\}$ полно в $\mathcal{H}^2_{t,x}$.*

$\Box$ Пусть f – произвольный элемент пространства $\mathcal{H}^2_{t,x}$. Известно [7], что $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{H}_t \otimes \mathcal{H}^2_x$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор $\{\varphi^{s_m} : m = 1, 2, \ldots, N\}$, что

$$C = \left| f - \sum_{m=1}^{N} f_{s_m}\varphi^{s_m};\ \mathcal{H}^2_{t,x}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $f_{s_m} \in \mathcal{H}^2_t$. Пусть $M = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N} |\varphi^{s_m}; \mathcal{H}_x|$. Множество $\{v_{k,s}(t) :\ k \in K_s\}$ полно в $\mathcal{H}^2_t$. Подберем для каждого $m = 1, 2, \ldots, N$ линейную комбинацию $\sum\limits_{n=1}^{N_m} f_{k_n,s_m}v_{k_n,s_m}$, $f_{k_n,s_m} \in \mathbb{C}$, его элементов так, чтобы

$$C_m = \left| f_{s_m} - \sum_{n=1}^{N_m} f_{k_n,s_m}v_{k_n,s_m};\ \mathcal{H}^2_t\right| < \frac{\varepsilon}{2MN}.$$

Теперь, на основании свойств нормы и ранее полученных оценок, получаем неравенство

$$\left| f - \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N_m} f_{k_n,s_m} \varphi_{s_m} v_{k_n,s_m};\ \mathcal{H}^2_{t,x} \right| \leqslant C + M \sum_{m=1}^{N} C_m < \frac{\varepsilon}{2} + M \frac{\varepsilon}{2MN} N = \varepsilon,$$

которое дает утверждаемую полноту. ■

Лемма 2. *Если для каждого индекса $s \in S$ последовательность $\{v_{k,s}(t):\ k \in K_s\}$ вектор-функций $v_{k,s} : [0;\pi] \to \mathbb{C}^2$ образует базис в $\mathcal{H}^2_t$, то базис в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ образует последовательность $\{v_{k,s}(t)\varphi^s(x):\ k \in K_s,\ s \in S\}$.*

□ Так как $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, то для любого элемента $f \in \mathcal{H}^2_{t,x}$ справедливо в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ представление $f = \sum_{s\in S} f_s \varphi^s$, в котором элементы $f_s \in \mathcal{H}^2_t$ определены однозначно. Последовательность $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ является базисом в $\mathcal{H}^2_t$; поэтому для каждого элемента $f_s \in \mathcal{H}^2_t$ справедливо в $\mathcal{H}^2_t$ представление $f_s = \sum_{k\in K_s} f_{k,s} v_{k,s}$, где коэффициенты $f_{k,s} \in \mathbb{C}$ также определены однозначно. В силу леммы 1 получаем единственное представление $f = \sum_{s\in S} \sum_{k\in K_s} f_{k,s} \varphi^s v_{k,s}$. ■

Доказательство Теоремы 1. Утверждение теоремы следует из того, что базис (6) в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$ ортонормированный. ■

Литература

1. Дезин А.А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17,10. – С.1851-1858.

2. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. – 1959. – XIV(87). – С.21-73.

3. Романко В.А. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – 286(1). – С.47-50.

4. Романко В.А. О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23,9. – С.1574-1585.

5. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сб. – 1951. – 29(71). – С.615-676.

6. Солдатов А.П. О первой и второй краевой задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2003. – 39,5. – С.674-686.(2003).

7. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42,1. – С.91-100.

8. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы т.1 / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М.: Иностр. лит., 1962. – Т.1.

ABOUT THE SPECTRUM OF THE DIRICHLET PROBLEM OF TWO ELLIPTIC SYSTEMS

O.V. Alexeeva

Bunin Yelets state university,
Kommunarov St., 28, Yelets, 399770, Russia, e-mail: o.v.alexeeva@gmail.com

Abstract. It is studied spectra of closed differential operators generated by the Dirichlet problem of elliptic systems of the first- and second type. In the case of the first type elliptic system, the spectrum is located in the left half-plane ($\mathrm{Re}\, z \leqslant 0$), and in the case of the second type elliptic system, it is located on the real line ($\mathrm{Im}\ z = 0$) of the complex plane $\mathbb{C}$. The spectrum is discrete.

Key words: spectrum, closed differential operator, elliptic systems, tensor product of Hilbert spaces, basis.