ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 340, № 1, с. 29 - 32

МАТЕМАТИКА

УДК 517.58

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

© 1995 г. С. М. Ситник

Представлено академиком С.М. Никольским 08.12.93 г.

Поступило 09.12.93 г.

Функции Бесселя относятся к числу наиболее часто используемых в приложениях специальных функций. Поэтому задачи о получении различных неравенств для функций Бесселя исследовались многими авторами. В частности, равномерные оценки снизу и сверху для $J_\nu(x)$, $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ и некоторых их комбинаций изучались в [1 - 10, 15]. Все эти работы имеют общую черту – в них доказываются отдельные неравенства, для каждого из которых подбирается специальный способ вывода.

В данной работе предлагается достаточно общий подход к получению неравенств для функций Бесселя $J_\nu(x)$ и модифицированных функций Бесселя $I_\nu(x)$. Получены не несколько отдельных неравенств, а несколько семейств из бесконечного числа неравенств; каждое из семейств состоит из последовательно уточняющихся равномерных оценок. Неравенства формулируются через полиномы Ломмеля и дзета-функцию. Доказательства основаны на использовании цепных дробей. Полученные неравенства в качестве частных случаев содержат многие известные ранее оценки.

1. В этом пункте приводится семейство зависящих от произвольного параметра рекуррентных формул для вычисления дзета-функции, ассоциированной с нулями функций Бесселя. Это позволяет последовательно вычислить любое число значений дзета-функции единым методом.

Приведены неравенства для функций Бесселя, использующие значения дзета-функций. При этом обобщается идея из работы [10], возникшая при выводе известных оценок для преобразования Радона и его дискретизаций.

Здесь ни разу не упоминаются аппроксимации Паде. Однако именно с помощью аппроксимаций Паде – цепных дробей – доказываются все приведенные здесь теоремы.

Определение 1. Дзета-функцией, ассоциированной с нулями функции Бесселя J_ν, называется ряд [11]

$$S_{2(n+1),\nu} = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{\nu,m}^{-2(n+1)}, \qquad (1)$$

где $\gamma_{\nu,m}$ – положительные нули функции Бесселя J_ν, занумерованные в порядке возрастания.

Введем величины

$$a_i = (-1)^i \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} \frac{\Gamma(\nu+k+1-i)}{\Gamma(\nu+2-i)} \frac{C_{k-i-1}^i}{2^{2i+1}},$$

$$b_j = (-1)^j \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} \frac{\Gamma(\nu+k+1-j)}{\Gamma(\nu+1+j)} \frac{C_{k-j}^j}{2^{2j}},$$

$$C_n = 2S_{2(n+1),\nu}.$$

Теорема 1. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$c_n = a_n - \sum_{j=1}^{m} b_j c_{n-j}, \qquad (2)$$

$$m = \min\left(n, \left[\frac{k-1}{2}\right]\right) \geq 1.$$

В частности, несколько первых соотношений имеют вид

$$\begin{gathered} c_0 = a_0, \quad c_1 = a_1 - b_1 c_0, \quad k \geq 3, \\ c_2 = a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_0, \quad k \geq 5, \\ c_3 = a_3 - b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_0, \quad k \geq 7. \end{gathered} \qquad (3)$$

Отметим, что величина c_n, определяемая формулами (2), не зависит от параметра k, хотя величины a_i и b_j зависят от k. Поэтому (2) задают семейство рекуррентных формул, зависящих от параметра k. Случай $k = 0$ имеется в [12].

Приведенные формулы (3) позволяют вычислить первые значения дзета-функции, которые известны [13]. Отметим, что значение $S_{8,\nu}$ было получено Кэли при помощи специального приема. Из теоремы 1 эта и в принципе любое другое число последующих формул выводятся рекуррентно.

Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Владивосток

Следствие. *Справедливы формулы для дзета-функции:*

$$S_{2,\nu} = \frac{1}{4(\nu+1)},$$

$$S_{4,\nu} = \frac{1}{16(\nu+1)^2(\nu+2)},$$

$$S_{6,\nu} = \frac{1}{32(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu+3)},$$

$$S_{8,\nu} = \frac{1}{256(\nu+1)^4(\nu+2)^2(\nu+3)(\nu+4)}.$$

Теорема 2. *Дзета-функции корней удовлетворяют линейной системе с определителем Ганкеля* [15] *при значениях*

$$L = \left[\frac{k-1}{2}\right], \quad M = \left[\frac{k}{2}\right].$$

Следующий результат развивает интересный технический прием из классической работы [10] по теории преобразования Радона.

Теорема 3. *Пусть* $|x| < \gamma_{\nu,1}$. *Тогда при любом натуральном n справедливо неравенство*

$$J_\nu(x) \le \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{S_{2j,\nu}}{j}x^{2j}\right). \qquad (4)$$

В частности, при $|x| < \gamma_{\nu,1}$ получаем

$$J_\nu(x) \le \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\nu+1)}\right), \qquad (5)$$

$$J_\nu(x) \le \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$\times\exp\left(-\frac{x^2}{4(\nu+1)} - \frac{x^4}{32(\nu+1)^2(\nu+2)}\right). \qquad (6)$$

Неравенство (5) получено в [10] при $\nu = n$. На этом пути, используя теорему 1, можно получить любое число все более точных неравенств, как только вычислены соответствующие значения для дзета-функций. Предложенный метод применим и к отношениям функций Бесселя, рассматриваемым ниже.

2. В этом пункте приводятся неравенства для функций Бесселя и Макдональда. Ряд таких неравенств получен ранее в работах [1 - 10]. Нашей целью было не получение отдельных неравенств, а нахождение процедуры для неограниченного вывода все более точных оценок.

Неравенства формируются через полиномы Ломмеля [13, 14], для которых известна явная формула

$$R_{m,\nu}(x) = \qquad (7)$$

$$= \sum_{n=0}^{m/2}\frac{(-1)^m(m-n)!\,\Gamma(\nu+m-n)}{n!\,(m-2n)!\,\Gamma(\nu+n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m+2n} =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m} {}_2F_3\left(\left.\begin{matrix}\frac{1-m}{2}, & -\frac{m}{2} \\ \nu, -m, & 1-\nu-m\end{matrix}\right| -z^2\right). \qquad (8)$$

Основой для вывода неравенств является разложение в цепную дробь (аппроксимации Паде!) отношения двух функций Бесселя

$$\frac{J_\nu(z)}{J_{\nu-1}(z)} = \cfrac{z}{2\nu - \cfrac{z^2}{2(\nu+1) - \cfrac{z^2}{2(\nu+2)\ldots}}}. \qquad (9)$$

Для цепной дроби (8) известны выражения для подходящих дробей $f_{k,\nu}$ через полиномы Ломмеля (7)

$$f_{k,\nu}(z) = \frac{R_{k-1,\nu+1}(z)}{R_{k,\nu}(z)}. \qquad (10)$$

Теорема 4. *Пусть* $0 \le x < y < \gamma_{\nu,1}$ – *первый положительный нуль функции* $J_\nu(x)$. *Тогда при всех k справедливы неравенства*

$$\frac{J_\nu(y)}{J_\nu(x)} \le \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \exp\left(-\int_x^y\frac{R_{k-1,\nu+2}(t)dt}{R_{k,\nu+1}(t)}\right). \qquad (11)$$

Выражения в правой части (10) при всех x, y монотонно убывают с ростом k. Следовательно, каждое из неравенств (10) лучше предыдущего для всех x, y.

Теорема 5. *Для относительной погрешности неравенства* (11) *справедлива формула*

$$r_{k,\nu}(x,y) = \frac{J_\nu(y)/J_\nu(x)}{\left(\frac{y}{x}\right)^\nu\exp\left(-\int_x^y\frac{R_{k-1,\nu+2}(t)dt}{R_{k,\nu+1}(t)}\right)} =$$

$$= \exp\left(-\int_x^y\frac{J_{\nu+k+1}(t)dt}{J_\nu(t)R_{k,\nu+1}(t)}\right), \quad 0 < x < y < \gamma_{\nu,1}, \qquad (12)$$

кроме того, $\forall x, y$

$$0 \le r_{k,\nu}(x,y) \le 1, \; r_{k,\nu}(x,y) > r_{k+1,\nu}(x,y). \qquad (13)$$

Теорема 6. *Пусть* $0 < x < \gamma_{\nu,1}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$J_\nu(x) \le \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\exp\left(-\int_0^x\frac{R_{k-1,\nu+2}(t)dt}{R_{k,\nu+1}(t)}\right). \qquad (14)$$

В неравенствах (14) также получена явная формула для относительной погрешности и выполняется свойство монотонности погрешности по k, т.е. каждое неравенство лучше предыдущего $\forall x, y$.

Приведем несколько первых оценок (10):

$$\frac{J_\nu(y)}{J_\nu(x)} \le \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \left[\frac{2(\nu+1)(\nu+3)-y^2}{2(\nu+1)(\nu+3)-x^2}\right]^{\frac{(\nu+3)^2}{4(\nu+2)}} \times$$

$$\times \exp\left[-\left(\frac{y^2-x^2}{8(\nu+2)}\right)\right] \le \tag{15}$$

$$\le \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \exp\left(\frac{4(\nu+1)(\nu+2)-y^2}{4(\nu+1)(\nu+2)-x^2}\right)^{\nu+2} \le \tag{16}$$

$$\le \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \exp\left[-\left(\frac{y^2-x^2}{4(\nu+1)}\right)\right] \le \tag{17}$$

$$\le \left(\frac{y}{x}\right)^\nu. \tag{18}$$

Неравенство (17) в других обозначениях доказано в [2]. Аналогичные оценки для общих цилиндрических функций есть в [5]; другие неравенства для отношений функций Бесселя получены в [4].

Приведем несколько первых оценок (14):

$$J_\nu(x) \le \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left(1-\frac{x^2}{2(\nu+1)(\nu+3)}\right)^{\frac{(\nu+3)^2}{4(\nu+2)}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{x^2}{8(\nu+2)}\right) \le \tag{19}$$

$$\le \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left(1-\frac{x^2}{2(\nu+1)(\nu+2)}\right)^{\nu+2} \le \tag{20}$$

$$\le \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\nu+1)}\right) \le \tag{21}$$

$$\le \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}. \tag{22}$$

Оценка (22) является классической [13]. Оценка (21) доказана в [10].

Т е о р е м а 7. *Для первого нуля функции Бесселя справедливы оценки*

$$\gamma_{\nu,1} < \ldots < \sqrt{6(\nu+2)(\nu+3)-\sqrt{4(\nu+2)(\nu+3)(5\nu^2+25\nu+38)}} < \tag{23}$$

$$< \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)} < \tag{24}$$

$$< 2\sqrt{(\nu+1)(\nu+2)}. \tag{25}$$

Оценка (25) известна [13, 14], а (23) – новая. Получено несколько более точных, но и более сложных неравенств этого типа.

3. В этом пункте для отношения функций Макдональда получены двусторонние неравенства, отражающие специфику цепной дроби (8) при мнимых z.

Т е о р е м а 8. *При* $0 < x < y$ *справедливы двусторонние оценки*

$$\frac{I_\nu(y)}{I_\nu(x)} \le \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \exp\left(\int_x^y \frac{R_{2k,\nu+1}(it)dt}{R_{2k+1,\nu}(it)}\right), \tag{26}$$

$$\frac{I_\nu(y)}{I_\nu(x)} \ge \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \exp\left(\int_x^y \frac{R_{2k-1,\nu+1}(it)dt}{R_{2k,\nu}(it)}\right); \tag{27}$$

при этом неравенства (26) *по* k *монотонно убывают, а* (27) – *монотонно возрастают.*

Также получена формула относительной ошибки, аналогичная (12), и оценка разности между правыми частями (26) и (27).

Приведем несколько первых оценок (26), (27):

$$\frac{I_\nu(y)}{I_\nu(x)} \le \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \left(\frac{y^2+2(\nu+1)(\nu+3)}{x^2+2(\nu+1)(\nu+3)}\right)^{\frac{(\nu+3)^2}{4(\nu+2)}} \times \tag{28}$$

$$\times \exp\left(\frac{y^2-x^2}{8(\nu+2)}\right) \le$$

$$\le \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \exp\left(\frac{y^2-x^2}{4(\nu+2)}\right); \tag{29}$$

$$\frac{I_\nu(y)}{I_\nu(x)} \ge \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \left(\frac{y^2+4(\nu+1)(\nu+2)}{x^2+4(\nu+1)(\nu+2)}\right)^{\nu+2} \ge \tag{30}$$

$$\ge \left(\frac{y}{x}\right)^\nu. \tag{31}$$

Оценки (31) есть в [1, 2]. В [2] получена аналогичная оценка для отношения функций $K_\nu(z)$. Неравенство, близкое к (29), доказано в [4] методом работы [3].

В частности, при $\nu = \pm 1/2$ из (10), (26), (27) получаем оценки для функции $\mathrm{tg}\,z$, $\mathrm{th}\,z$. Подобные неравенства изучались в [3].

В заключение отметим, что представляет интерес сравнение неравенств этого параграфа с аналогичными неравенствами из работ [1 - 10] аналитически и при помощи компьютера. Вероятным представляется утверждение, что наши неравенства точнее. Действительно, в основе нашей работы и работ [1 - 10] лежит общая идея – оценка логарифмической производной функций Бесселя рациональной функцией. Используемые же в настоящей работе рациональные приближения – цепные дроби и аппроксимации Паде – являются в определенном смысле оптимальными.

Интересно отметить, что задача о дальнейшем уточнении неравенств (10) и (26), (27) представляется идеальной для решения при помощи компьютерных программ типа REDUCE.

Автор благодарит Л.А. Минина (Воронеж) за многочисленные полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ross D.K.* // SIAM Rev. 1973. V. 15. P. 668 - 670.
2. *Paris R.B.* // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. № 1. P. 203 - 205.
3. *Ronveaux A.* // Math. Mag. 1968. V. 41/42. P. 231 - 234.
4. *Laforgia A., Mathis M.L.* // R. C. circ. mat. Palermo. Ser. 2. 1989. T. 38. P. 319 - 328.
5. *Laforgia A.* // J. Comp. and Appl. Math. 1991. V. 34. P. 263 - 267.
6. *Joshi C.M., Bissu S.K.* // J. Austral. Math. Soc. 1991. V. 50. P. 333 - 342.
7. *Gautschi W.* // Appl. Math. Lett. 1991. V. 4. № 5. P. 47 - 51.
8. *Ifantis E.K., Kokologiannaki C.G., Kouris C.B.* // J. Comp. and Appl. Math. 1991. V. 34. P. 21 - 31.
9. *Ifantis E.K., Siafarikas P.D.* // R. C. circ. mat. Palermo. Ser. 2. 1991. T. 40. P. 347 - 356.
10. *Logan B.F.* // Duke Math. J. 1975. V. 42. № 4. P. 661 - 706.
11. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986. 368 с.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
13. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. 296 с.
15. *Минин Л.А., Ситник С.М.* Аппроксимации Паде элементарных и специальных функций. Препринт Ин-та автоматики и процессов управления ДВО РАН. Владивосток, 1991. 22 с.