

ОБ ОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЕ ДВУМЕРНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С.И. Безродных, В.И. Власов

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: sergeyib@pochta.ru, vlasov@ccas.ru

Аннотация. При практическом использовании гармонических отображений \mathcal{F} для конструирования расчетных сеток в сложных областях \mathcal{Z} , как правило, строят обратное отображение \mathcal{F}^{-1} , преобразующее каноническую область (обычно, квадрат \mathcal{Q}) на \mathcal{Z} , так как имеющаяся в \mathcal{Q} естественная декартова сетка удобна для реализации численных методов, применяемых для вычисления \mathcal{F}^{-1} . Вместе с тем, вычислительная практика показала, что, несмотря на теорему Радо — Кнезера, гарантирующую гомеоморфизм отображения $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Z}$, в реальных вычислениях такое (приближенное) отображение нередко оказывается неоднолиственным, либо обладающим большой и неустраимой погрешностью. В работе показано, что для построения \mathcal{F} с высокой точностью, а значит, и высококачественной расчетной сетки в \mathcal{Z} , может быть эффективно применен метод мультиполей.

Ключевые слова: гармонические отображения, расчетные сетки, вычислительные методы, метод мультиполей.

1 Гармонические отображения

1.1. Пусть жордановы области \mathcal{Z} и \mathcal{W} с кусочно-гладкими границами $\partial\mathcal{Z}$ и $\partial\mathcal{W}$ расположены соответственно на комплексных плоскостях $z = x + iy$ и $w = u + iv$, а функция $w = \mathcal{B}(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение $\partial\mathcal{Z}$ на $\partial\mathcal{W}$. Если функция $w = \mathcal{F}(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, непрерывная в замкнутой области $\bar{\mathcal{Z}}$ и дважды непрерывно дифференцируемая в \mathcal{Z} по совокупности переменных (x, y) , т.е. $\mathcal{F}(z) \in C^2(\mathcal{Z}; \mathbb{R}^2) \cap C(\bar{\mathcal{Z}}; \mathbb{R}^2)$, является решением следующей задачи Дирихле:

$$\Delta \mathcal{F}(z) = 0, \quad z \in \mathcal{Z}, \quad (1.1)$$

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{B}(z), \quad z \in \partial\mathcal{Z}, \quad (1.2)$$

то такую функцию $\mathcal{F}(z)$ называют *гармоническим отображением области \mathcal{Z}* (см., например, [1], [2]). Если при этом \mathcal{F} осуществляет гомеоморфизм замыканий областей ($\mathcal{F} : \bar{\mathcal{Z}} \xrightarrow{\text{Hom}} \bar{\mathcal{W}}$), то такую функцию \mathcal{F} называют *гармоническим отображением области \mathcal{Z} на область \mathcal{W}* и пишут $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{W}$.

Подчеркнем, что гармоническое отображение, вообще говоря, не является конформным, так как компоненты $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вектора \mathcal{F} не обязаны быть связанными условиями Коши — Римана.

Гармонические отображения были предметом широких исследований (см., например, [1]-[8]) и нашли многочисленные приложения, в частности для построения расчетных

Работа поддержана РФФИ (гранты 07-01-00500, 07-01-00503), программой фундаментальных исследований ОМН РАН №3 "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач" и программой РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики"



сеток [9]–[17]. Отметим, что решение \mathcal{F} задачи (1.1), (1.2), т.е. непрерывное гармоническое продолжение гомеоморфизма $\mathcal{B} : \partial\mathcal{Z} \xrightarrow{Hom} \partial\mathcal{W}$ границ областей, не обязательно обеспечивает гомеоморфизм самих областей \mathcal{Z} и \mathcal{W} . Приведем пример подобного отображения (другие примеры даны, например, в [8], [15], [18]–[20]).

1.2. Примем в качестве области \mathcal{Z} изображенную на рис. 1а равнобедренную трапецию с вершинами $A = -1 - i$, $C = 1 - i$, $E = 1/2 + 3i/4$, $G = -1/2 + 3i/4$, а область \mathcal{W} определим как внутренность контура $F(\partial\mathcal{Z})$ — образа границы $\partial\mathcal{Z}$ при отображении

$$F(z) = x + i(x^2 - y^2). \quad (1.3)$$

Область \mathcal{W} изображена на рис. 1б; ее границу составляют последовательно соединенные четыре параболические дуги,

$$\partial\mathcal{W} = (ABC) \cup (CDE) \cup (EFG) \cup (GHA),$$

являющиеся образами одноименных сторон трапеции при отображении (1.3).

Точки на плоскостях z и w , переходящие при отображении (1.3) друг в друга, обозначаем одинаковыми буквами; дуги — круглыми скобками, внутри которых перечисляются их начальная, промежуточные и конечная точки; области, ограниченные замкнутыми контурами, — квадратными скобками с указанными в них граничными точками, порядок перечисления которых соответствует положительному направлению обхода (когда область остается слева).

Отображение (1.3), осуществляющее гомеоморфизм границ $\partial\mathcal{Z}$ и $\partial\mathcal{W}$, является решением задачи (1.1), (1.2). Вместе с тем это отображение переводит область \mathcal{Z} не в область \mathcal{W} , а в двулистное многообразие $\tilde{\mathcal{W}} \supset \mathcal{W}$, состоящее из двух плоских областей $\mathcal{W}^- = [ABCDOHA]$ и $\mathcal{W}^+ = [HGFEDOH]$, соединяющихся через дуговой интервал $\text{int}(DOH)$ и являющихся однолиственными образами соответственно нижней $\mathcal{Z}^- := \mathcal{Z} \cap \mathbb{H}^-$ и верхней $\mathcal{Z}^+ := \mathcal{Z} \cap \mathbb{H}^+$ половины трапеции, где \mathbb{H}^- и \mathbb{H}^+ — нижняя и верхняя полуплоскости (см. рис. 1а).

Отметим, что линия (DOH) , соединяющая \mathcal{W}^- и \mathcal{W}^+ , является образом отрезка вещественной оси, где якобиан $J = -2y$ отображения (1.3) обращается в нуль. При этом якобиан положителен в области \mathcal{Z}^- и отрицателен в \mathcal{Z}^+ .

1.3. Проблема гомеоморфизма является одной из центральных в теории гармонических отображений. Вопрос о том, какие условия обеспечивают такой гомеоморфизм, исследовался многими авторами [1]–[5], [7]–[8], [13], [20]–[22].

Для плоских односвязных областей в работах Т.Радо [3] и Х.Кнезера [4] установлено, что если \mathcal{W} выпукла, то при любом гомеоморфизме \mathcal{B} границ решение $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{harm} \mathcal{W}$ задачи (1.1), (1.2) осуществляет гомеоморфизм $\tilde{\mathcal{Z}}$ и $\tilde{\mathcal{W}}$.

В работе Г.Шоке [5] был указан другой способ доказательства этого утверждения и дана “обратная” теорема: для любой невыпуклой жордановой области \mathcal{W} существует такой гомеоморфизм границ \mathcal{B} , что решение \mathcal{F} задачи (1.1), (1.2) не является гомеоморфизмом областей \mathcal{Z} и \mathcal{W} .

Отметим, что выпуклость образа (области \mathcal{W}) не является необходимым условием для того, чтобы гармоническое продолжение $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{harm} \mathcal{W}$ гомеоморфизма \mathcal{B} границ было бы гомеоморфизмом (однолиственным отображением) областей \mathcal{Z} на \mathcal{W} . Вопрос о необходимых и достаточных условиях однолиственности гармонического отображения круга $\mathbb{U} = \{|x| < 1\}$ на область \mathcal{W} с ляпуновской границей был решен в работе Л.Д.Кудрявцева [7].



2 Метод Уинслоу

2.1. Одним из наиболее важных приложений гармонических отображений, как уже было отмечено в п. 1.1, является построение с их помощью расчетных сеток в областях \mathcal{Z} сложной конфигурации. Для этого в качестве области \mathcal{W} выбирается квадрат $\Omega := [0, 1] \times [0, 1]$, а требуемая сетка \mathfrak{Z}_h получается путем переноса естественной для квадрата* равномерной с шагом h декартовой сетки Ω_h в область \mathcal{Z} с помощью гармонического отображения $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{\text{harm}} \Omega$, т.е. $\mathfrak{Z}_h = \mathcal{F}^{-1}(\Omega_h)$. Напомним очевидное определение сетки Ω_h с шагом $h = 1/N$ при некотором $N \in \mathbb{N}$, где \mathbb{N} — множество натуральных чисел:

$$\Omega_h := \left\{ z_{m,n} = (m-1)h + i(n-1)h \right\}_{m=1, n=1}^{N+1, N+1}. \quad (2.1)$$

При этом граничный гомеоморфизм $B : \partial\mathcal{Z} \xrightarrow{\text{Hom}} \partial\Omega$ выбирается таким образом, чтобы на прообразах $l_n := B^{-1}(L_n)$ сторон L_n квадрата Ω "граничная производная" dS/ds отображения $w = B(z)$ была постоянна, т.е.

$$dS(z)/ds = |l_n|^{-1}, \quad z \in l_n. \quad (2.2)$$

Здесь $s(z)$ и $S(w)$ — длины дуг на $\partial\mathcal{Z}$ и на $\partial\Omega$, отсчитываемые в положительном направлении (так, что область остается слева) соответственно от точек $z = 0$ и $w = B(0)$, а L_1, L_2, L_3 и L_4 — соответственно нижняя, правая, верхняя и левая стороны квадрата Ω . Таким образом, для отображения $w = \mathcal{F}(z)$ задача Дирихле (1.1), (1.2) приобретает следующий вид:

$$\Delta\mathcal{F}(z) = 0, \quad z \in \mathcal{Z}, \quad (2.3)$$

$$B(z) = z_n - (i)^{n+1} |l_n|^{-1} [s(z) - \sigma_n], \quad z \in l_n, \quad n = \overline{1, 4}; \quad (2.4)$$

здесь $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n-1} |l_k|$, а z_n — вершины квадрата Ω , определяемые равенствами

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 1 + i, \quad z_4 = i.$$

Получаемая таким способом регулярная[†] четырехугольная сетка \mathfrak{Z}_h будет адаптированной к области \mathcal{Z} в том смысле, что все ее узлы будут лежать в замыкании этой области, а сама сетка (при достаточно малом размере h ее ячеек) не будет содержать самоналожений. Эти свойства вытекают из того, что рассматриваемое отображение $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{\text{harm}} \Omega$ осуществляет гомеоморфизм замыканий областей $\overline{\mathcal{Z}}$ и $\overline{\Omega}$; последнее следует из теоремы Радо — Кнезера с учетом выпуклости квадрата Ω .

2.2. Для построения требуемого отображения \mathcal{F} необходимо решить задачу Дирихле (2.3), (2.4). Но так как область \mathcal{Z} имеет сложную форму, то для решения такой задачи приходится применять численные методы, реализация которых, в свою очередь, требует наличия адаптированной к \mathcal{Z} сетки. Получается, что для построения адаптированной к области сетки необходимо уже иметь такую сетку!

*) Вместо квадрата может использоваться другая область, в которой сетка строится удобным способом.
 †) Регулярной называется сетка, у которой ячейки представляют собой многоугольники с одинаковым числом вершин.



Выход из этого порочного круга был указан А.Уинслоу [9], предложившим строить не прямое $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{\text{harm}} \Omega$, а "обратное гармоническое" отображение

$$\mathcal{F}^{-1}(w) = x(u, v) + iy(u, v) : \Omega \xrightarrow{\text{harm}^{-1}} \mathcal{Z}.$$

Компоненты $x(u, v)$ и $y(u, v)$ такого отображения, как показано в [9], представляют собой решение системы уравнений

$$\begin{cases} (x_v^2 + y_v^2) x_{uu} - 2(x_u x_v + y_u y_v) x_{uv} + (x_u^2 + y_u^2) x_{vv} = 0, \\ (x_v^2 + y_v^2) y_{uu} - 2(x_u x_v + y_u y_v) y_{uv} + (x_u^2 + y_u^2) y_{vv} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

в квадрате Ω с граничными условиями Дирихле, определяемыми обратным к (2.4) отображением $B^{-1} : \partial\Omega \xrightarrow{\text{Hom}} \partial\mathcal{Z}$ и имеющими вид

$$x(u, v) = \text{Re } B^{-1}(w), \quad y(u, v) = \text{Im } B^{-1}(w), \quad w \in \partial\Omega. \quad (2.6)$$

Нижние индексы в (2.5) означают соответствующие частные производные функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, а через $\text{Re } a$ и $\text{Im } a$ обозначены вещественная и мнимая части комплексного числа a .

Эффективность описанного метода Уинслоу, широко применяемого в практике построения расчетных сеток [11]–[13], [15]–[17], [19], [22], [23], обусловлена тем, что квадрат Ω , где нужно решать систему уравнений (2.5), снабжен естественной декартовой сеткой Ω_h , на которой легко строится стандартная конечно-разностная схема [25], а нелинейность системы (2.5) учитывается в этой схеме с помощью метода простой итерации [26] либо близких методов [11].

2.3. Для построения отображения $\mathcal{F}^{-1}(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ нередко используется также родственный методу Уинслоу вариационный подход, предложенный в работе [27] и получивший дальнейшее развитие в [15], [28]–[30] и др. Он заключается в минимизации следующего функционала, представляющего собой интеграл Дирихле для системы (2.5):

$$I(\mathcal{F}^{-1}) = \int_{\Omega} \frac{g_{11} + g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv,$$

где величины $g_{kl}(u, v)$, определяемые равенствами

$$g_{11}(u, v) := x_u^2 + y_u^2, \quad g_{22}(u, v) := x_v^2 + y_v^2, \quad g_{12}(u, v) := x_u y_u + x_v y_v,$$

имеют геометрический смысл элементов метрического тензора g для отображения $\mathcal{F}^{-1}(w)$. Исходя из такой интерпретации, подынтегральную функцию в (3.1) можно записать в бескоординатном виде $\text{tr}(g)/\sqrt{\det g}$, удобным для проведения различных модификаций и обобщений [15], [19], [31]–[35]; здесь, как обычно, использованы символы tr и \det для обозначения следа и определителя матрицы.

При численной реализации процедуры минимизации функционала (3.1) обычно используется двумерная квадратурная формула прямоугольников для приближения интеграла с простейшей конечно-разностной аппроксимацией входящих в этот функционал производных [15].



3 Проблема Кнаша — Лучака

Практика применения метода Уинслоу и описанных в пп. 2.2, 2.3 родственных методов построения обратного гармонического отображения $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Q} \xrightarrow{\text{harm}^{-1}} \mathcal{Z}$ показала, что, при всех их достоинствах, эти методы нередко теряют эффективность и приводят к неудовлетворительным результатам.

Одними из первых, кто обратил внимание на эти трудности, были П.Кнапп и Р.Лучак. В работе [36] они применили метод Уинслоу для построения обратного гармонического отображения F^{-1} квадрата (рис. 2а) на подковообразную область \mathcal{S} (рис. 2б), границу $\partial\mathcal{S}$ которой составляют два отрезка вещественной оси $l_1 := [1, 2]$ и $l_3 := [-2, -1]$, полуэллипс l_2 и полуокружность l_4 , определяемые по формулам

$$l_2 := \left\{ z : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2A}\right)^2 = 1, \operatorname{Im} z \geq 0 \right\}, \quad l_4 := \{ z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0 \}. \quad (3.1)$$

При этом гомеоморфизм между границами $B : \partial\mathcal{S} \xrightarrow{\text{Hom}} \partial\mathcal{Q}$, переводивший дуги l_n границы $\partial\mathcal{S}$ в стороны L_n квадрата \mathcal{Q} по правилу $L_n = B(l_n)$, соответствовал формуле (2.4). Конечной целью этих расчетов было построение сетки \mathfrak{S}_h в области \mathcal{S} по формуле

$$\mathfrak{S}_h = F^{-1}(\mathcal{Q}_h), \quad (3.2)$$

иначе говоря, построение сетки \mathfrak{S}_h осуществлялось путем перевода декартовой в квадрате \mathcal{Q} сетки \mathcal{Q}_h на область \mathcal{S} с помощью найденного отображения $F^{-1} : \mathcal{Q} \xrightarrow{\text{harm}^{-1}} \mathcal{S}$.

Проведенные авторами работы [36] численные эксперименты показали, что при сравнительно небольшом отношении A полуосей эллиптической дуги l_2 получаемая сетка \mathfrak{S}_h была вполне удовлетворительной. Пример такой сетки, рассчитанной при $A = 2$, изображен на рис. 3. Шаг сетки-прообраза \mathcal{Q}_h составил $h = 1/32$; таким образом, сетка \mathfrak{S}_h в области \mathcal{S} состояла из пересечений 33-х координатных линий в одном и 33-х координатных линий в другом направлении.

Однако, при значениях A , больших 3.8, терялось не только качество сетки, но и возникал эффект ее самоналегания, т.е. терялся гомеоморфизм численно получаемого дискретизированного обратного гармонического отображения F_h^{-1} . Этот эффект продемонстрирован на примере сетки, рассчитанной при $A = 5$ и изображенной на рис. 4. Более детальные изображения структуры этой сетки в местах ее самоналегания, полученные путем постепенного увеличения масштаба, приведены последовательно на рис. 5, 6, 7. Эти численные результаты получены Б.Н.Азаренком при помощи разностной схемы [11] второго порядка на квадратной сетке \mathcal{Q}_h при $h = 1/20$; таким образом, сетка \mathfrak{S}_h соответствовала разбиению 21×21 .

В работе [19] было показано, что для той же задачи (т.е. при $A = 5$) при измельчении шага сетки \mathcal{Q}_h в 5 раз самоналегание сетки \mathfrak{S}_h сохраняется. При увеличении же разбиения до 501×501 удается устранить самоналегание сетки, т.е. при таком разбиении отображение F_h^{-1} осуществляет гомеоморфизм $\mathcal{Q} \xrightarrow{\text{Hom}} \mathcal{S}$, однако получаемая сетка \mathfrak{S}_h имеет неудовлетворительное качество; при этом расчетное время на РС 2.4 ГГц составило 2 ч. В [19] было показано, что ни дальнейшее измельчение сетки \mathcal{Q}_h , ни повышение порядка точности разностной схемы (до четвертого порядка с использованием 25-точечного шаблона), ни замена метода Уинслоу на вариационный метод [15] (при этом время счета на том же компьютере составило 16 часов) не приводили к сколь-нибудь заметному улучшению качества сетки, и она оставалась непригодной для проведения на ней расчетов. В связи



с этими результатами численных экспериментов возникла настоятельная необходимость надежного получения отображения $F^{-1} : \mathcal{Q} \xrightarrow{\text{harm}^{-1}} \mathcal{S}$ с высокой точностью.

В следующем разделе высокоточное построение этого отображения осуществлено путем обращения гармонического отображения $F : \mathcal{S} \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{Q}$, полученного с помощью метода мультиполей [37]-[39] — аналитико-численного метода, обеспечивающего решение краевых задач для уравнения Лапласа с высокой точностью, обладающего экспоненциальной скоростью сходимости и не требующего никакой сетки при своей реализации.

4 Построение $\mathcal{S} \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{Q}$ с помощью метода мультиполей

4.1. Можно убедиться, что вещественная и мнимая части гомеоморфизма $u(x, y) + iv(x, y) = B : \partial\mathcal{S} \xrightarrow{\text{Hom}} \partial\mathcal{Q}$, подчиненного условию (2.4), даются выражениями

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x - 1, & z \in l_1; & & u(x, y) &= 1, & z \in l_2, \\ u(x, y) &= -x - 1, & z \in l_3; & & u(x, y) &= 0, & z \in l_4. \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= 0, & z \in l_1; & & v(x, y) &= \mathcal{V}(z), & z \in l_2; \\ v(x, y) &= 1, & z \in l_3; & & v(x, y) &= \pi^{-1} \arccos x, & z \in l_4. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\mathcal{V}(z)$ определяется по формуле

$$\mathcal{V}(z) = \begin{cases} \mathcal{E}(2^{-1}y/A, k), & z \in l_2 \cap \{\operatorname{Re} z \geq 0\}, \\ 1 - \mathcal{E}(2^{-1}y/A, k), & z \in l_2 \cap \{\operatorname{Re} z \leq 0\}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $\mathcal{E}(\xi, k)$ дается равенством

$$\mathcal{E}(\xi, k) := 2^{-1}E(\xi, k)/E(k), \quad (4.4)$$

в котором $E(\xi, k)$ и $E(k)$ — неполный и полный эллиптические интегралы второго рода [40]

$$E(\xi, k) := \int_0^\xi \sqrt{(1 - k^2 t^2)/(1 - t^2)} dt, \quad E(k) := E(1, k), \quad (4.5)$$

с модулем $k = \sqrt{1 - A^{-2}}$.

Задача о построении требуемого гармонического отображения

$$u(x, y) + iv(x, y) = F : \mathcal{S} \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{Q} \quad (4.6)$$

заключается в решении двух задач Дирихле отдельно для вещественной $u(x, y)$ и мнимой $v(x, y)$ частей этого отображения с граничными условиями, задаваемыми соответственно формулами (4.1) и (4.2).

4.2. Для решения сформулированных задач относительно u и v определим предварительно расширение \mathcal{G} подковообразной области \mathcal{S} , а в нем сформулируем краевые задачи для вспомогательных функций u_0 и v_0 . Эти функции используются для того, чтобы на части границы $\partial\mathcal{S}$ получить однородное условие Дирихле, что является необходимым для применения метода мультиполей.

Положим

$$\mathcal{G} := \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}, \quad (4.7)$$



$\mathcal{G} \supset \mathcal{S}$, и заметим, что граница $\partial\mathcal{G}$ состоит из трех звеньев: $\partial\mathcal{G} = l_1^+ \cup l_3^+ \cup l_4$, где l_4 определяется по формуле (3.1), а $l_1^+ \supset l_1$ и $l_3^+ \supset l_3$ — по формулам

$$l_1^+ := \{z : x \in [1, +\infty), y = 0\}, \quad l_3^+ := \{z : x \in (-\infty, -1], y = 0\}. \quad (4.8)$$

Отметим, что дуга l_2 границы $\partial\mathcal{S}$ (за исключением конечных точек) лежит в области \mathcal{G} , а дуга

$$\gamma := l_3 \cup l_4 \cup l_1, \quad (4.9)$$

является частью границы $\partial\mathcal{S}$, так что $\partial\mathcal{S} = \gamma \cup l_2$.

Определим функцию $u_0(x, y)$ как решение краевой задачи в области \mathcal{G}

$$\Delta u_0 = 0, \quad z \in \mathcal{G}; \quad (4.10)$$

$$u_0 = -x - 1, \quad z \in l_3; \quad u_0 = 0, \quad z \in l_4; \quad u_0 = x - 1, \quad z \in l_1; \quad (4.11)$$

с условием роста на бесконечности

$$u_0(x, y) = \mathcal{O}(z \ln z), \quad \mathcal{G} \supset z \rightarrow \infty, \quad (4.12)$$

а функцию $v_0(x, y)$ — как решение следующей краевой задачи в области \mathcal{G}

$$\Delta v_0 = 0, \quad z \in \mathcal{G}; \quad (4.13)$$

$$v_0 = 1, \quad z \in l_3; \quad v_0 = \pi^{-1} \arccos x, \quad z \in l_4; \quad v_0 = 0, \quad z \in l_1; \quad (4.14)$$

$$v_0(x, y) = \mathcal{O}(1), \quad \mathcal{G} \supset z \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Решения этих задач имеют вид

$$u_0(x, y) = 1 + \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\pi i} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{z^2-1}{2z} - \frac{z^2+1}{\pi i z} \ln \frac{z^2-1}{2z} \right), \quad (4.16)$$

$$v_0(x, y) = \pi^{-1} \arg z. \quad (4.17)$$

4.3. Представляя функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + U(x, y), \quad v(x, y) = v_0(x, y) + V(x, y), \quad (4.18)$$

получаем с учетом (4.1), (4.2), (4.10)–(4.13) следующие постановки задач для функций U и V :

$$\Delta U = 0, \quad z \in \mathcal{S}; \quad U = 0, \quad z \in \gamma; \quad U = 1 - u_0, \quad z \in l_2; \quad (4.19)$$

$$\Delta V = 0, \quad z \in \mathcal{S}; \quad V = 0, \quad z \in \gamma; \quad V = v_0 - v_0, \quad z \in l_2, \quad (4.20)$$

где дуга γ определяется соотношением (4.9), функция \mathcal{V} дается равенством (4.3), а функции u_0 и v_0 — формулами (4.16) и (4.17)

Решения задач (4.19) и (4.20) будем строить с помощью метода мультиполей [37]–[39], который, применительно к указанным задачам, использует систему аппроксимативных функций $\Omega_k(x, y)$, родственных мультиполям из теории потенциала [41] и определяемых по формуле

$$\Omega_k(x, y) := \operatorname{Im} (z^k + z^{-k}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$



Эти функции тождественно удовлетворяют уравнению Лапласа в области \mathcal{S} и однородному условию Дирихле на γ , а на дуге l_2 составляют полную и минимальную систему в пространстве $L_2(l_2)$. Решения U и V краевых задач (4.19) и (4.20) представляются в виде пределов линейных комбинаций Ω_k :

$$U(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} U^N(x, y), \quad U^N(x, y) := \sum_{k=1}^N a_k^N \Omega_k(x, y), \quad (4.22)$$

$$V(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} V^N(x, y), \quad V^N(x, y) := \sum_{k=1}^N b_k^N \Omega_k(x, y), \quad (4.23)$$

коэффициенты a_k^N и b_k^N которых находятся из проекционного принципа, что приводит к следующим системам линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^N (\Omega_k, \Omega_n) a_k^N = (1 - u_0, \Omega_n), \quad \sum_{k=1}^N (\Omega_k, \Omega_n) b_k^N = (V - v_0, \Omega_n), \quad (4.24)$$

где $n = \overline{1, N}$, а через (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение в $L_2(l_2)$.

Последовательности $\{U^N\}$ и $\{V^N\}$ допускают дифференцирование любое число раз на множестве $\mathcal{S} \cup \tilde{\gamma}$, где $\tilde{\gamma}$ — дуга γ без точек $z = -2$, $z = -1$, $z = 1$, $z = 2$. Тогда, полагая

$$u^N := u_0 + U^N, \quad v^N := v_0 + V^N, \quad (4.25)$$

получаем, что для любого компакта $\sigma \subset \mathcal{S} \cup \tilde{\gamma}$ справедливы соотношения

$$\max_{\sigma} |D_{l,t}(u^N - u)| \rightarrow 0, \quad \max_{\sigma} |D_{l,t}(v^N - v)| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty;$$

здесь обозначено $D_{l,t} := \partial^{l+t} / \partial x^l \partial y^t$, где l, t — неотрицательные целые числа.

Отметим, что описанный метод допускает апостериорную оценку погрешности в норме $C(\overline{\mathcal{S}})$. Действительно, так как $u - u^N$ и $v - v^N$ — гармонические функции, то, используя для них принцип максимума, получаем, что

$$\max_{\overline{\mathcal{S}}} |u - u^N| \leq \max_{l_2} |1 - u^N|, \quad \max_{\overline{\mathcal{S}}} |v - v^N| \leq \max_{l_2} |V - v^N|, \quad (4.26)$$

где правые части неравенств легко находятся после численного решения задачи и, тем самым, находим требуемую апостериорную оценку погрешности.

4.4. Изложенный метод построения гармонического отображения

$$F : \mathcal{S} \xrightarrow{\text{harm}} \mathcal{Q} = u + iv = u_0 + U + i(v_0 + V) \quad (4.27)$$

подковообразной области \mathcal{S} на квадрат \mathcal{Q} , включающий формулы (4.16) и (4.17) для u_0 и v_0 и описанный в п. 3.3 алгоритм получения функций U и V , был численно реализован для значений отношения A полуосей эллиптической дуги l_2 , лежащих в диапазоне $[1, 10]$.

При этом погрешность вычисляемого отображения F , контролируемая с помощью апостериорных оценок (4.26), не превышала 10^{-9} , а расчетное время на РС 2.4 ГГц не превышало 1 сек. Указанная точность обеспечивалась использованием не более, чем 50 мультиполей Ω_k в представлениях (4.22), (4.23).

На рис. 8 изображена сетка \mathcal{S}_h , являющаяся прообразом относительно вычисленного отображения F декартовой сетки \mathcal{Q}_h , соответствующей разбиению 21×21 . Эта сетка была охарактеризована в [19] как обладающая высоким качеством с точки зрения реализации на ней численных схем и получения адекватных вычислительных результатов.

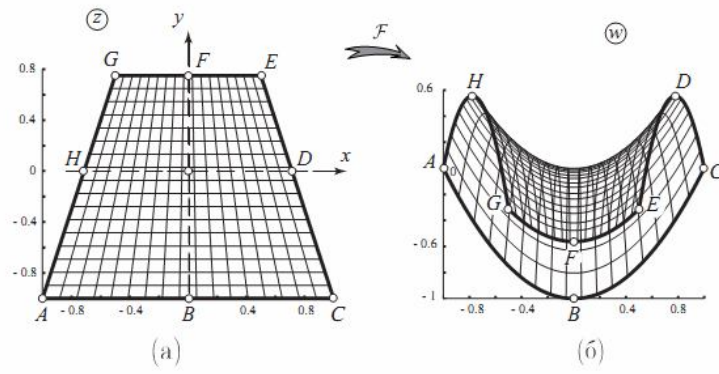


Рис. 1.

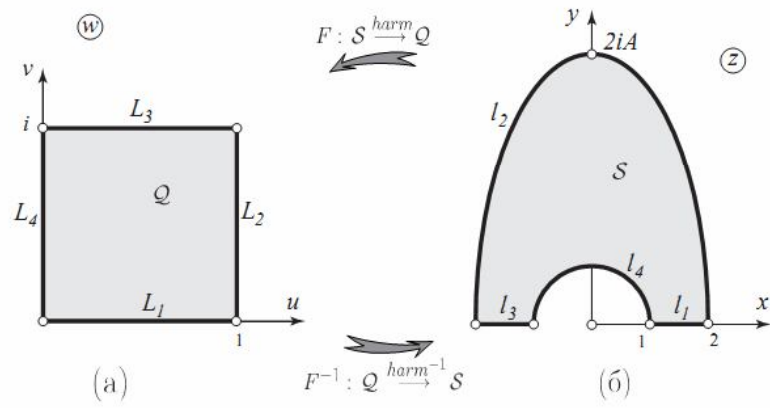


Рис. 2.

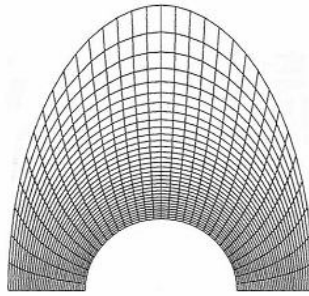


Рис. 3.

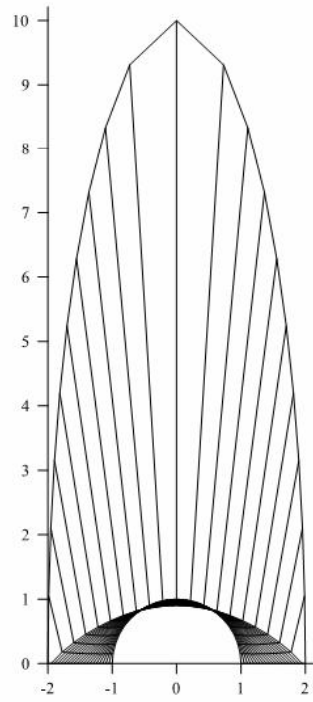


Рис. 4.

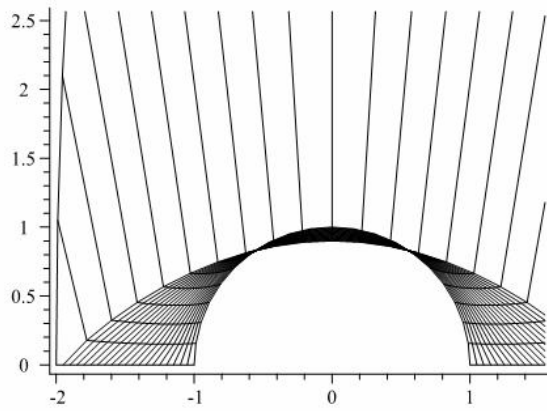


Рис. 5.

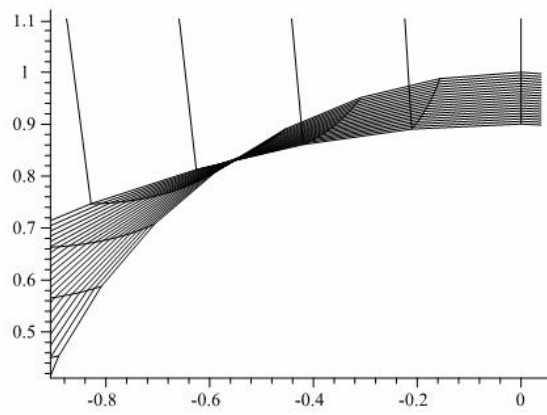


Рис. 6.

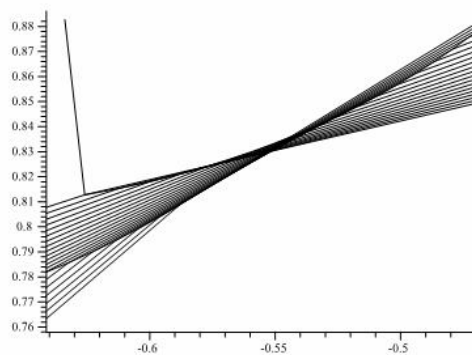


Рис. 7.

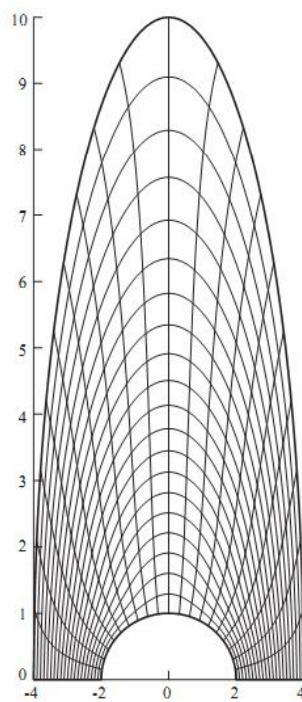


Рис. 8.



Литература

1. P. Duren. Harmonic mappings in the plane, "Cambridge Tracts in Mathematics". Vol. 156, Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
2. J. Jost. Lectures on harmonic maps, "Lecture Notes in Mathematics". Vol. 1161, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1985.
3. T. Radó. Aufgabe 41 // Jber. Deutsch. Math.-Verein. V.35. 1926. P. 49.
4. H. Kneser. Lösung der Aufgabe 41 // Jber. Deutsch. Math.-Verein. V.35. 1926. P. 123-124.
5. G. Choquet. Sur un type de transformation analytiques généralisant la représentation conforme et définie au moyen de fonctions harmoniques // Bull. Sci. Math. V.69, №2. 1945. P. 156-165.
6. F.B. Fuller. Harmonic mappings // Proc. Nat. Acad. Sci. V.40. 1954. P. 987-991.
7. Л.Д. Кудрявцев. О свойствах гармонических отображений плоских областей // Матем. сб. Т. 36 (78), №2. 1955. С. 201-208.
8. D. Bshouty, W. Hengartner. Univalent harmonic mappings in the plane // In: "Handbook of complex analysis: geometric function theory". Vol. 2. Amsterdam: Elsevier, 2005. P. 479-506.
9. A. Winslow. Numerical solution of the quazi-linear Poisson equations in a nonuniform triangle mesh // J. Comp. Phys. V.2. 1967. P. 149-172.
10. W.H. Chu. Development of a general finite difference approximation for a general domain. I. Mashine transformation // J. Computational Phys. V.8. 1971. P. 392-408.
11. С.К. Годунов, Г.П. Прокопов. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т.12, №2. P. 429-440.
12. J.F. Thompson (Ed.). Numerical Grid Generation. N.-Y.: North-Holland, 1982.
13. J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.W. Mastin. Numerical grid generation, N.-Y.: North-Holland, 1985.
14. G. Liao. On harmonic maps // In: "Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation" (Ed.: J.E.Castillo). Philadelphia. SIAM, 1991. P. 123-130.
15. С.А. Иваненко. Адаптивно-гармонические сетки, М.: Изд-во ВЦ РАН, 1997.
16. P.W. Smith, S.S. Sritharan. Theory of harmonic grid generation // Complex variables. V.10. 1998. P. 359-369.
17. V.D. Liseikin. Grid generation methods, N.-Y.: Springer-Verlag, 1999.



18. Г.П. Прокопов. Конструирование тестовых задач для построения двумерных регулярных сеток // В кн.: Вопросы атомной науки и техники. Сер.: "Матем. моделир. физ. процессов". Вып.1. 1993. С. 7-12.
19. Б.Н. Азаренок. О построении структурированных сеток в двумерных невыпуклых областях с помощью отображений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т.49, №5. 2009. С. 826-839.
20. G. Alessandrini, V. Nesi. Invertible harmonic mappings, beyond Kneser // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. 2009.
21. H. Lewy. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings // Bull. Am. Math. Soc. V.42. 1936. P. 689-692.
22. W. Hengartner, J. Szynal. Univalent harmonic ring mappings vanishing on the interior boundary // Canad. J. Math. V. 44, №1. 1992. P. 308-323.
23. J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill (Eds). Handbook of Grid Generation CRC Press. Boca Raton. Florida, 1999.
24. // P. Knupp, S. Steinberg. Fundamentals of Grid Generation. CRC Press. Boca Raton. Florida, 1993.
25. А.А.Самарский. Теория разностных схем, М.: Наука, 1977.
26. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы, М.: Наука, 1987.
27. J.U. Brackbill, J.S. Saltzman. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // J. Comput. Phys. V. 46, №3. 1982. P. 342-368.
28. P.R. Eiseman. Adaptive grid generation // Comput. Methods in Appl. Mech. and Engineering. V. 64. 1987. P. 321-376.
29. P.J. Roache, S. Steingerg. A new approach to grid generation using a variational formulation // Proc. AIAA 7-th CFD conference, Cincinnati. 1985. P. 360-370.
30. Z.U. Warsi, J.F. Thompson. Application of variational methods in the fixed and adaptive grid generation // Computers Math. Applic. V. 19, №8/9. 1990. P. 31-41.
31. T. Takagi, K. Miki, B.C.J. Chen, U.T.Sha Numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems for arbitrary curved surfaces // J. Comput. Phys. V. 58. 1985. P. 67-79.
32. Z.U. Warsi. Numerical grid generation in arbitrary surfaces through a second-order differential-geometric model // J. Comput. Phys. V. 64. 1986. P. 82-96.
33. Z.U. Warsi, W.N. Tuarn. Surface mesh generation using elliptic equations // Numerical grid generation in computational fluid dynamics, UK: Pineridge Press, 1986. P. 95-100.
34. S. Steingerg, P. Roache. Variational curve and surface grid generation // J. Comput. Phys. V. 100, №1. 1992. P. 163-178.



35. J.U. Brackbill. An adaptive grid with directional control // J. Comput. Phys. V. 108, №1. 1993. P. 38-50.
36. P. Knapp, R. Luczak. Truncation error in grid generation: a case study // Numerical Methods for Partial Differential Equations. V. 11. 1995. P. 561-571.
37. В.И. Власов. Об одном методе решения некоторых смешанных задач для уравнения Лапласа // Доклады АН СССР. Т. 237, №5. 1977. С. 1012-1015.
38. В.И. Власов. Краевые задачи в областях с криволинейной границей, М.: ВЦ АН СССР. 1987.
39. V.I. Vlasov. Multipole method for solving some boundary value problems in complex-shaped domains // Zeitschr. Angew. Math. Mech. V. 76, Suppl. 1. 1996. P. 279-282.
40. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. III, М.: Наука, 1967.
41. Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. Уравнения в частных производных математической физики, М.: Высшая школа, 1970.

ON A COMPUTATIONAL PROBLEM OF 2D HARMONIC MAPPINGS

S.I. Bezrodnykh , V.I. Vlasov

Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences,
Vavilov str., 40, Moscow, 119991, Russia, e-mail: sergeyib@pochta.ru, vlasov@ccas.ru

Abstract. Practical use of harmonic mappings \mathcal{F} for computational mesh generation in complex shaped domains \mathcal{Z} reduces this problem to construction of the inverse mapping \mathcal{F}^{-1} , which transforms a canonical domain (square \mathcal{Q} , as a rule) onto \mathcal{Z} because natural Cartesian map in \mathcal{Q} is suitable for realization of numerical methods employing for the \mathcal{F}^{-1} computation. Nevertheless, computational practice showed that, in spite of the Rado — Kneser theorem, which insures homeomorphism of the mapping $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Z}$, in real computations such approximate mapping quite often occurs to be nonschlicht or having high and unremovable error. In the work we show that the Multipole method ensures effective construction of the mapping \mathcal{F} with high accuracy.

Keywords: harmonic mapping, computational meshes, computational methods, the Multipole method.