УДК 517.9

ЗАДАЧА РИМАНА - ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА

А.П. Солдатов, О.В. Чернова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Soldatov@bsu.edu.ru,vaschenko@bsu.edu.ru

Аннотация. Для эллиптической системы

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi + a\phi + b\overline{\phi} = f_2$$

в области D на плоскости с гладкой границей Γ рассматривается задача Римана-Гильберта

$$\mathrm{Re}\ G\phi^+|_\Gamma = f_1,$$

где определитель $l\times l-$ матрицы— функции G всюду отличен от нуля. В работе установлено, что в классе

$$C^\mu_J(\overline{D}) = \{\phi \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D) | L\phi \in C^\mu(\overline{D})\}, \quad L = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}$$

эта задача фредгольмова и ее индекс

$$æ = -æ_0 + l, \quad æ_0 = \frac{1}{\pi}(\arg\det G)\big|_\Gamma.$$

Ключевые слова: эллиптические системы, задача Римана-Гильберта, фредгольмов оператор.

Пусть область D на плоскости $\mathbb{C}$ ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$. Последнее означает, что производная гладкой параметризации кривой принадлежит $C^{\mu+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. В области D рассмотрим эллиптическую систему

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi + a\phi + b\overline{\phi} = f_2, \tag{1}$$

где собственные значения постоянной матрицы $J \in C^{l\times l}$ лежат в верхней полу- плоскости, а $l\times l-$матричные коэффициенты $a, b \in C^\mu(\overline{D})$. Не ограничивая общности, матрицу J здесь можно считать треугольной. Решения этой системы представляют $l-$вектор-функции $\phi = (\phi_1 \ldots \phi_l)$, они ищутся в классе

$$C^\mu_J(\overline{D}) = \{\phi \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D) | L\phi \in C^\mu(\overline{D})\}, \quad L = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}.$$

Для данной эллиптической системы рассмотрим задачу Римана—Гильберта

$$\mathrm{Re} G\phi^+|_\Gamma = f_1, \tag{2}$$

где $l \times l-$ матрица- функция $G \in C^{\mu+0}$ и ее определитель всюду отличен от нуля.

Исходя из матричного обозначения $z_J = x \cdot 1 + y \cdot J$, для $z = x + iy \in \mathbb{C}$, введем интегральный оператор типа Коши

$$(I_1\varphi_1)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_1(t), \quad z \in D$$

и сингулярный оператор Коши

$$(S_J\varphi_1)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1} dt_J \varphi_1(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3}$$

где $\varphi_1 \in C^\mu(\Gamma)-$ вещественная $l-$вектор-функция. Согласно [1] интегральный оператор I_1 ограничен $C^\mu(\Gamma) \to C_J^\mu(\overline{D})$ и справедлива формула Сохоцкого-Племеля

$$2(I_1\varphi_1)^+(t_0) = \varphi_1(t_0) + (S_J\varphi_1)(t_0), \quad t_0 \in \Gamma. \tag{4}$$

Пусть $\overline{D}$ содержится в круге $|z| < R$, рассмотрим линейный ограниченный оператор продолжения $P : C^\mu(\overline{D}) \to C^\mu(\mathbb{C})$, для которого $(P\varphi)(z) = 0$ при $|z| \geq R$ и $(P\varphi)(z) = \varphi(z)$ при $z \in D$. С помощью этого оператора продолжения введем интегральный оператор по области

$$(I_2\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} (t-z)_J^{-1}(P\varphi)(t) dt_1 dt_2,$$

определенный для комплексных $l-$вектор-функций $\varphi \in C^\mu(\overline{D})$.

Согласно [2] оператор I_2 ограничен $C^\mu(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$ и справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)(I_2\varphi) = \varphi. \tag{5}$$

В частности, оператор I_2 компактен в пространстве $C^\mu(\overline{D})$. Из этих же соображений следует, что пространство C_J^μ относительно нормы

$$|\varphi| = |\varphi|_{C^\mu} + |L\varphi|_{C^\mu}$$

банахово.

Обратимся к сформулированной задаче Римана—Гильберта.

Лемма 1. *Задача (1)—(2) в классе $C_J^\mu(\overline{D})$ эквивалентным образом редуцируется к следующей системе сингулярных интегральных уравнений*

$$\begin{gathered} 2\mathrm{Re}(GI_2\varphi_2)(t_0) + 2\mathrm{Re}[G(\varphi_1 + S_J\varphi_1)](t_0) - 2\mathrm{Im}G(t_0)\xi = 2f_1(t_0), \;\; t_0 \in \Gamma, \\ \varphi_2(z) + [aI_2\varphi_2 + b\overline{I_2\varphi_2}](z) + [aI_1\varphi_1 + b\overline{I_1\varphi_1}](z) + i(a-b)\xi = f_2(z), \;\; z \in D, \end{gathered} \tag{6}$$

относительно некоторой вещественной $l-$вектор-функции $\varphi_1 \in C^\mu(\Gamma)$, комплексной $l-$вектор-функции $\varphi_2 \in C^\mu(\overline{D})$ и постоянного вектора $\xi \in \mathbb{R}^l$.

Доказательство основывается на теореме представления 2 из [2]. Напомним, что по предположению матрица J треугольна, так что условия этой теоремы выполнены. Таким образом, любая функция $\phi \in C_J^\mu$ единственным образом представима в виде

$$\phi = I_1\varphi_1 + I_2\varphi_2 + i\xi, \quad z \in D.$$

Подставляя это интегральное представление в (1)—(2) и пользуясь формулами (4) и (5), после элементарных преобразований приходим к системе (6).

Система (6) может быть записана в терминах классического сингулярного оператора Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \varphi(t)(t-t_0)^{-1}dt, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{7}$$

В основе лежит следующий критерий компактности интегрального оператора вида

$$(K\varphi)(t_0) = \int_\Gamma \frac{k(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)|dt|, \quad t_0 \in \Gamma \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть Γ гладкий контур, $k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma\times\Gamma)$, $0<\nu<1$, и $k(t,t)\equiv 0$. Тогда для $\varphi \in C(\Gamma)$ оператор (8) принадлежит классу $C^\mu(\Gamma), 0<\mu<\nu$, и справедлива оценка*

$$|K|_\mu \le C|\varphi|_0|k|_\nu,$$

где постоянная $C>0$ зависит только от μ, ν и Γ.

Здесь и ниже $|\varphi|_\alpha$, $0<\alpha<1$, означает норму в C^α, а $|\varphi|_0$ есть sup − норма.

Доказательство. Существует такое $\rho>0$ (стандартный радиус контура), что для любой точки $a\in\Gamma$ и $0<\delta<\rho$ множество $\Gamma\cap\{|t-a|\le\delta\}$ является гладкой дугой. При этом справедливы оценки

$$\int\limits_{\Gamma\cap\{|t-a|\le\delta\}} |t-a|^{\alpha-1}ds_t \le M\delta^\alpha, \quad 0<\alpha<1, \tag{9}$$

$$\int\limits_{\Gamma\cap\{|t-a|\ge\delta\}} |t-a|^{\alpha-2}ds_t \le M\begin{cases}\delta^{\alpha-1}, & 0<\alpha<1,\\ \ln\frac{\rho}{\delta}, & \alpha=1,\end{cases} \tag{10}$$

где постоянная $M>0$ зависит только от Γ и α.

В частности,

$$|\psi(t_0)| \le |k|_\nu|\varphi|_0\int_\Gamma |t-t_0|^{\nu-1}ds_t \le C_0|k|_\nu|\varphi|_0. \tag{11}$$

Зафиксируем точки $t_1,t_2\in\Gamma$ и пусть $\delta=|t_1-t_2|\le\rho/3$. Запишем

$$\psi(t_1)-\psi(t_2) = \int_\Gamma\left[\frac{k(t_1,t)}{t-t_1}-\frac{k(t_2,t)}{t-t_2}\right]\varphi(t)ds_t = \Delta_1+\Delta_2,$$

где Δ_1 и Δ_2 означают интегралы по, соответственно, $\Gamma_1=\Gamma\cap\{|t-t_1|\le 2\delta\}$ и $\Gamma_2=\Gamma\cap\{|t-t_1|\ge 2\delta\}$ Очевидно,

$$|\Delta_1| \le |k|_\nu|\varphi|_0\int_{\Gamma_1}[|t-t_1|^{\nu-1}+|t-t_2|^{\nu-1}]ds_t.$$

Поскольку $|t-t_1|\le 2\delta$ влечет $|t-t_2|\le 3\delta$, на основании (9) имеем:

$$|\Delta_1| \le M[(2\delta)^\nu+(3\delta)^\nu]|k|_\nu|\varphi|_0.$$

Что касается Δ_2, то запишем

$$\Delta_2 = \int_{\Gamma_2} \frac{k(t_1,t) - k(t_2,t)}{t - t_1}\varphi(t)ds_t + \int_{\Gamma_2} \frac{(t_1 - t_2)k(t_2,t)}{(t-t_1)(t-t_2)}\varphi(t)ds_t$$

Тогда

$$|\Delta_2| \le |k|_\nu |\varphi|_0 \Big[\delta^\nu \int_{\Gamma_2} |t-t_1|^{-1} ds_t + \delta \int_{\Gamma_2} |t-t_1|^{-1}|t-t_2|^{\nu-1} ds_t$$

Поскольку $|t - t_1| \ge 2\delta$ влечет $|t-t_2| \ge |t-t_1| - \delta \ge |t-t_1| - |t-t_1|/2$, к выражению в квадратных скобках можем применить оценку (10). Тогда

$$|\Delta_2| \le |k|_\nu |\varphi|_0 M[\delta^\nu \ln\frac{\rho}{\delta} + 2^{1-\nu}\delta^\nu]$$

Объединяя обе оценки для Δ_1 и Δ_2, в результате получим:

$$\frac{|\psi(t_1) - \psi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \le C_1 |k|_\nu |\varphi|_0, \quad |t_1 - t_2| \le \frac{\rho}{3},$$

с некоторой постоянной $C_1 > 0$. Если $|t_1 - t_2| \ge \rho/3$, то, очевидно, с учетом (11)

$$\frac{|\psi(t_1) - \psi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \le 2\left(\frac{3}{\rho}\right)^\nu C_0 |k|_\nu |\varphi|_0.$$

Тем самым необходимая оценка теоремы установлена.

Из теоремы 1 следует, что для функций $k \in C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$ со свойством $k(t,t) = 0$ оператор $K\varphi$, определяемый правой частью (8), ограничен $C(\Gamma) \to C^\mu(\Gamma)$ и, значит, компактен в $C^\mu(\Gamma)$. Класс таких операторов обозначим $\mathcal{K}_0(C^\mu)$.

Лемма 2. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$, сингулярные операторы S_J и S определяются (3) и (7) соответственно. Тогда операторы*

$$S_J - S, \ -S_{\overline{J}} + S \in \mathcal{K}_0(C^\mu). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть для определенности $\Gamma \in C^{1,\nu}$ с некоторым $\nu > \mu$, $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ - единичный касательный вектор к Γ в точке t, рассматриваемый в соответствии с выбранной ориентацией контура. Поскольку $dt = e(t)|dt|$ и $dt_J = e_J(t)|dt|$, оператор $K = S_J - S$ можно записать в форме (8) по отношению к

$$\frac{k(t_0,t)}{t - t_0} = (t-t_0)_J^{-1} e_J(t) - (t-t_0)^{-1} e(t),$$

т.е. с функцией $k(t_0,t) = (t-t_0)(t-t_0)_J^{-1} e_J(t) - e(t)$. Необходимо убедиться, что

$$k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma\times\Gamma), \quad k(t,t) \equiv 0.$$

Очевидно, этот факт достаточно показать по отношению к любой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Рассмотрим гладкую параметризацию $\gamma: \ [0,1] \to \Gamma$ класса $C^{1,\nu}[0,1]$ и положим $t = \gamma(s),\ t_0 = \gamma(s_0),\ 0 \le s \le 1$. Тогда

$$k[\gamma(s_0), \gamma(s)] = [\gamma(s) - \gamma(s_0)][\gamma(s) - \gamma(s_0)]_J^{-1}[\gamma'(s)]_J - \gamma'(s).$$

Пусть для краткости $\widetilde{k}(s_0, s) = k[\gamma(s_0), \gamma(s)]$ и

$$q(s_0, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} = \int_0^1 \gamma'(rs + (1-r)s_0)dr.$$

Поскольку $\gamma' \in C^\nu[0,1]$, функция $q(s_0, s) \in C^\nu[0,1] \times [0,1]$ и $q(s,s) = \gamma'(s)$. В этих обозначениях

$$\widetilde{k}(s_0, s) = q(s_0, s) q_J^{-1}(s_0, s)[\gamma'(s)]_J - \gamma'(s).$$

Так как $|q(s_0, s)| \neq 0$ для $0 \leqslant s_0, s \leqslant 1$, матрица—функция $q_J^{-1}(s_0, s) \in C^\nu([0,1] \times [0,1])$. Таким образом, принадлежность $\widetilde{k}(s_0, s)$ классу C^ν очевидна. Равенство нулю функции $\widetilde{k}(s_0, s)$ при $s = s_0$ следует непосредственно из ее определения.

Поскольку предыдущие рассуждения справедливы для любой матрицы J, собственные значения которой не вещественны, они проходят и по отношению к оператору $S_{\overline{J}}$ в (12).

Теорема 1 и леммы 1,2 приводят теперь к следующему основному результату.

Теорема 2. *Задача (1)—(2) фредгольмова в классе $C_J^\mu(\overline{D})$ и ее индекс æ дается формулой*

$$æ = -æ_0 + l, \quad æ_0 = \frac{1}{\pi}(\arg\det G)\big|_\Gamma, \tag{13}$$

где приращение непрерывной ветви аргумента берется в направлении, оставляющем область D слева.

Доказательство. Систему (6) можно переписать в следующей операторной форме:

$$\begin{gathered}(K_{11}\varphi_1)(t_0) + (K_{12}\varphi_2)(t_0) + C_1(t_0)\xi = f_1(t_0),\ t_0 \in \Gamma,\\ (K_{21}\varphi_1)(z) + \varphi_2(z)(1 + K_{22}) + C_2(z)\xi = f_2(z),\ z \in D.\end{gathered} \tag{14}$$

В силу того,что функция φ_1 вещественна, $2\mathrm{Re}[GS_J\varphi_1] = GS_J\varphi_1 - G S_{\overline{J}}\varphi_1$, для оператора K_{11} получим выражение

$$(K_{11}\varphi_1)(t_0) = [G(\varphi_1 + S_J\varphi_1) + \overline{G}(\varphi_1 - S_{\overline{J}}\varphi_1)](t_0).$$

Операторы $K_{12},\ K_{21},\ K_{22}$ и функции C_1, C_2 здесь определяются равенствами

$$(K_{12}\varphi_2)(t_0) = 2\mathrm{Re}(GI_2\varphi_2)(t_0),$$

$$(K_{21}\varphi_1)(z) = (aI_1\varphi_1 + b\overline{I_1\varphi_1})(z), \quad (K_{22}\varphi_2)(z) = (aI_2\varphi_2(t) + b\overline{I_2\varphi_2(t)})(z),$$

$$C_1(t_0) = -2\mathrm{Im}G(t_0), \quad C_2(z) = i(a-b)(z)$$

Оператор системы (14) действует $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^\mu(\overline{D}) \times \mathbb{R}^l \to C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^\mu(\overline{D})$, где нижний индекс $\mathbb{R}$ указывает на то, что элементы соответствующего пространства являются вещественными вектор-функциями. Саму систему можно записать в краткой форме $N\varphi + C\xi = f$ с операторными матрицами

$$N = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & 1 + K_{22}\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор K_{11} здесь естественным образом продолжается на комплексные вектор-функции по правилу $\overline{K_{11}\varphi_1} = K_{11}\overline{\varphi_1}$.

Поэтому оператор данной системы можно рассматривать в пространствах комплексных векторов, при этом его свойство фредгольмовости и индекс останутся неизменными (если размерности понимать над соответствующими полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$). Таким образом, достаточно убедится,что оператор N фредгольмов в пространстве $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}(\overline{D})$ комплексных вектор-функций и его индекс дается первым слагаемым $æ_0$ формулы (13).

Ясно, что операторы K_{22} и K_{12} компактны, соответственно, в пространствах $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\overline{D})$ и $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\Gamma)$. На основании леммы 2 можем записать $K_{11} = G(1+S) + \overline{G}(1-S) + GK_1 + \overline{G}K_2$, где операторы $K_j \in \mathcal{K}_0(C^{\mu})$.

Таким образом, с точностью до компактного слагаемого оператор N совпадает с

$$N_0 = \begin{pmatrix} G(1+S) + \overline{G}(1-S) & 0 \\ K_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Фигурирующую здесь матрицу можно представить в виде произведения

$$\begin{pmatrix} G(1+S) + \overline{G}(1-S) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно классической теории сингулярных уравнений [3] оператор, определяемый первым сомножителем фредгольмов и его индекс равен $-æ_0$. Что касается оператора, отвечающего второму сомножителю, то он, очевидно, обратим.

Таким образом, на основании известных свойств [4] фредгольмовых операторов оператор N фредгольмов и его индекс равен $-æ_0$, что завершает доказательство теоремы.

Литература

1. А.П. Солдатов. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I.Гладкий случай. // Изв. АН СССР"(сер.матем.) 1991. Т.55, No.5.С.1070-1100.

2. О.В. Ващенко. Интегральное представление решений эллиптических систем первого порядка в классах Гельдера. // Материалы III Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик-Эльбрус. 2005.-С.11-14.

3. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд., М., Наука, 1968.

4. Р. Пале. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.-М.:Мир, 1970.

THE RIEMANN-HILBERT PROBLEM FOR ELLIPTIC SYSTEM OF THE FIRST ORDER ON THE PLAIN IN HOLDER CLASSES

A.P. Soldatov, O.V. Chernova

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Soldatov@bsu.edu.ru,vaschenko@bsu.edu.ru

Abstract. The Riemann-Hilbert problem

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi + a\phi + b\overline{\phi} = f_2$$

is considered in domain D which is bounded by smooth contour Γ, where $\det G(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$. It is proved that this problem is Fredholm solvable in the class

$$C^{\mu}_{J}(\overline{D}) = \{\phi \in C^{\mu}(\overline{D}) \cap C^{1}(D) | L\phi \in C^{\mu}(\overline{D})\}, \quad L = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}$$

end it's index

$$æ = -æ_0 + l, \quad æ_0 = \frac{1}{\pi}(\arg\det G)\big|_{\Gamma}.$$

Keywords: elliptic systems, Riemann-Hilbert problem, Fredholm operator.