УДК 517.583

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СДВИГОВ ГАУССОВЫХ ФУНКЦИЙ

М.В. Журавлев[1], Л.А. Минин[1], С.М. Ситник[2]

[1]Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1,394000, г. Воронеж, Россия.
[2]Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, 394065, г. Воронеж, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. Изучается процедура построения функции Лагранжа для интерполяции на равномерной сетке с гауссовыми функциями. Показано, что с ростом дисперсии происходит резкий рост порядка величин и дано объяснение этого на основе свойств тета-функции. Проведено сравнение аналитического и приближённого способов вычисления коэффициентов функции Лагранжа. Получены несколько неравенств для минимумов тета–функции Якоби, которые используются при оценках скорости интерполяции.

Ключевые слова: интерполяция, функции Лагранжа, сдвиги функций Гаусса, тета–функции Якоби.

1 Введение.

В последние годы возрос интерес к интерполяции с помощью гауссовых функций [1]–[5]. Находящаяся на стыке классической теории приближений и современной вычислительной математики, данная тематика постоянно пополняется новыми фактами.

В настоящей статье изучаются вычислительные эффекты интерполяции на равномерной бесконечной одномерной сетке. С помощью компьютерных расчётов установлено, что реализация формул из [1]–[2] приводит к очень большим числам. Ключевым моментом для объяснения этого явилось использование тета-функции Якоби [6]–[7]. Доказаны неравенства для минимумов тета–функций Якоби, кратко проанализирована их точность. Более подробная информация о полученных авторами оценках тета–функций содержится в [10]–[14].

Предложен способ вычисления коэффициентов функции Лагранжа с помощью дискретного преобразования Фурье и приведены таблицы, иллюстрирующую точность проводимых вычислений. Показано, что сдвиг на полшага сетки приводит к дополнительным эффектам, не описанным ранее в литературе.

2 Функция Лагранжа.

Пусть функция $\varphi(x)$ определена на $\mathbb{R}$. Рассмотрим систему её целочисленных сдвигов $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Требуется по заданной функции $f(x)$ построить интерполирующую функцию $p(x)$,

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \cdot \varphi(x-k),$$

совпадающую с $f(x)$ в целых узлах. Фактически, речь идет о решении линейной системы бесконечного числа уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \cdot \varphi(m-k) = f(m), m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

с бесконечным числом неизвестных p_k .

Опишем общую алгебраическую схему решения данной задачи, следуя [1]–[2], [9]. Так как левая часть (1) представляет собой дискретную свёртку, то удобно перейти к рядам Фурье для следующих функций

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot e^{ikt},$$

$$P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \cdot e^{ikt},$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) \cdot e^{ikt}.$$

Если перемножить последние два ряда, то с учётом (1) получим равенство

$$P(t) \cdot \Phi(t) = F(t).$$

Для строгого обоснования данного преобразования достаточно предположить абсолютную сходимость этих рядов. Таким образом, коэффициенты p_k могут быть найдены с помощью разложения в ряд Фурье функции $F(t)/\Phi(t)$.

Введём также функцию Лагранжа [1],[3]

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \varphi(x-k), \tag{2}$$

$$g(m) = \delta_{0m}, m \in \mathbb{Z}.$$

Здесь δ_{0m} — символ Кронекера. Обозначим отвечающий $g(x)$ ряд Фурье через $G(t)$. Тогда

$$G(t) \cdot \Phi(t) = 1, \tag{3}$$

где

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ikt}.$$

Зная функцию $g(x)$, можно сразу выписать формулы для коэффициентов p_k и интерполирующей функции $p(x)$:

$$p_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m f(k-m), p(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l) \cdot g(x-l). \tag{4}$$

Нахождение $G(t)$ из уравнения (3) возможно лишь в том случае, когда $\Phi(t)$ не обращается в ноль. Возможность разложения в абсолютно сходящийся ряд Фурье функции $1/\Phi(t)$ в этом случае гарантируется знаменитой теоремой Винера [8]. Кроме того, требуется указать эффективную вычислительную процедуру разложения в ряд Фурье функции $1/\Phi(t)$ и определить, сколько слагаемых в бесконечных рядах (2), (4) надо брать при вычислениях с требуемой точностью.

3 Случай Гауссовых функций.

Пусть

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

где действительное число $\sigma > 0$ играет роль параметра. Величина σ^2 обычно интерпретируется как дисперсия. Функция $\Phi(t)$ оказывается одной из тета–функций Якоби, а именно

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot e^{ikt} = \vartheta_3\left(\frac{t}{2}, q\right),$$

$$q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right).$$

Тета–функции Якоби были первоначально определены и изучены им в работе "Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum", опубликованной в 1829 году в Кёнигсберге. Этот город многим связан с историей математики, даже своими мостами (Эйлер!). Здесь Якоби в то время работал вместе с Бесселем, так как жизнь в столичном Берлине была очень дорогой (хотя отец Карла Якоби был обеспеченным человеком, семья потеряла средства во времена европейского финансового кризиса тех лет). Этот трактат содержал новый собственный подход Якоби, при котором теория всех эллиптических функций излагалась на основе введённых им тета–функций. Далее тета–функции были подробнейшим образом изучены им в ряде последующих работ, особенно в 1835–1838 годах. Широкую известность результаты Якоби получили в том числе в результате обработки и дополнений, выполненных его учеником Карлом Борхардом для издания лекций Якоби и собрания его сочинений. Следует отметить, что Якоби практически в одиночку построил основания теории тета–функций, что встречалось в истории математики нечасто; так нами подсчитано, что из более чем сотни формул в соответствующей главе книги Уиттекера и Ватсона [6] только семь принадлежат другим математикам, а все остальные самому Якоби.

Пользуясь произведением Якоби [6]–[7], функцию $\Phi(t)$ можно записать в виде

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k}\right) \cdot \left(1 + 2q^{2k-1}\cos t + q^{4k-2}\right), \qquad (5)$$

откуда следует положительность $\Phi(t)$ при всех $-1 < q < 1$.

В работах В. Г. Мазьи, Г. Шмидта [1]–[2] функция Лагранжа построена аналитически. Приведем этот результат ([2], гл. 7, лемма 7.8)

Теорема 1 *Справедлива формула*

$$\frac{1}{\Phi(t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m \cdot e^{imt},$$

где

$$g_m = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{m^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|m|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{6}$$

с константой

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right) = \tag{7}$$

$$= \left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-2\pi^2\sigma^2 \cdot (2r+0.5)^2\right) \tag{8}$$

Заметим, что ряд (7) быстро сходится при малых, а (8) — при больших значениях σ. Равенство этих рядов следует из формулы преобразования Пуассона для тета–функций [6]. При вычислениях по формуле (6) экспоненциальный множитель следует внести под знак суммы, чтобы избежать работы как с очень большими, так и с очень маленькими числами. Коэффициенты g_m образуют знакочередующуюся убывающую по модулю последовательность, причём $g_{-m} = g_m$.

В таблице 1 приведены рассчитанные нами значения этих коэффициентов при разных значениях параметра σ (мы приводим их с тремя верными значащими цифрами).

Таблица 1

Значения некоторых коэффициентов функции Лагранжа.

σ	g_0	g_{25}	g_{200}	g_{625}
1.0	5.29	$-2.90 \cdot 10^{-5}$	$5.89 \cdot 10{-}17$	$-1.49 \cdot 10^{-135}$
2.0	$1.53 \cdot 10^{6}$	$-1.26 \cdot 10^{5}$	$3.99 \cdot 10^{-5}$	$-3.38 \cdot 10^{-28}$
3.0	$2.32 \cdot 10^{16}$	$-1.06 \cdot 10^{16}$	$6.73 \cdot 10^{11}$	$-3.75 \cdot 10^{1}$
4.0	$9.76 \cdot 10^{30}$	$-7.34 \cdot 10^{30}$	$3.71 \cdot 10^{28}$	$-6.33 \cdot 10^{22}$
5.0	$9.68 \cdot 10^{49}$	$-8.57 \cdot 10^{49}$	$3.51 \cdot 10^{48}$	$-7.14 \cdot 10^{44}$
6.0	$2.10 \cdot 10^{73}$	$-1.98 \cdot 10^{73}$	$2.58 \cdot 10^{72}$	$-7.09 \cdot 10^{69}$
7.0	$9.60 \cdot 10^{100}$	$-9.29 \cdot 10^{100}$	$2.44 \cdot 10^{100}$	$-3.25 \cdot 10^{98}$

Отсюда сразу видно, что интерполяция с помощью сдвигов гауссовых функций при $\sigma > 2$ с практической точки зрения сомнительна.

Из результатов [3]–[4] следует, что при $\sigma \to +\infty$ функция Лагранжа $g(x)$ стремится к $sinc(\pi x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$. А получение значений функции $g(x)$ непосредственно с помощью ряда (2) в случае больших σ (например, $\sigma = 6$ или 7) требует суммирования чрезвычайно большого числа слагаемых, причём промежуточные вычисления надо проводить с высокой точностью. При этом, по–видимому, необходимо задействовать специализированные пакеты вычислений с большим числом десятичных знаков.

4 Оценка минимума тета-функции.

Причина столь резкого роста коэффициентов с увеличением параметра σ проста: положительная функция $\Phi(t)$ начинает принимать очень близкие к нулю значения вблизи своего минимума. Обратимся к представлению Якоби (5). Все множители в произведении положительны, причём выражение $1 + 2q^{2k-1}\cos t + q^{4k-2}$ достигает минимума при $t = \pi$ и максимума при $t = 0$, то есть

$$m(q) = \min_{t\in[0,2\pi]} \Phi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k}\right) \cdot \left(1 - q^{2k-1}\right)^2,$$

$$M(q) = \max_{t\in[0,2\pi]} \Phi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k}\right) \cdot \left(1 + q^{2k-1}\right)^2.$$

В таблице 2 приведены значения этой функции в точках экстремума и двух промежуточных точках. Как видно из таблиц 1 и 2, произведение $g_0 \cdot m(q)$ является величиной порядка $10^{-2} - 10^{-3}$.

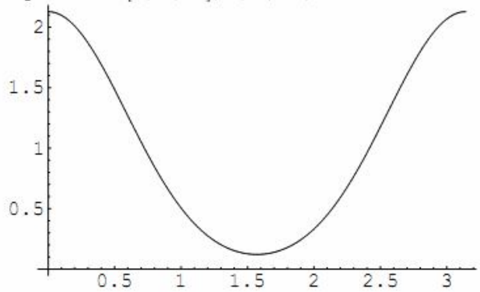
Таблица 2

Значения функции $\Phi(t)$.

σ	$q = \exp(-1/2\sigma^2)$	$M(q) = \Phi(0)$	$\Phi(\pi/6)$	$\Phi(\pi/2)$	$m(q) = \Phi(\pi)$
1.0	0.607	2.51	2.19	$7.30 \cdot 10^{-1}$	$3.61 \cdot 10^{-2}$
2.0	0.883	5.01	2.90	$3.61 \cdot 10^{-2}$	$2.68 \cdot 10^{-8}$
3.0	0.946	7.52	2.19	$1.13 \cdot 10^{-4}$	$7.74 \cdot 10^{-19}$
4.0	0.969	10.01	1.12	$2.68 \cdot 10^{-8}$	$1.03 \cdot 10^{-33}$
5.0	0.980	12.53	$4.07 \cdot 10^{-1}$	$5.05 \cdot 10^{-13}$	$6.61 \cdot 10^{-53}$
6.0	0.986	15.04	$1.08 \cdot 10^{-1}$	$7.74 \cdot 10^{-19}$	$2.11 \cdot 10^{-76}$
7.0	0.9899	17.55	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$9.78 \cdot 10^{-26}$	$3.39 \cdot 10^{-104}$

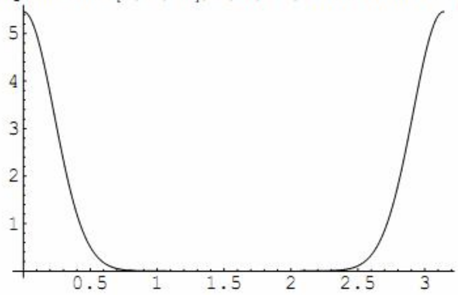
Приведём примерный график тета–функции на периоде. Выбрано значение $q = 0{,}5$. Видно, что тета–функция имеет достаточно пологий участок вблизи своего минимума, при этом величина самого минимума весьма мала. При приближении величины q к единице оба эти свойства графика резко усиливаются. Вот изображение графика при помощи пакета MATHEMATICA, полученное с использованием команды

Plot[EllipticTheta[3, x, .5], x, 0, Pi, PlotPoints -> 10000].



Как было отмечено выше, при приближении величины q к единице график тета–функции становится очень пологим, а величина минимума m принимает весьма малые значения. Вот как изображает график
MATHEMATICA при $q = 0{,}9$ по команде

Plot[EllipticTheta[3, x, .9], x, 0, Pi, PlotPoints -> 10000].



В работах [10]–[14] изучено поведение $m\,(q)$ при $q \to 1 - 0$. Приведем здесь соответствующие результаты.

Теорема 2 *Для минимального значения тета–функции справедлива оценка*

$$m\,(q) \leqslant (1-q)^{3n}\,\frac{((2n)!)^2}{2^n n!}, n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = t^n$ при значениях $0 \leqslant t \leqslant 1, n \in \mathbb{N}$. Тогда по формуле конечных приращений Лагранжа, применённой к отрезку $[x, 1], 0 \leqslant x \leqslant 1$, получаем неравенство $1 - x^n \leqslant n(1-x)$. Следовательно,

$$m = \min \vartheta_3(z,q) = \vartheta_3(\frac{\pi}{2}, q) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k-1}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n} 2k(1-q)\prod_{k=1}^{n}\left((2k-1)(1-q)\right)^2 =$$
$$= (1-q)^{3n}\,(2n)!![(2n-1)!!]^2 = (1-q)^{3n}\,\frac{((2n)!)^2}{(2n)!!} = (1-q)^{3n}\,\frac{((2n)!)^2}{2^n n!}.$$

Теорема доказана.

Посмотрим, насколько точна оценка (9). Если выбрать в (9) значения $q = 0{,}999, n = 3$, то получаем неравенство

$$m \leqslant 10^{-3\cdot 9}\frac{(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)^2}{8\cdot 6} = 10^{-27}\cdot 10800 \approx 10^{-23},$$

то есть гордиться пока нечем, точность оценки невысокая. Это связано с небольшим числом $n = 3$ рассмотренных сомножителей, более подробный анализ точности полученных оценок приведён в [10]. На самом деле при $q = 0,999$ правильный выбор — это $n = 500$. В [10] показано, что оптимальным значением n в случае $q = 1 - 10^{-k}$ является $n = \frac{10^k}{2}$.

В качестве второй попытки мы применим неравенство между арифметическим и геометрическим средними. Отметим, что подробное изложение теории средних приведено в [15], а также в работах одного из авторов [16]–[19], в которых разработан метод уточнения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений.

Теорема 3 *Для минимального значения тета-функции справедлива оценка*

$$m(q) \leqslant \exp\left(-\frac{q^2+2q}{1-q^2}\right) \tag{10}$$

Доказательство. Применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим к следующим двум конечным произведениям и просуммируем геометрические прогрессии. Получим:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k}\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-q^{2k}}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{q^2(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^{n},$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right) \leqslant \left(1-\frac{q(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^{n}.$$

Отсюда следует, что

$$m(q) = \min \vartheta_3(z,q) = \vartheta_3(\frac{\pi}{2},q) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k-1}\right)^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(1-\frac{q^2(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{q(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^{2n}.$$

Перейдём в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$. В результате получим нужную оценку

$$m(q) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{q^2(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{q(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^{2n}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{q^2(1-q^{2n+2})}{1-q^2}+\frac{2q(1-q^{2n+2})}{1-q^2}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{q^2+2q}{1-q^2}\right).$$

Теорема доказана.

Заметим, что при граничных значениях $q = 0$ и $q = 1$ в применённом неравенстве о средних достигается знак равенства. Следовательно, наши оценки точны вблизи этих значений $q = 0$ и, что особенно важно, при $q = 1$.

Проведём расчёт при том же значении $q = 0,999$, что и для предыдущей оценки. При помощи пакета MAPLE получаем такое значение для оценки (10): $m(0,999) \leqslant 1,2625 \cdot 10^{-651}$. Это намного лучше предыдущей оценки (9) при неоптимальном выборе параметров (как показано в [10], при оптимальном выборе эти оценки дают практически одинаковую точность). Мы получили примерно 60% правильной величины порядка, так как вычисления из [10] дают точное значение $m(0,999) \approx 10^{-1069}$.

5 Построение функции Лагранжа с помощью дпф.

Коэффициенты g_m можно посчитать не только аналитически, но и численно, с помощью квадратурных формул. В силу чётности тета–функции речь идёт о применении дискретного преобразования Фурье по косинусам. Выбрав достаточно большое число N (мы проводили расчёты для N =500, 1000, 2000) и соответствующий шаг $h = \frac{\pi}{N}$, вычислим значения $G(t) = \frac{1}{\Phi(t)}$ в узлах сетки $t_k = kh$, $k = 0, 1, ..., N$. Тогда

$$g_m \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{N} \left(\frac{G(t_0)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} G(t_k) \cos(mt_k) + \frac{G(t_N)}{2} (-1)^m \right). \tag{11}$$

Если через g_m обозначить коэффициенты функции Лагранжа, рассчитанные по формуле (6), а через $\tilde{g}_m$ — по формуле (11), то относительная погрешность задаётся обычным образом $\delta g_m = \left| \frac{\tilde{g}_m - g_m}{g_m} \right|$. В таблице 3 приведены относительные погрешности для разных значений m и σ . Данные пропущены в тех случаях, когда сами g_m очень малы (см. таблицу 1). Предлагаемый нами способ нахождения коэффициентов функции Лагранжа представляется полезным, поскольку пригоден не только для гауссовых функций, но и других систем целочисленных сдвигов.

Таблица 3

Относительная погрешность определения коэффициентов функции Лагранжа с помощью ДПФ.

σ	$\delta\, g_0$	$\delta\, g_{25}$	$\delta\, g_{200}$	$\delta\, g_{625}$
1.0	$8.19 \cdot 10^{-20}$	$4.56 \cdot 10^{-15}$	$---$	$---$
2.0	$1.26 \cdot 10^{-18}$	$2.08 \cdot 10^{-18}$	$5.91 \cdot 10^{-8}$	$---$
3.0	$5.06 \cdot 10^{-18}$	$5.14 \cdot 10^{-18}$	$8.19 \cdot 10^{-14}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$
4.0	$5.41 \cdot 10^{-18}$	$5.69 \cdot 10^{-18}$	$6.30 \cdot 10^{-16}$	$3.37 \cdot 10^{-9}$
5.0	$5.24 \cdot 10^{-18}$	$5.33 \cdot 10^{-18}$	$4.15 \cdot 10^{-17}$	$2.57 \cdot 10^{-12}$
6.0	$2.12 \cdot 10^{-17}$	$2.15 \cdot 10^{-17}$	$7.04 \cdot 10^{-18}$	$5.85 \cdot 10^{-14}$
7.0	$2.69 \cdot 10^{-17}$	$2.70 \cdot 10^{-17}$	$7.68 \cdot 10^{-17}$	$6.55 \cdot 10^{-13}$

Вычисления проводились на языке Pascal без использования специализированных средств, обеспечивающих повышенную точность. Мы работали с переменными типа extended, дающих 18–19 верных значащих цифр. Причина, по которой нам удалось получить величины из таблицы 1 с точностью, приведённой в таблице 3, состоит в том, что мы использовали преобразование Пуассона тета–функции [6]–[7]

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot e^{ikt} = \sqrt{2\pi}\,\sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t - 2\pi k)^2\right).$$

Первое из равенств применяется при малых σ , второе - при больших. Тот же приём используется и при реализации формулы (7).

6 Интерполяция со сдвигом на полшага.

Вернемся к формуле (2). Рассмотрим случай, когда аргумент функции $\varphi(x)$ сдвинут на полшага. Тогда нахождение коэффициентов g_k сводится к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \varphi\left(x+\frac{1}{2}-k\right) = \delta_{0m}, m \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Перемножив вспомогательные ряды Фурье

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ikt}, \Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi\left(k+\frac{1}{2}\right) \cdot e^{ikt},$$

придем с помощью (12) к равенству (3). Но теперь функция $\Phi(t)$ уже не будет строго положительной. Дело в том, что

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(k+0.5)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot e^{ikt} = \vartheta_2\left(\frac{t}{2}, q\right) \cdot e^{-i\frac{t}{2}}.$$

Из произведения Якоби [6]

$$\vartheta_2\left(\frac{t}{2}, q\right) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-q^{2k}\right) \left(1+2q^{2k}\cos t + q^{4k}\right)$$

следует, что $\Phi(\pi) = 0$. Следовательно, функция $G(t)$, определяемая из равенства $G(t) \cdot \Phi(t) = 1$, является неограниченной при $t \to \pi$.

Отметим, что данный эффект имеет место для всех σ . В случае, когда интерполирующая функция $p(x)$ строится для заданной функции $f(x)$, возможно согласованное обращение в 0 левой и правой частей (1), но это усложняет процедуру интерполяции.

Литература

1. V. Maz'ya, G. Schmidt. On approximate approximations using Gaussian kernels. IMA J. Num. Anal. vol.16. 1996. P. 13-29.

2. V. Maz'ya, G. Schmidt. Approximate approximations, AMS Mathematical Surveys and Monographs. vol. 141. 2007. 350 p.

3. S.D. Riemenschneider, N. Sivakumar. Gaussian radial-basis functions: a survey. J. Analysis. vol.8. 2000. P. 157-178.

4. Th. Shclumprecht, N. Sivakumar. On the sapling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian . arXiv:0803.4344v1 [math.CA]. 2008. 29 p.

5. C. Calcaterra, A. Boldt. Approximating with Gaussians . arXiv: 0805.3795v1 [math.CA]. 2008. 17 p.

6. Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс Анализа. Часть вторая: трансцендентные функции, М.: ГИФМЛ. 1963. 516 с.

7. Д. Мамфорд. Лекции о тета-функциях, М.: Мир. 1988. 448 с.

8. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа (изд. пятое), М.: Наука. 1981. 544 с.

9. И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина. Теория всплесков, М.: Физматлит. 2005. 616 с.

10. Л.А. Минин, С.М. Ситник. О неравенствах для тета–функций Якоби . Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". Спец. выпуск, посвященный 85-летию со дня рождения И.А. Киприянова. Воронеж. 2009. С. 3-73.

11. Л.А. Минин, С.М. Ситник. Неравенства для третьей тета–функции Якоби . Материалы Всероссийской заочной научно–практической конференции "Современная математика и проблемы математического образования". Орёл: Орловский государственный университет. 2009. С. 61-68.

12. Л.А. Минин, С.М. Ситник. О неравенствах для тета-функций Якоби . Труды участников международной школы–семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо. Ростов-на-Дону: Южный Федеральный университет. 2008. С. 124-126.

13. Е.В. Дикарева, Л.А. Минин, С.М. Ситник. Об оценках минимумов тета–функций Якоби . Материалы Российско–Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы Анализа и информатики". Нальчик: КБНЦ РАН. 2009. С. 82-84.

14. Л.А. Минин, С.М. Ситник. Неравенства для третьей тета–функции Якоби. Тезисы докладов международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (АМАДЕ). Минск, Беларусь. 2009. С. 111.

15. К. Джини. Средние величины, М.: Статистика. 1970. 447 с.

16. С.М. Ситник. Уточнения и обобщения классических неравенств, В книге: Исследования по математическому анализу. Серия: Математический Форум. Под ред. Коробейника Ю.Ф., Кусраева А.Г. Владикавказ: ВНЦ РАН. 2009. Т. 3. С. 221–266.

17. С.М. Ситник. Обобщения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений и их приложения. Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". 2005. № 1 (1). С. 3–42.

18. С.М. Ситник. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши-Буняковского. Вестник Самарской государственной экономической академии. 2002. № 1(8). С. 302–313.

19. С.М. Ситник. Уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского. Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. "Физико-математические науки"2000. № 9. С. 37–45.

ON NUMERICAL ASPECTS OF INTERPOLATING BY SHIFTS OF GAUSSIAN FUNCTIONS.

M.V. Zhuravlev[1], L.A. Minin[1], S.M. Sitnik[2]

[1]Voronezh State University,
Universitetskaya pl., 1, 394000, Voronezh, Russia.
[2] Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia,
pr. Patriotov, 53, 394065, Voronezh, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. We consider a procedure for finding the Lagrange function for interpolation with uniform nodes by shifts of Gaussian functions. It is proved that a dispersion growth is accompanied by fast coefficients growth. It is explained by use of theta–functions. Analytical and numerical ways of calculating coefficients are compared. We prove some inequalities for minimum of theta–function.

Keywords: interpolation, Lagrange function, shifts of Gaussian functions, Jacobi theta–functions.