УДК 517.95, 517.97

УСРЕДНЕННЫЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ И КОНВЕКЦИИ ПРИМЕСЕЙ В АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Св.А.Гриценко, А.М.Мейрманов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: SGritsenko@bsu.edu.ru,Meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача о моделировании диффузии и медленной конвекции примесей в абсолютно твердой среде, перфорированной системой пор, заполненных вязкой слабосжимаемой жидкостью. Наличие в точной физической модели малых быстро осциллирующих негладких коэффициентов делает практически невозможной ее численную реализацию. Предлагается вывод усредненной модели, не содержащей быстро осциллирующих коэффициентов.

Ключевые слова: уравнения Стокса, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

Математическая модель рассматриваемой задачи содержит малый параметр ε, равный отношению среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области: $\varepsilon = l/L$. Поэтому естественным упрощением, сохраняющим основные свойства задачи, является нахождение предельных режимов в точной модели при $\varepsilon \to 0$. Вторым упрощением является предположение о периодичности порового пространства. Пусть ограниченная связная область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$, Y_s — твердая часть Y, Y_f — жидкая часть, $\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s$. Тогда поровое пространство Ω^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твердый скелет Ω^ε_s есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon \backslash \partial\Omega$ — периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

В безразмерных переменных изучаемая система уравнений для скорости жидкости $\tilde{\mathbf{v}^\varepsilon}(x,t)$, давления $\tilde{p^\varepsilon}(x,t)$ и концентрации примеси $\tilde{c^\varepsilon}(x,t)$ в области $\Omega^\varepsilon \times (0,T)$ состоит из уравнений Стокса, описывающих движение слабосжимаемой вязкой жидкости, в которых кинематическая вязкость жидкости зависит от концентрации примеси:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}^\varepsilon}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu \mu(\tilde{c^\varepsilon}) \nabla \tilde{\mathbf{v}^\varepsilon} + (\alpha_\nu \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}^\varepsilon} - \tilde{p^\varepsilon})\mathbb{I}\right) + \mathbf{F}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{p^\varepsilon}}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}^\varepsilon} = 0, \tag{2}$$

и конвективного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial \tilde{c^\varepsilon}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}^\varepsilon} \nabla \tilde{c^\varepsilon} = \alpha_D \, \Delta \tilde{c^\varepsilon}. \tag{3}$$

На границе Γ^ε выполнено однородное условие Дирихле для скорости жидкости

$$\tilde{\mathbf{v}^\varepsilon}(x,t) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma^\varepsilon, \tag{4}$$

и однородное условие Неймана для концентрации примеси

$$\frac{\partial \tilde{c^\varepsilon}(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma^\varepsilon. \tag{5}$$

Задача замыкается начальными условиями:

$$\tilde{\mathbf{v}^\varepsilon}(x,0) = 0, \quad \tilde{p^\varepsilon}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{6}$$

$$\tilde{c^\varepsilon}(x,0) = c_0(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon. \tag{7}$$

Чтобы говорить о предельном переходе при $\varepsilon \to 0$, необходимо рассматривать все функции и последовательности в фиксированной области (Ω^ε зависит от ε). Поэтому мы продолжаем все функции из области $\Omega^\varepsilon \subset \Omega$ в Ω. Скорость $\tilde{\mathbf{v}^\varepsilon}$ и давление $\tilde{p^\varepsilon}$ продолжаются в Ω тривиально – нулем (на границе Γ^ε $\tilde{\mathbf{v}^\varepsilon} = 0$, $\tilde{p^\varepsilon} = 0$). Концентрацию $\tilde{c^\varepsilon}$ можно продолжить, используя известные методы продолжения, но при этом для продолженной функции теряется важное для нас свойство — ограниченность производной $\partial c^\varepsilon/\partial t$ в некотором сопряженном пространстве, необходимое для предельного перехода при $\varepsilon \to 0$. Поэтому мы поступаем по-другому.

Положим $\mathbf{v}^\varepsilon = \begin{cases} 0, & y \in \Omega^\varepsilon_s, \\ \tilde{\mathbf{v}^\varepsilon}, & y \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$ Аналогично, $p^\varepsilon = \begin{cases} 0, & y \in \Omega^\varepsilon_s, \\ \tilde{p^\varepsilon}, & y \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$

Пусть $\chi^\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$ — характеристическая функция Ω^ε в Ω, $\chi(\mathbf{y})$ — характеристическая функция Y_f в Y:

$\chi(y) = \begin{cases} 0, & y \in Y_s, \\ 1, & y \in Y_f. \end{cases}$

Введем малый параметр $\lambda > 0$ и рассмотрим вместо (3) уравнение:

$$\frac{\partial c^\varepsilon_\lambda}{\partial t} + \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda \nabla c^\varepsilon_\lambda = \operatorname{div}\left(\left(\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon)\right) \nabla c^\varepsilon_\lambda\right), \quad x \in \Omega, \tag{3'}$$

а вместо краевого условия (5) — краевое условие

$$\frac{\partial c^\varepsilon_\lambda(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in S. \tag{5'}$$

Тогда для фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ справедлива следующая

Теорема 1 *Задача (1),(2),(3'),(4),(5'),(6),(7) имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega (\alpha_\tau |\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda|^2 + \frac{1}{\alpha_p} {p^\varepsilon_\lambda}^2)\, dx + \int_{\Omega_T} \left(\alpha_\nu (div\, \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda)^2 + \alpha_\mu |\nabla \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda|^2\right) dx\, dt \leqslant MF^2, \tag{8}$$

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega |c^\varepsilon_\lambda|^2\, dx + \int_{\Omega_T} (\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon)) |\nabla c^\varepsilon_\lambda|^2\, dx\, dt \leqslant MF^2, \tag{9}$$

где M – постоянная, не зависящая от ε, λ и $F^2 = \int_{\Omega_T} |\mathbf{F}(x,t)|^2\, dx\, dt$.

Для доказательства мы определяем множество $\mathfrak{M}$ как

$$\mathfrak{M} = \{\bar{c} \in \mathbb{C}(\Omega_T) \quad | \quad 0 \leqslant \bar{c} \leqslant 1\}.$$

Для $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ функция $\mathbf{u}(x,t)$ находится как обобщенное решение задачи:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu \mu(\bar{c}) \nabla \mathbf{u} + (\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u} - q)\mathbb{I}\right) + \mathbf{F}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{11}$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad \mathbf{u}(x,0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \tag{12}$$

Решение задачи (10) – (12) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega (\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} q^2)\, dx + \int_{\Omega_T} \left(\alpha_\nu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \alpha_\mu |\nabla \mathbf{u}|^2\right) dx\, dt \leqslant M F^2. \tag{13}$$

Далее вводится нормированное пространство $\mathfrak{N}$ с нормой

$$(\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2 = \max_{0<t<T} \int_\Omega \alpha_\tau |\mathbf{u}|^2\, dx + \int_{\Omega_T} \left(\alpha_\nu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \alpha_\mu |\nabla \mathbf{u}|^2\right) dx\, dt.$$

Решение задачи (10) – (12) определяет непрерывный оператор $\mathbb{A} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ такой, что $\mathbf{u} = \mathbb{A}(\bar{c})$.

Полученное решение сглаживается при помощи следующего оператора:

$$\mathbf{w}_h(x,t) = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}(x,t)) = \frac{1}{h^4} \int_t^{t+h} d\tau \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) \mathbf{u}(y,\tau)\, dy, \quad \mathbf{w}_h(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}_T),$$

где усредняющее ядро $\eta(s) \in \mathbb{C}(R^3)$ – четная неотрицательная функция, $\eta(s) = 0$, если $|s| \geqslant 1$, $\int_{|s|\leqslant 1} \eta(|s|)\, ds = 1$,

и определяется функция $c_h(x,t)$ как решение задачи:

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + \mathbf{w_h} \nabla c_h = \operatorname{div}\left(\left(\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon)\right) \nabla c_h\right) \tag{14}$$

$$\frac{\partial c_h(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in S, \quad c_h(x,0) = \mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)), \quad \text{при } x \in \Omega, \tag{15}$$

где

$$\mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)) = \frac{1}{h^3} \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) c_0(y)\, dy.$$

Задача (14) – (15) как задача с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение $c_h(x,t)$, для которого справедлив принцип максимума:

$$0 \leqslant c_h(x,t) \leqslant \max c_0(x) \leqslant 1. \tag{16}$$

Таким образом, для каждой фиксированной функции $\mathbf{u} \in \mathfrak{N}$ существует единственная функция $\bar{c}_h \in \mathfrak{M}$, то есть определен оператор $\mathbb{B} : \quad \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, такой что $c_h = \mathbb{B}(\mathbf{u})$, и этот оператор непрерывен.

Наконец, определяется оператор

$$\mathbf{\Phi}: \quad \mathfrak{M} \to \mathfrak{M},$$

$$c_h = \mathbf{\Phi}(\bar{c}) = \mathbb{B}\left(\mathbb{A}(\bar{c})\right),$$

который непрерывен как суперпозиция непрерывных операторов, и более того, по теореме Арцела он вполне непрерывен и отображает выпуклое множество $\mathfrak{M}$ в себя, то есть по теореме Шаудера о неподвижной точке существует хотя бы одна неподвижная точка этого оператора.

Пусть $c_h^* = \mathbf{\Phi}(c_h^*)$ – неподвижная точка оператора $\mathbf{\Phi}$, и пусть $\mathbf{u}_h^* = \mathbb{A}(c_h^*)$. Тогда

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}_h^*}{\partial t} = \operatorname{div}\,(\alpha_\mu \mu(c_h^*)\nabla \mathbf{u}_h^* + (\alpha_\nu \operatorname{div}\mathbf{u}_h^* - q_h^*)\mathbb{I}) + \mathbf{F}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial q_h^*}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div}\mathbf{u}_h^* = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial c_h^*}{\partial t} + \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h^*)\cdot \nabla c_h^* = \operatorname{div}\left((\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon))\,\nabla c_h^*\right), \tag{19}$$

$$\mathbf{u}_h^*(x,t) = 0 \quad \text{при } x \in S, \quad \mathbf{u}_h^*(x,0) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial c_h^*(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in S, \quad c_h^*(x,0) = \mathbf{M}^{(h)}(c_0(x)) \quad \text{при } x \in \Omega. \tag{21}$$

Далее выполняется предельный переход при $h \to 0$ и доказывается, что решение $(\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon,\, p_\lambda^\varepsilon,\, c_\lambda^\varepsilon)$ исходной задачи (1),(2),(3'),(4),(5') – (7) есть предел при $h \to 0$ решений $(\mathbf{u}_h^*,\, q_h^*,\, c_h^*)$ задачи (17) – (21), которые зависят еще от ε и λ.

Следующий этап — выполнение предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ для фиксированного λ.

Пусть выполнено следующее предположение: при $\varepsilon \to 0$

$$\alpha_\mu \to 0, \quad \alpha_\tau \to 0,$$

$$\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} \to \mu_1, \quad 0 < \mu_1 < \infty,$$

$$\alpha_\nu \to \nu_0, \quad 0 < \nu_0 < \infty,$$

$$\alpha_p \to \eta_0, \quad 0 < \eta_0 < \infty,$$

$$\alpha_D \to D_*, \quad 0 < D_* < \infty.$$

Определение 1 *Двухмасштабная сходимость.*

Последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L_2(\Omega_T)$ *называется двухмасштабно сходящейся к пределу* $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$, *если для любой гладкой 1-периодической по* y *функции* $\sigma(\mathbf{x},t,y)$ *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T} \varphi^\varepsilon(\mathbf{x},t)\sigma(\mathbf{x},t,\mathbf{x}/\varepsilon)d\mathbf{x}dt = \int_{\Omega_T}\int_Y \varphi(\mathbf{x},t,y)\sigma(\mathbf{x},t,y)dyd\mathbf{x}dt. \tag{1}$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей утверждаются следующей теоремой:

Теорема 2 *(теорема Нгуетсенга)*

1. Из любой ограниченной последовательности в $L_2(\Omega_T)$ можно выбрать подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$.

2. Пусть последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L_2(\Omega_T)$. Тогда существуют 1-периодическая по y функция $\varphi(\mathbf{x},t,y)$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что $\varphi, \nabla_y\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$, а $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходятся к φ и $\nabla_y\varphi$ соответственно.

3. Пусть последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L_2(\Omega_T)$. Тогда существуют функции $\varphi \in L_2(\Omega_T), \psi \in L_2(\Omega_T \times Y)$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что ψ 1-периодична по y, $\nabla_y\psi \in L_2(\Omega_T \times Y)$, а $\{\varphi_\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x\varphi_\varepsilon\}$ двухмасштабно сходятся к φ и $\nabla_x\varphi(\mathbf{x},t) + \nabla_y\psi(\mathbf{x},t,y)$ соответственно.

Следствие 1 *Пусть $\sigma \in L_2(Y)$ и $\sigma^\varepsilon(\mathbf{x})$ означает $\sigma(\mathbf{x}/\varepsilon)$. Пусть последовательность $\{\varphi_\varepsilon\} \subset L_3(\Omega_T)$ двухмасштабно сходится к некоторому пределу $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$. Тогда последовательность $\{\sigma^\varepsilon\varphi^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится к $\sigma\varphi$.*

Имеем оценку

$$\int_{\Omega_T} |\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon|^2\, dx\, dt \leqslant MF^2 \tag{22}$$

Таким образом, из последовательностей $\{\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon\}$, $\{\operatorname{div}(\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon)\}$, $\{p_\lambda^\varepsilon\}$ можно извлечь подпоследовательности, слабо сходящиеся в $L_2(\Omega_T)$ и двухмасштабно в $L_2(\Omega_T \times Y)$:

$$\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{v}_\lambda, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon) \to \operatorname{div}\mathbf{v}_\lambda, \quad p_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup p_\lambda \quad \text{слабо в } \ L_2(\Omega_T),$$
$$\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon \to \mathbf{V}_\lambda(x,t,y), \quad p_\lambda^\varepsilon \to P_\lambda \quad \text{двухмасштабно в} \quad L_2(\Omega_T \times Y),$$
$$\mathbf{v}_\lambda = \langle \mathbf{V}\rangle_Y = \int_Y \mathbf{V}(x,t,y)\, dy, \quad p_\lambda = \langle P\rangle_Y.$$

Кроме того, если положить

$$q^\varepsilon = p^\varepsilon + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_p}\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t},$$

то уравнение (1) примет вид

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}(\alpha_\mu \mu(c^\varepsilon)\nabla \mathbf{v}^\varepsilon) - \nabla q^\varepsilon + \mathbf{F}, \tag{1'}$$

тогда

$$q^\varepsilon \rightharpoonup q = p + \frac{\nu_0}{\eta_0}\frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega_T),$$
$$q^\varepsilon \to Q(x,t,y) = P + \frac{\nu_0}{\eta_0}\frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{двухмасштабно в} \quad L_2(\Omega_T \times Y), \quad q_\lambda = \langle Q\rangle_Y.$$

Оценка (9) позволяет из последовательности $\{c_\lambda^\varepsilon\}$ извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся в $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$. Имеем компактное вложение $\mathbb{W}_2^1(\Omega) \subset \mathbb{L}_2(\Omega) \subset (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*$. Обозначим $W = \{v | v \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T); \partial v/\partial t \in (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*\}$. Очевидно, что $c^\varepsilon \in W$. По теореме о компактности (Лионс) вложение $W \subset \mathbb{L}_2(\Omega_T)$ компактно. Это означает, что

$$c^\varepsilon \to c \ \text{ сильно в } \ \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Кроме того,

$$\nabla c_\lambda^\varepsilon \to \nabla c_\lambda + \nabla_y C_\lambda(x,y,t) \quad \text{двухмасштабно в} \qquad \mathbb{L}_2(\Omega_T \times Y).$$

Теперь выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Уравнения Стокса после усреднения переходят в уравнения фильтрации Дарси:

$$\mathbf{v}_\lambda = \mathbb{B}_\lambda^{(f)}\big(\frac{1}{\mu(c_\lambda)}(-\frac{\nabla q}{m} + \mathbf{F})\big),$$

где

$$\mathbb{B}_\lambda^{(f)} = \langle \sum_{i=1}^{3} \mathbf{V}^{(\mathbf{i})} \otimes \mathbf{e}_\mathbf{i} \rangle_{Y_f}, \tag{23}$$

а $\mathbf{V}^{(\mathbf{i})}$ есть решения краевых задач для уравнений Стокса:

$$\mu_1 \Delta_y \mathbf{V}^{(\mathbf{i})} - \nabla_y R^{(i)} + \mathbf{e}_\mathbf{i} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}^{(\mathbf{i})} = 0 \quad in\, Y_f, \quad \mathbf{V}^{(\mathbf{i})}|_\gamma = 0,$$

$$m = \int_Y \chi(y)\, dy.$$

Уравнение диффузии после усреднения принимает вид:

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + \mathbf{v}_\lambda \cdot \nabla c_\lambda = \operatorname{div}(\mathbb{B}_\lambda^{(c)} \nabla c_\lambda),$$

$$\mathbb{B}_\lambda^{(c)} = \langle D_\lambda(y) \rangle_Y \mathbb{I} + \sum_{i=1}^{3} \langle D_\lambda(y) \nabla C^{(i)} \otimes \mathbf{e}_\mathbf{i} \rangle_Y, \tag{24}$$

функции $C^{(i)}$ есть решения периодических краевых задач

$$\operatorname{div}_y (D_\lambda(y)(\nabla C^{(i)} + \mathbf{e}_\mathbf{i})) = 0, \quad y \in Y,$$

$$D_\lambda(y) = D_* \chi + \lambda(1-\chi).$$

Матрицы $\mathbb{B}_\lambda^{(f)}$ и $\mathbb{B}_\lambda^{(c)}$ являются симметричными и положительно определенными.

Теорема 3 *Решение $(\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon, p_\lambda^\varepsilon, c_\lambda^\varepsilon)$ задачи (1) – (7) сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению $(\mathbf{v}_\lambda, p_\lambda, c_\lambda)$ усредненной системы:*

$$\mathbf{v}_\lambda = \mathbb{B}_\lambda^{(f)}\big(\frac{1}{\mu(c_\lambda)}(-\frac{\nabla q}{m} + \mathbf{F})\big),$$

$$q = p + \frac{\nu_0}{\eta_0}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \eta_0\, div\, \mathbf{v}_\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + \mathbf{v}_\lambda \cdot \nabla c_\lambda = div(\mathbb{B}_\lambda^{(c)} \nabla c_\lambda). \tag{25}$$

И, наконец, завершает задачу предельный переход при $\lambda \to 0$.

Теорема 4 *Пусть* $(\mathbf{v}_\lambda, p_\lambda, c_\lambda)$ *есть решение системы (25) для фиксированного* $\lambda > 0$. *Тогда при* $\lambda \to 0$ *функции* $\mathbf{v}_\lambda, p_\lambda, c_\lambda$ *сходятся к решению* $(\mathbf{v}, p, c)$ *усредненной системы:*

$$\mathbf{v} = \mathbb{B}^{(f)}\Big(\frac{1}{\mu(c)}\Big(-\frac{\nabla q}{m} + \mathbf{F}\Big)\Big),$$

$$q = p + \frac{\nu_0}{\eta_0}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \eta_0 div\, \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c = div\,(\mathbb{B}^{(c)}\nabla c). \tag{26}$$

Литература

1. G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20, 608–623.
2. А.М. Мейрманов. Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах. Сибирский математический журнал, май-июнь 2007, том 48, Но. 3,645 - 667.
3. A. Meirmanov. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media, Euro. Jnl. of Applied Mathematics, Vol. 19 (2008), 259 - 284.
4. С.А. Гриценко. О диффузии и медленной конвекции примеси в слабосжимаемой вязкой жидкости. Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 19-24.

HOMOGENIZED MODELS FOR DIFFUSION AND CONVECTION OF THE ADMIXTURES IN THE ABSOLUTELY RIGID POROUS MEDIUM

Sv.A. Gritsenko, A.M. Meirmanov

Belgorod State University,

Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: SGritsenko@bsu.edu.ru,Meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. We consider the problem of the modeling of diffusion and slow convection of the admixtures in the absolutely rigid medium, perforated by a system of pores, filled with slightly compressible viscous liquid. Due to the availability of rapidly oscillating non-smooth coefficients, numerical simulations on a such model are unrealistic. Using the method of homogenization, we obtain the model without of the rapidly oscillating coefficients.

Keywords: Stokes equations, two-scale convergence, homogenization of periodic structures.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

ИСПРАВЛЕНИЯ К СТАТЬЕ «УСРЕДНЕННЫЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ И КОНВЕКЦИИ ПРИМЕСЕЙ В АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ»

Св.А. Гриценко, А.М. Мейрманов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru.

В предлагаемом сообщении приведено исправление допущенных авторами опечаток в статье, указанной в заголовке, опубликованной в журнале «Научные ведомости Белгородского государственного университета».– 2009. – 13(68);17/2.

В этой статье на стр. 84 в формуле (12) Γ следует заменить на Γ^ε, Ω – заменить на Ω^ε, правильный вариант такой:

$$\boldsymbol{u}(x,t)=0 \quad \text{при } x\in\Gamma^\varepsilon, \quad \boldsymbol{u}(x,0)=0 \quad \text{при } x\in\Omega^\varepsilon\,. \tag{12}$$

На стр. 85 в формуле (20) S следует заменить на Γ^ε, правильный вариант такой:

$$\boldsymbol{u}_h^*(x,t)=0 \quad \text{при } x\in\Gamma^\varepsilon, \quad \boldsymbol{u}_h^*(x,0)=0\,. \tag{20}$$

На стр. 86 в следствии 1 обозначение L_3 следует заменить на L_2, то есть правильный вариант:

Пусть последовательность $\{\varphi_\varepsilon\}\subset L_2(\Omega_T)$ $\quad\ldots.$

CORRIGENDUM OF «AVERAGED MODELS OF IMPURITY DIFFUSION AND ITS CONVECTION IN ABSOLUTE SOLID POROUS MEDIA»

Sv.A. Gritsenko, A.M.Meyermanov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru